非定常不規則入力を受ける非線形系の応答と初通過確率*

吉 田 和 夫**

Response and First Passage Probability of Non-linear Systems
Subjected to Non-stationary Random Input

Kazuo YOSHIDA

An approximate method assuming partially Gaussian probability density functions is applied for the analysis of symmetric and non-symmetric non-linear systems subjected to non-stationary white noise. And the first passage probabilities are obtained by use of the assumed probability density functions, based upon the assumption of Poisson process of threshold crossings. In the numerical calculations and simulations, the usefulness of the method is demonstrated in comparison with the Gaussian method used often so far, and it is indicated that the estimation accuracy of the probability density is very important in the first passage problem.

Key Words: Theory of Vibration, Random Vibration, Non-linear System, Reliability, First Passage Probability, Non-stationary Response

1. 結 言

近年耐震工学に見られるように、非定常不規則入力を受ける非線形系の応答と初通過確率の算定は、信頼性評価の観点から重要な課題となっている。

初通過問題に関しては、機械系の不規則振動の分野においてはCrandall⁽¹⁾の研究以来既に多くの研究が行われているが、線形系の場合でさえ厳密解を求めることは一般に困難であり、多くの近似手法の研究が試みられている^{(2)~(12)}。その中でも、いき値通過過程を過去の履歴に依存しないポアソン過程近似する手法が広く用いられている。この手法の場合は応答の確率密度が求められれば、非線形系でも初通過確率を計算することができ、動的構造信頼性解析に応用されることが多い⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。この手法は、系の応答の確率過程が広帯域か、あるいはいき値レベルが系の応答の主要領域に比較して高い場合に有効な手法であることはよく知られている。

一方、非線形系の応答の確率密度は、マルコフ過程であれば、Fokker-Planck 方程式の解として与えら

れることはよく知られているが、この方程式の非定常解析解を求めることは一般に困難である。そこでもっとも広く用いられている近似解法は、非線形系の応答にもかかわらず応答過程の正規性を仮定する手法であり、非線形系の初通過問題にも広く用いられている^{(15)~(17)}。しかしながら、この手法は、応答のとり度やひずみ度を評価することができなく、また確率密度のすその部分の推定精度が悪くなり初通過確率の算定に大きな誤差を生じる問題点がある。このほか、確率密度を指数関数近似し、キュムラント打ち切り法から得られたモーメントから確率密度の係数を求める方法⁽¹⁸⁾も提案されているが、数値例は二次のべきで打ち切っている。したがって、確率密度のとりやひずみとして現れる非線形特性が初通過確率に及ぼす影響についてはこれまで調べられていなかった。

そこで本研究は、著者が既に提案している部分的正規確率密度関数によって応答の確率密度を近似する手法⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾を本問題に適用して、非線形系の非定常不規則振動の初通過問題について考察することを目的としている。なお、初通過確率の算定においては上記のいき値通過過程のポアソン過程近似の手法を用いて、主に解過程の確率密度が初通過確率に及ぼす影響を明らかにすることに重点を置く。考察の対象としては非定

* 昭和61年10月7日 第64期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月11日。

** 正員、慶應義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1)。

常正規白色性入力を受ける非線形一自由度系を取り上げるが、非線形特性としては、対称な場合と非対称な場合に分けて考察する。本研究によって得られた結果を、従来の正規性を仮定する方法と計算機シミュレーションの結果と比較検討する。

2. 基礎方程式

次のような非定常白色雑音入力を受ける非線形一自由度系を考察する。

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta f_2(\dot{x}(t)) + f_1(x(t)) = w(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式において x は変位を表し、ドットは時間に関する微分を示し、 ζ は正の定数である。 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ はそれぞれ復原力と減衰力の非線形特性を表す関数であり、次のような非線形特性を有するものとする。

$$f_1(x(t)) = x(t) + \varepsilon_1 x^2(t) + \varepsilon_2 x^3(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$f_2(\dot{x}(t)) = \dot{x}(t) + \varepsilon_3 \dot{x}^2(t) + \varepsilon_4 \dot{x}^3(t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

上式において ε_1 と ε_3 が零であれば、この非線形特性は原点に関して対称になり、そうでない場合は非対称となる。また、入力 $w(t)$ は次の性質をもつ白色雑音とする。

$$E[w(t)] = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$E[w(t)w(\tau)] = 2\pi S(t)\delta(t-\tau) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $E[\]$ は数学的期待値を意味し、 $\delta(\)$ は Dirac のデルタ関数で、インテンシティ $S(t)$ は、確定包絡線関数を

$$\eta(t) = -\frac{t}{T} \exp\left(1 - \frac{t}{T}\right), T=110 \quad \dots\dots\dots (6)$$

