粘弾性コアをもつ部分三層ばりの振動解析*
(基層と拘束層の境界条件が異なる場合)岡崎 明彦**, 浦田 喜彦**
大河内 禎一**, 立道 有年***Vibration Analysis of a Partially Covered Beam
with a Constrained Viscoelastic Layer
(In the Case of Different Boundary Conditions for Base Layer
and Constraining Layer)Akihiko OKAZAKI, Yoshihiko URATA,
Teiichi OOKOUCHI, and Aritoshi TATEMACHI

This paper presents an analytical method of flexural vibration of a beam with partial coverage of a constrained viscoelastic layer. The problem of discontinuity of the neutral axis at the connecting point between the multi-layer and homogeneous parts which arises in the method used so far, is solved by treating the axial displacement of a base layer and that of a constraining layer as being independent, and by taking the axial force and displacement of a homogeneous part into consideration. Frequencies and loss factors of beams whose base layers are clamped at both ends are calculated numerically by use of the present method and the usual method. Experimental values are also presented and compared with calculated results. As a result, damping properties of partially covered beams are clarified, and it is found that the usual method can be used practically in many cases.

Key Words: Theory of Vibration, Damping, Three-Layered Beam, Partial Coverage, Viscoelastic Core, Natural Frequency, Loss Factor

1. 緒 言

拘束層をもつ粘弾性多層材は、振動減衰が大きいため軽量構造材として注目され、これまで多くの研究が行われてきた。しかし、検討すべき事柄が多く残されていることも認識せざるを得ない。たとえば、三層ばりについては、DiTaranto⁽¹⁾、Meadら⁽²⁾の解析がよく知られているが、これらでは、基層が固定され拘束層の軸方向変位が自由のように、実用上需要が多いと思われる二つの層の境界条件が異なる場合を扱うことができない。また、この解析法をはりの一部分が被覆された部分三層ばりの解析に応用すると、多層部と単層部の接合部で中立軸の不連続が生じるため厳密な扱いが困難になる。このため著者らは、以前、多層部の断面構成が基板となるはりに対して対称な部分対称五層ばりを解析の対象として報告したのであるが⁽³⁾、実用面からは明らかに3層構造が優れていると考えられる。そこで本研究では、従来の解析にわずかな修正を施すことによって中立軸の問題が解決されることを示し、

基層と拘束層の境界条件が異なる部分三層ばりの解析を行った。また3層部に従来の解を、単層部に通常の曲げ振動解を用いて中立軸の不連続性を無視して接合すると、より簡単な計算が行えるが、このような近似が有効な場合も多いことを数値的に確認した。さらに、これらの理論による予測が妥当であることを実験によって確かめた。

本文中で定義なしで用いる主な記号

t : 時間

w : z 方向のたわみ

u_i : 弾性層の軸方向変位 ($i=1, 3$)

E_i : 弾性層のヤング率 ($i=1, 3$)

G_2 : 粘弾性層の剛性率

H_i : 各層の厚さ ($i=1\sim3$)

$h=H_1/2+H_2+H_3/2$

L : はりの全長

l_m, l_h : 3層部と単層部の長さ

ξ_m : 3層部の無次元長(被覆率) $=l_m/L$

ρ_i : 各層の密度 ($i=1\sim3$)

μ : 3層部の線密度 $=\rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + \rho_3 H_3$

μ_h : 単層部の線密度 $=\rho_1 H_1$

N_i, Q, M : 軸力 ($i=1, 3$), せん断力, 曲げモーメント

ω, f : 角振動数, 振動数 Hz

* 昭和61年10月7日 第64期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和61年4月23日。

** 正員、名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

*** 正員、愛知学院大学 (〒470-01 愛知県愛知郡日進町大字岩崎字阿良池12)。

j : 虚数単位

2. 解 析

図1(a), (b)に部分多層ばりを示した。層1と層3が弾性層、層2が粘弾性層で、層1を基層、層3を拘束層と呼ぶ。図1(a)は、文献(3)で検討した断面構成が基層の中央面に関して対称な部分五層ばり、図1(b)が本論文で扱う部分三層ばりである。3層部の位置と両端の境界条件は任意に定められるが、ここでは、3層部がばりの中央($x=0$)に対して左右対称となる場合を扱い、境界条件は両端で同じとする。図1の部分三層ばりや単層部のない一様三層ばりに Meadらの手法に基づく従来の解析法を適用すると、多層部で考慮した軸力と軸方向変位が単層部では無視されていることや、振動方程式と境界条件式が中立軸の変位、力およびモーメントで表されることに起因して、緒言で述べた問題が生じる。しかしながら、このような問題は、以下で述べるように、多層部では基層と拘束層の軸方向変位を独立に扱い、さらに単層部でも軸力と軸方向変位を考慮することによって比較的簡単に解決できる。

2.1 3層部の振動方程式と解 ここでは、中立軸の概念を必要としない変分法を用い、従来と同じつぎの基本仮定に基づいて、層1と層3の軸方向変位を独立に扱う振動方程式を導く。

- (1) 各層間にすべりは生じない。
- (2) z 方向の変位 w はすべての層において等しい。
- (3) 粘弾性層のヤング率は弾性層にくらべて小さく、軸力を無視する。
- (4) 減衰は粘弾性層のせん断変形に基づいて起こる。

弾性層1または3の中央面の軸方向変位を u_i ($i=1, 3$) とすると、各層の中央面から z 方向に z だけ離れ

(a) 部分対称五層ばり

(b) 部分三層ばり

図1 部分多層ばりの断面構成

た点におけるひずみは

$$\epsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} - \zeta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

また、図2に示した幾何学的な関係から層2のせん断ひずみを求めると

$$\gamma = \frac{1}{H_2} \left(u_1 - u_3 + h \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (2)$$

よって、3層部のひずみエネルギーは

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} E_i \int_0^{l_{m/2}} \int_{-H_2/2}^{H_2/2} \epsilon_i^2 d\zeta dx \\ &\quad + \frac{1}{2} G_2 \int_0^{l_{m/2}} \int_{-H_2/2}^{H_2/2} \gamma^2 d\zeta dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l_{m/2}} \left[K_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + K_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 + (D_1 + D_3) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{G_2}{H_2} \left(u_1 - u_3 + h \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ただし、 $K_i = E_i H_i$ は伸び剛性、 $D_i = E_i H_i^3/12$ は曲げ剛性である。

一方、運動エネルギーは、面外慣性のみを考慮すると

$$T = \frac{1}{2} \mu \int_0^{l_{m/2}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(3), (4)をもとに Hamilton 原理を用いて変分計算を行えば、 u_1, u_3, w を未知関数とする振動方程式が得られる。 $u_i = u_i \exp(j\omega t)$, $w = w \exp(j\omega t)$ とし、さらに

$$\bar{w} = w/L, \quad \bar{u}_i = u_i/h, \quad \bar{x} = x/L \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{Kh^2}{D}, \quad g = \frac{G_2 L^2}{KH_2}, \quad \Omega^2 = \frac{\mu \omega^2 L^4}{D}, \\ K &= \frac{K_1 K_3}{K_1 + K_3}, \quad D = D_1 + D_3, \quad k_i = \frac{K_i}{K} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

という記号を用いて無次元化すると、振動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} - g Y \left(\frac{d\bar{u}_1}{d\bar{x}} - \frac{d\bar{u}_3}{d\bar{x}} + \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \right) - \Omega^2 \bar{w} &= 0 \\ k_1 \frac{d^2 \bar{u}_1}{d\bar{x}^2} - g \left(\bar{u}_1 - \bar{u}_3 + \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right) &= 0 \\ k_3 \frac{d^2 \bar{u}_3}{d\bar{x}^2} + g \left(\bar{u}_1 - \bar{u}_3 + \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。また、力とモーメントは次式で与えられる。