として、

$$S(t) = \frac{2\zeta}{\pi} \eta^2(t) \quad \dots\dots\dots (7)$$

と表されるものとする。

式(1)を数学的に厳密に定義するために、伊藤形の確率微分方程式で表すと、

$$d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -f_1(x_1) - 2\zeta f_2(x_2) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\gamma \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $x_1 = x(t)$ 、 $x_2 = \dot{x}(t)$ であり、 $\gamma(t)$ は次の性質をもつ Brown 運動過程である。

$$E[\gamma(t) - \gamma(\tau)] = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$E[(\gamma(t) - \gamma(\tau))^2] = 2\pi S(t)|t - \tau| \quad \dots\dots\dots (10)$$

さらに状態変数の初期値は $\gamma(t)$ と独立な確率変数とする。このとき、 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ はそれぞれ Lipschitz 条件と growth に関する制御条件を満足するので、式(6)は一意解をもち、マルコフ過程となる。

式(6)に対する Fokker-Planck 方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p[x(t), t|x(t_0), t_0]}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_1}[x_2 p] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_2}[f_1(x_1)p] + 2\zeta \frac{\partial}{\partial x_2}[f_2(x_2)p] \\ & + \pi S \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[p] \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし、 $p[x(t), t|x(t_0), t_0]$ は x_1 と x_2 からなる状態変数 $x(t)$ の遷移確率密度関数である。

3. 確率密度関数の仮定

上記の Fokker-Planck 方程式の非定常解を解析的に求めることは困難である。そこで、著者は非対称非線形系に対しては既に提案している部分的正規確率密度を仮定する手法⁽²⁰⁾を対称非線形系にも発展させ、近似解法を行う。非線形特性が対称な場合と非対称な場合に分けて状態変数の確率密度関数を仮定するが、表記の簡便さのために次の変換式を満足する新しい状態変数 x_1' と x_2' を導入する。

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - m_1 \\ x_2 - m_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 m_1 と m_2 は確率密度のモードにおける状態変数 x_1 と x_2 の値を示し、 α は $E[x_1'x_2'] = E[x_1'] \cdot E[x_2']$ となる角度である。

a. 対称非線形系の場合 対称非線形系の場合は、入力が正規分布と零の平均値をもてば状態変数の平均値も零になり、その確率密度は対称形となることは明らかである。そこで図1に示すように部分的に正規確率密度関数を有する確率密度関数を状態変数 x_1' と x_2' で以下のように定義する。

$$p(x_1', x_2') = \begin{cases} C_s \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1'^2}{\sigma_{11}^2} + \frac{x_2'^2}{\sigma_{21}^2}\right)\right], & 0 \leq x_1' \leq \sigma_{11}, \\ & 0 \leq x_2' \leq \sigma_{21} \\ & \dots\dots\dots (13) \\ C_s \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1' - n_1)^2}{\sigma_{12}^2} + \frac{x_2'^2}{\sigma_{21}^2}\right)\right], & x_1' > \sigma_{11}, \\ & 0 \leq x_2' \leq \sigma_{21} \\ & \dots\dots\dots (14) \\ C_s \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1' - n_1)^2}{\sigma_{12}^2} + \frac{(x_2' - n_2)^2}{\sigma_{22}^2}\right)\right], & x_1' > \sigma_{11}, \\ & x_2' > \sigma_{21} \\ & \dots\dots\dots (15) \\ C_s \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1'^2}{\sigma_{11}^2} + \frac{(x_2' - n_2)^2}{\sigma_{22}^2}\right)\right], & 0 \leq x_1' \leq \sigma_{11}, \\ & x_2' > \sigma_{21} \\ & \dots\dots\dots (16) \end{cases}$$

ただし、式(12)における m_1 と m_2 は零であり、

$$n_1 = \sigma_{11} - \sigma_{12}, n_2 = \sigma_{21} - \sigma_{22}$$

$$C_s =$$

$$\frac{1}{\left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_{11} + \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_{12} \right\}} \\ \times \frac{1}{\left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_{21} + \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sigma_{22} \right\}} \\ \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du, \\ \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

上式においては, $x_1' > 0, x_2' > 0$ の領域のみ定義したが, 他の領域も上式を原点, x_1' 軸および x_2' 軸に関して対称に写した形で定義される。

b. 非対称非線形系の場合 非対称非線形系に対しては図2に示すように部分的確率密度関数を仮定する。

$$p(x_1', x_2') =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_a \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1'^2}{\sigma_{1+}^2} + \frac{x_2'^2}{\sigma_{2+}^2}\right\}\right], & x_1' \geq 0, \dots\dots (17) \\ & x_2' \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_a \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1'^2}{\sigma_{1-}^2} + \frac{x_2'^2}{\sigma_{2+}^2}\right\}\right], & x_1' < 0, \dots\dots (18) \\ & x_2' \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_a \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1'^2}{\sigma_{1-}^2} + \frac{x_2'^2}{\sigma_{2-}^2}\right\}\right], & x_1' < 0, \dots\dots (19) \\ & x_2' < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_a \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1'^2}{\sigma_{1+}^2} + \frac{x_2'^2}{\sigma_{2-}^2}\right\}\right], & x_1' \geq 0, \dots\dots (20) \\ & x_2' < 0 \end{array} \right.$$