図2 xz 断面内における変形の説明図

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_i &= \frac{L}{Kh} N_i = k_i \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{x}} \quad (i=1, 3) \\ \bar{Q} &= \frac{L}{D} Q = \frac{d^3 \bar{w}}{d\bar{x}^3} - g Y \left(\bar{u}_1 - \bar{u}_3 + \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right) \quad \dots (8) \\ \bar{M} &= \frac{L}{D} M = \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} \end{aligned} \right\}$$

付録に示すように、従来の解析では、軸方向のつりあい式 $N_1 + N_3 = 0$ から $k_1 u_1 = -k_3 u_3$ という関係を導き、未知関数の個数を減らして単純化をしている。この結果、境界条件の一つである軸方向の拘束条件が層1, 3で同じ場合しか扱えなくなる。そこで以下では、 u_1 と u_3 、したがって N_1 と N_3 を独立に扱うことによってこれを回避することにする。このようにすると中立軸の概念は全く不要になり、図1(b)のようなはりの解析も可能になるのである。

つぎに振動方程式(7)の解を求める。なお簡単のため、無次元量を表すバーは以後省略する。 $u_i = U_i \exp(\lambda x)$, $w = W \exp(\lambda x)$ と仮定し、式(7)に代入すれば、次式を得る。

$$\lambda^6 - g(1+Y)\lambda^4 - \Omega^2 \lambda^2 + g\Omega^2 = 0 \quad \dots (9)$$

$$\lambda^2 = 0 \quad \dots (10)$$

式(9)は従来の解析に現れるもので、これに対応する解は、

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^3 (A_j e^{\lambda_j x} + A'_j e^{-\lambda_j x}) \\ u_i &= \sum_{j=1}^3 U_{ij} (A_j e^{\lambda_j x} + A'_j e^{-\lambda_j x}) \quad (i=1, 3) \end{aligned} \right\} \quad \dots (11)$$

ただし、 $\pm \lambda_j (j=1 \sim 3)$ は式(9)から求めた特性根であり、 U_{ij} は式(11)が式(7)を満たすべきことより λ_j に対応してつぎのように定められる。

$$k_1 U_{1j} = -k_3 U_{3j} = g \lambda_j / (\lambda_j^2 - g)$$

一方、式(10)に対応する解は次式で与えられる。

$$w = a_0 x + b_0, \quad u_i = a_i x + b_i \quad (i=1, 3)$$

上式を式(7)に代入し、係数間の関係を求めると

$$a_0 = b_0 = 0, \quad a_1 = a_3, \quad b_1 = b_3$$

となり、

$$w = 0, \quad u_1 = u_3 = A_4 x + A_5 \quad \dots (12)$$

が得られる。この解は、層1と層3に剛体的な軸方向変位と一様な伸縮をもたらすが、 $w = 0$, $u_1 = u_3$ のため、層2のせん断変形には関与しない。

式(11)と式(12)を重ね合わせたものが3層部の解である。本論文では、3層部がはりの中央に位置し、両端の境界条件が等しい場合を扱うことに留意して

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^3 (B_j \cosh \lambda_j x + C_j \sinh \lambda_j x) \\ u_i &= \sum_{j=1}^3 U_{ij} (B_j \sinh \lambda_j x + C_j \cosh \lambda_j x) \\ &\quad + B_4 x + C_4 \quad (i=1, 3) \end{aligned} \right\} \quad \dots (13)$$

と表せば、積分定数 B_j の掛かる項がはりの中央 ($x=0$) に関して対称な振動の解、積分定数 C_j の掛かる項が反対称な振動の解となる。

ここで、一様三層ばりについて本解析で新たに付加された解に関する若干の検討を行う。層1と層3の境界条件が等しい場合には、3層部の両端 $x = \pm \xi_m/2$ で

$$u_1 = u_3 = 0 \quad \text{または} \quad N_1 = N_3 = 0 \quad \dots (14)$$

となる。式(14)に対称振動の解を代入し、双曲線関数で表される従来の解と新たな解を未知数とする連立一次方程式を解けば、 $B_4 = 0$ を得る。一方、層1と層3の境界条件が異なれば、 $B_4 \neq 0$ となる。また反対称振動では、はりの位置が指定されていないため、剛体的な軸方向変位を表す C_4 は $C_4 = 0$ とおける。よって、 $B_4 = 0$ または $C_4 = 0$ のとき、 $k_1 u_1 = -k_3 u_3$, $N_1 = -N_3$ なる従属関係が得られ、反対称振動では $x = \xi_m/2$ における層1と層3の軸方向の拘束条件が同じか否かにかかわらず、また、対称振動では層1と層3の軸方向の拘束条件が等しいときに限って、方程式(7)の解は従来の解と一致することになる。

2.2 単層部の振動方程式と解 軸力と軸方向変位を考慮して単層部の振動方程式を求め、無次元形で表すと次式となる。

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{\alpha}{\beta} \Omega^2 w = 0, \quad \frac{d^2 u_1}{dx^2} = 0 \quad \dots (15)$$

ただし、 $\alpha = \mu_h/\mu$, $\beta = D_1/D$ 。

また、力とモーメントは、

$$N_1 = k_1 \frac{du_1}{dx}, \quad Q = \beta \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad M = \beta \frac{d^2 w}{dx^2} \quad \dots (16)$$

式(15)の第1式は、均質ばりの曲げ振動の方程式で、 $\theta^4 = (\alpha/\beta)\Omega^2$ とおくと、 w の一般解は

$$w = F_1 \cos \theta x + F_2 \sin \theta x + F_3 \cosh \theta x + F_4 \sinh \theta x \quad \dots (17)$$

一方、式(15)の第2式より u_1 の一般解は次式となる。

$$u_1 = F_5 x + F_6 \quad \dots (18)$$

2.3 振動数方程式 層1と層3の境界条件が異なる例として、はりの両端で層1が固定され、3層部と単層部の接合部では層3が自由の基層固定を扱う。3層部の変位、力およびモーメントを表す諸量に添字 m 、単層部には h を付けて表すと、 $x = \xi_m/2$ における3層部と単層部の接合条件は

$$\begin{aligned} w_m &= w_h, \quad dw_m/dx = dw_h/dx, \quad Q_m = Q_h, \\ M_m &= M_h, \quad u_{1m} = u_{1h}, \quad N_{1m} = N_{1h}, \quad N_{3m} = 0 \quad \dots (19) \end{aligned}$$

また、 $x = 1/2$ における固定の条件は

$$w_h = dw_h/dx = u_{1h} = 0 \quad \dots (20)$$

このように、本解析法では接合部における軸方向変位

と軸力の連続性が考慮されるため、中立軸の問題が解消する。対称振動では、式(13)の対称振動に対応する3層部の解と式(17), (18)の単層部の解を式(19), (20)に代入すると、 $B_1 \sim B_4$ と $F_1 \sim F_6$ に関する連立一次方程式が得られ、その係数行列の行列式を零に等置したものが振動数方程式となる。一方、反対称振動では、 $C_4=0$ に注意すると、 $x=\xi_m/2$ の条件 $N_{1m}=N_{1h}$, $N_{3m}=0$ より $F_5=0$, $x=1/2$ の条件 $u_{1h}=0$ より $F_6=0$ を得る。これより、 $k_1 u_{1m} = -k_3 u_{3m}$, $N_{1m} = -N_{3m}$, $u_{1h} = N_{1h} = 0$ となつて、3層部と単層部の解は従来のものと一致する。この場合、式(19)から $u_{1m} = u_{1h}$, $N_{1m} = N_{1h}$, 式(20)から $u_{1h} = 0$ の各条件を除くことにより、 $C_1 \sim C_3$ と $F_1 \sim F_4$ に関する連立一次方程式が得られる。

2.4 損失率 ここでは、減衰効果を表す損失率 η をひずみエネルギーから求める。部分三層ばりのある振動モードの全ひずみエネルギーの一周期中の最大値を P , 3層部と単層部のひずみエネルギーをそれぞれ P_m, P_h , 粘弾性層のひずみエネルギーを P_s , 粘弾性材単体の損失率を η_c とすれば、仮定(4)より $\eta P = \eta_c P_s$ が成立するため

$$\eta/\eta_c = P_s/P, \quad P = P_m + P_h \quad (21)$$

P_m, P_h, P_s は無次元形では次式となる。

$$\left. \begin{aligned} P_m &= \frac{1}{2} \int_0^{\xi_m/2} \left\{ Y \left[k_1 \left(\frac{du_{1m}}{dx} \right)^2 + k_3 \left(\frac{du_{3m}}{dx} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + g \left(u_{1m} - u_{3m} + \frac{dw_m}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d^2 w_m}{dx^2} \right)^2 \right\} dx \\ P_h &= \frac{1}{2} \int_{\xi_m/2}^1 \left[Y k_1 \left(\frac{du_{1h}}{dx} \right)^2 + \beta \left(\frac{d^2 w_h}{dx^2} \right)^2 \right] dx \\ P_s &= \frac{1}{2} \int_0^{\xi_m/2} g Y \left(u_{1m} - u_{3m} + \frac{dw_m}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

表1 Y と H_3/H_1 より定まる H_2/H_1 の値

H_3/H_1	Y				
	1	3.16	10	31.6	100
0.1	0.408	1.153	2.479	4.835	9.029
0.2	0.110	0.662	1.645	3.391	6.499
0.3	—	0.433	1.276	2.773	5.440
0.5	—	0.193	0.927	2.231	4.553
1.0	—	0.026	0.826	2.246	4.774

(a) 基層固定 (b) 完全固定

図3 境界条件の説明図

3. 数値計算例および実験結果

3.1 数値計算例 前記の方法にしたがい、両端基層固定[図3(a)]の振動数と損失率を計算し、従来の解法による結果とも比較した。図4, 5は一樣三層ばりの結果である。従来の解法では、一樣三層ばりの振動を支配するパラメータは g と Y だけであるが、本論文の解法では、さらに H_2/H_1 または H_3/H_1 の指定を必要とする。 Y は層1と層3が同様の材料であれば式(6)から

$$Y = \frac{3H_1H_3(H_1+2H_2+H_3)^2}{(H_1+H_3)(H_1^3+H_3^3)} \quad (23)$$

図4 一樣三層ばりの $\Omega, \eta/\eta_c$ と g, Y の関係 (基層固定, 一次振動)

図5 一樣三層ばりの一, 二, 三次振動の $\Omega, \eta/\eta_c$ と g の関係 (基層固定, $Y=3.16$)

となり、各層の厚さ比だけから定まる。表1は Y と H_3/H_1 から定まる H_2/H_1 の値である。層2と層3が層1に比べて薄ければ、 $Y < 12$ となる。以下、層1と層3を同種の材料とし、 $H_3/H_1 = 0.1$ と 1.0 の結果を例示した。ただし、 $Y=1$ については 0.1 と 0.2 である。

図4は Y をパラメータとして示した一次振動の Ω と η/η_c の g に対する変化、図5は $Y=3.16$ のときの一、二、三次振動の Ω と η/η_c の g に対する変化である。振動数 Ω は、 g が十分小さいと曲げ剛性 D と線密度 μ の両端固定均質ばりの振動数とほぼ等しく、その後 g とともに単調に増加する。一方、損失率比 η/η_c は適当な g で極大となり、 Y が大きくなると η/η_c の極大点は g の小さな方向へ移動する。また、振動次数が増すと η/η_c の極大点は g の大きな方向へ移動する。このような傾向は、両端完全固定[図3(b)]や自由など層1と層3の境界条件が等しい場合と共通であるが、 η/η_c の極大値より右側では特性が異なる。両端基層固定では、極大値より右側の η/η_c の変化は Y が小さいほどなめらかになり、広い g の範囲で大きな減衰効果が得られる。このことは設計に好都合ではあるが、 g が大きいと Y の増加によって η/η_c が減少する場合があるため、各層の厚みの決定には注意がいる。

ところで、先に述べたように振動次数が奇数の対称振動では、中立軸の不連続を無視して従来の解を用いた近似解法(付録)による結果と本論文の解法による結果には違いが生じる。図4、5の一点鎖線が従来の解法による結果を表し、その差は g 、 Y 、 H_3/H_1 の各値の増加とともに大きくなる傾向にあり、一次振動のとき最も大きい。しかし、 $H_3/H_1 = 0.1$ の結果は g 、 Y の値に関係なくよく一致している。したがって、層2と層3が層1に比して薄い通常の多層ばりの制動特性は、近似解法によって十分予測できると考えられる。

図6、7は被覆率 ξ_m を横軸として示した部分三層ばりの Ω と η/η_c である。ただし、弾性層に軟鋼、粘弾性層に天然ゴムを考え、弾性層と粘弾性層の密度比は 0.19 とした。図6は $H_3/H_1 = 1.0$ 、図7は $H_3/H_1 = 0.1$ で、実線は本論文の解法、破線が前述の近似解法による結果を表す。一様被覆と同様、 H_3/H_1 が小さければ、両者の結果はよく一致し、部分三層ばりの制動特性も近似解法によって十分予測できる。なお被覆率が適当であれば、一様被覆と同程度か、それ以上の減衰効果が得られる。このことは、既に部分五層ばりで知られていることではあるが、軽量化にとって望ましいことである。

3.2 実験結果 理論の妥当性を検討することも含め、両端基層固定と両端自由の部分三層ばりについて実験を行った。層1に冷間圧延鋼、層2に天然ゴム、層3にすずめつき鋼を用い、シアノアクリレート系接着剤(アロンアルファ#102)によって各層を接着した。表2は試料の諸元である。被覆率 ξ_m は一様三層ばりから順次層2と層3を除去して変化させた。基層固定では層1を強固なベースに固定したが、その際、外部から応力が加わらないように十分注意した。また自由では、節の位置を2本の細糸でつるした。実験は室温 $20 \sim 22^\circ\text{C}$ で行い、損失率 η の測定には自由減衰法と共振法を併用した。なお、実験値を理論値と比較するには、粘弾性層に用いた天然ゴムの剛性率 G_2 と損失

表2 試料の諸元

Layer	1	2	3
Young's modulus GPa	206	—	206
Density kg/m^3	7.8×10^3	1.51×10^3	7.8×10^3
Thickness mm	1.971	1.077	0.333
Length mm	300	$300 \times \xi_m$	$300 \times \xi_m$

図6 部分三層ばりの Ω 、 η/η_c と ξ_m の関係
(基層固定, $g=10$, $Y=3.16$, $H_3/H_1=1.0$)

図7 部分三層ばりの Ω 、 η/η_c と ξ_m の関係
(基層固定, $g=10$, $Y=3.16$, $H_3/H_1=0.1$)

図 8 天然ゴムの剛性率と損失率

図 9 両端基層固定の部分三層ばりの f, η と ξ_m の関係 (実験値と計算値の比較)

率 η_g の値が必要となる。これらの値は、別に作製した一様三層ばりを用い、はりの全長を変えながら、両端自由の一～五次振動の振動数 f と損失率 η を測定し、その結果をもとに理論的に計算される $\Omega \sim g$ および $\eta/\eta_g \sim g$ の関係から逆算した。結果を図 8 に示す。図 8 中、実線は最小二乗法によって $f[\text{Hz}]$ の二次式で近似した次式の曲線である。

$$G_2 = 20.4 + 3.94 \times 10^{-3} \times f - 8.82 \times 10^{-7} \times f^2 \quad [\text{MPa}] \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\eta_g = 0.210 - 2.89 \times 10^{-6} \times f + 3.46 \times 10^{-8} \times f^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

図 9, 10 に部分三層ばりの実験結果と計算結果を示した。図 9 の境界条件は基層固定で、実線は本論文の解法、破線は近似解法による計算値である。また図 10 は自由の結果で、この場合には実線で示した計算値は本論文の方法でも前述の近似解法でも同じになる。図 9, 10 のとおり、振動数、損失率とも実験値は計算値とよく一致している。とくに基層固定の一次振動と三次振動の損失率 η の実験値は、近似解法よりも本論文の解法による結果とよい一致を示している。

図 10 両端自由の部分三層ばりの f, η と ξ_m の関係 (実験値と計算値の比較)

4. 結 言

本論文では、従来の解析法で問題となる部分三層ばりの 3 層部と単層部の接合部における中立軸の不連続を回避するため、基層と拘束層の軸方向変位を独立に扱い単層部でも軸力と軸方向変位を考慮した新しい解析法を示し、両端基層固定の境界条件について制動特性を数値的に検討した。また、両端基層固定と両端自由の部分三層ばりについて実験を行い、実験結果と計算結果を比較検討した。数値計算例によると、拘束層が基層に比べて薄ければ、新しい理論と中立軸の不連続を無視して従来の解法を用いた近似理論の差は小さいため、簡単な近似理論も多くの場合に実用的に用い得ると考えられる。また実験結果と計算結果はよく一致しており、部分五層ばりと同様、被覆率が適当であれば、一様被覆と同程度か、それ以上の減衰効果の得られることが実験的にも確かめられた。

付 録

従来の解析法では、 $N_1 + N_3 = 0$ の場合を考え、 $u = k_1 u_1 = -k_3 u_3$ において、3 層部の振動方程式と力およびモーメントの式に次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 w}{dx^4} - gY \left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \Omega^2 w &= 0 \\ \frac{d^2 u}{dx^2} - g \left(u + \frac{dw}{dx} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (26)$$

$$N = \frac{du}{dx}, \quad Q = \frac{d^3 w}{dx^3} - gY \left(u + \frac{dw}{dx} \right), \quad M = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad \dots\dots\dots (27)$$

また単層部では、軸力と軸方向変位を無視して

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{\alpha}{\beta} \Omega^2 w = 0 \dots\dots\dots (28)$$

$$Q = \beta \frac{d^3 w}{dx^3}, \quad M = \beta \frac{d^2 w}{dx^2} \dots\dots\dots (29)$$

したがって、両端基層固定の部分三層ばりの $x = \xi_m/2$ における3層部と単層部の接合条件は

$$w_m = w_h, \quad dw_m/dx = dw_h/dx, \quad Q_m = Q_h,$$

$$M_m = M_h, \quad N = 0$$

となり、 $x = 1/2$ における固定の条件は

$$w_h = dw_h/dx = 0$$

となる。このため、3層部と単層部の接合部で軸方向変位は不連続になるが、このような近似的取扱も広い範囲で有効なことは本文で述べたとおりである。

文 献

- (1) DiTaranto, R. A., *Trans. ASME, Ser. E*, 32-4(1965), 881.
- (2) Mead, D. J. and Markus, S., *J. Sound Vib.*, 10-2(1969), 163.
- (3) 立道・ほか2名, 機論, 40-335(昭49), 1899.

討 論

〔質問〕 中川 紀 寿〔神戸大学工学部〕

(1) ここで示された理論は、拘束層の厚さが基層に比べてそれほど薄くなく、中立軸の不連続を考慮する必要がある場合を取扱っておられると思うが、実験で示された例では、その厚さの比がそれほど大きいと思われない。 H_3/H_1 の大きい場合についての結果を示されたほうが説得力があるように思われるがいかがか。

(2) 2章の解析のところで「3層部の位置と両端の境界条件は任意に定められる」とあるが、部分3層はりの実際問題では、3層部の境界条件を本当に任意に定められるのか。固定の条件など難しいように思われるが、いかがお考えか。

(3) 実験で固定する場合「外部から応力が加わらないように十分注意した」とあるが、具体的にお示し願いたい。

(4) 緒言の記号 E_i の部分に ($i=1, 3$) を加えた方が、また、 N は N_i が適当と思われるが、いかがか。

〔回答〕 (1) この解析では、従来、不十分にしか扱えなかった3層部と単層部の中立軸の不連続性を、理論的にある程度きちんと扱えるようにすることが目的であった。一方、著者らは、この種の多層材は軽量構造に用いられることが多いと考え、そのために、実験では $H_1=1.971$ mm, $H_2=1.077$ mm, $H_3=0.333$ mm の断面構成にした。この試料の場合でも、3層部の中立軸は単層部のそれと比べて0.3 mmほどずれており、基層の厚さに比べれば、必ずしもずれが小さいとは言えないと思われる。ただ、傾向をもっとはっきりさせるという意味では、ご指摘のとおりかと思う。

(2) 説明不足のために誤解を招いたようであるが、ここでいう境界条件は、はり全体の両端、すなわ

付図 1 実験装置の概略図

ち単層部の境界条件を意味している。

(3) 付図1に示すように、はりの両端は強固なベースに片側につき4本のボルト (M10) で、トルクレンチを用いて400 kg・cmのトルクで均等に締め付けた。はりの固定端には基層と同じ厚みの冷間圧延鋼片を挿入して、固定時のはりの必要以上の変形を防いでいる。また、取付時に体温がはりに伝わると熱応力が生じるため、試料をセットしてからボルトの締め付けを行うまでに、十分に間をおいた。

(4) ご指摘のとおり、記号 E_i の部分に ($i=1, 3$), ρ_i の部分に ($i=1 \sim 3$) を追加させていただく。また、 N は N_i に改め、軸力 ($i=1, 3$) とさせていただきます。

〔質問〕 小泉 孝之・成田 正夫

〔三菱電機(株)中央研究所〕

粘弾性材料を用いた振動減衰法に関し、部分的な減衰層を設けたより実用的な場合について解析的に検討されたことに敬意を表す。例えば宇宙構造物などの構造に関する減衰効果を予測するためには、一般に、有限要素法を用いて構造の全ひずみエネルギーに対する粘弾性材のひずみエネルギーの比を算出し、各固有モードについての減衰係数を導出する方法がよく用いられるが、このような一般的な構造に適用する場合にも中立軸の不連続を無視し得るか。中立軸の不連続性を無視できる条件とその限界について示されたい。

〔回答〕 粘弾性コアをもつ部分三層円板(付1)でも、拘束層の厚みが基層の厚みに比べて薄ければ、中立面の不連続性を無視できる。著者らは実用的には損失率 η は10%前後の誤差で見積もりができれば十分なことが多いと考えているため、はり・板・かくなどを結合して作られる一般的な構造物でも、拘束層の厚みが基層の厚みに比べて薄い場合には、中立面の不連続

性を無視できると思われる。ただ、この種の検討は、この論文で、はりの場合について初めて行われたものであるため、一般的な構造物について条件や限界を明確に指摘できるには至っていないが、円板については同様の検討を報告することになっている。

(付1) 岡崎・ほか3名, 機論, 53-487, C (昭62), 掲載予定.