ただし,

(a) x_1 の周辺確率密度関数

$$C_a = \frac{2}{\pi(\sigma_{1+} + \sigma_{1-})(\sigma_{2+} + \sigma_{2-})}$$

4. モーメントと初通過確率

4.1 モーメント 状態変数の任意のモーメントは α, m_1 と m_2 および状態変数 x_1' と x_2' に関するモーメントを用いて次のように表される。

$$E[x_1^{k_1} x_2^{k_2}] = E[(x_1' \cos \alpha - x_2' \sin \alpha + m_1)^{k_1} \\ \times (x_1' \sin \alpha + x_2' \cos \alpha + m_2)^{k_2}], \quad k_1, k_2 > 0 \quad (21)$$

したがって, x_1 と x_2 に関するモーメントは3章で定義された確率密度関数のパラメータによってすべて表される。すなわち, 対称非線形系の場合は5個のパラメータ $\alpha, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ で, 非対称非線形系の場合は7個のパラメータ $\alpha, m_1, m_2, \sigma_{1+}, \sigma_{1-}, \sigma_{2+}, \sigma_{2-}$ である。これらの未知パラメータの時間的応答を求めるためにはFokker-Planck方程式から得られる以下のモーメント方程式を必要とする。

$$\dot{E}[x_1] = E[x_2] \dots\dots\dots (22)$$

$$\dot{E}[x_2] = -E[f_1(x_1)] - 2\zeta E[f_2(x_2)] \dots\dots\dots (23)$$

$$\dot{E}[x_1^2] = 2E[x_1 x_2] \dots\dots\dots (24)$$

$$\dot{E}[x_2^2] = -2E[x_2 f_1(x_1)] - 4\zeta E[x_2 f_2(x_2)] \\ + 2\pi S \dots\dots\dots (25)$$

$$\dot{E}[x_1 x_2] = E[x_2^2] - E[x_1 f_1(x_1)] \\ - 2\zeta E[x_1 f_2(x_2)] \dots\dots\dots (26)$$

(a) x_1 の周辺確率密度関数

(b) 等高線図

図1 対称非線形系に対する確率密度関数の仮定

(b) 等高線図

図2 非対称非線形系に対する確率密度関数の仮定

$$\dot{E}[x_1^2] = 3E[x_1^2 x_2] \cdots \cdots (27)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}[x_2^2] = & -3E[x_2^2 f_1(x_1)] - 6\zeta E[x_2^2 f_2(x_2)] \\ & + 6\pi S E[x_2] \cdots \cdots (28) \end{aligned}$$

ただし、対称非線形系の場合式(27)、(28)は必要ない。上式は未知パラメータに関する微分方程式に変換できるので、最終的には式(22)～(28)を未知パラメータに関して解けば状態変数の任意のモーメントが求められると同時に確率密度関数が得られる。

4.2 初通過確率 いき値通過過程のポアソン過程近似によって得られる初通過確率を与える。まず、正側のいき値 B^+ と負側のいき値 B^- を超える単位時間当たりの平均いき値通過回数 ν^+ と ν^- は次式で与えられる。

$$\nu^+(B^+, t) = \int_0^\infty x_2 p[x_1 = B^+, x_2, t] dx_2 \cdots \cdots (29)$$

$$\nu^-(B^-, t) = \int_{-\infty}^0 |x_2| p[x_1 = B^-, x_2, t] dx_2 \cdots \cdots (30)$$

上式における積分は、本研究においては確率密度関数は式(13)～(20)のように領域が分割されて正規確率密度関数が与えられているので、各領域ごとの積分値の和として表される。

正側、負側および両側の単位時間当たりの平均いき値通過回数 ν が求めれば、初通過確率は次式で与えられる。

$$P_f(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \nu(\tau) d\tau\right] \cdots \cdots (31)$$

5. 数値計算例と考察

5.1 対称非線形系の場合

5.1.1 定常応答の平均いき値通過回数 減衰項が線形の場合は定常応答の確率密度関数の厳密解が得られるので、 $\eta(t)=1$ のときの定常状態における単位

$$(\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.0, \epsilon_2 = 0.5, \zeta = 0.2)$$

図3 片側平均いき値通過回数

時間当たりの平均いき値通過回数を求めた結果を図3に示す。部分的正規確率密度関数を用いる本手法は厳密解とよく一致しているが、従来の正規性を仮定する手法は大きな誤差を生じている。ただし、いき値レベルが高くなると、本手法も厳密解からずれてくる。これは、厳密な確率密度関数が指数の負の四乗のべきで零に収束するのにに対して本手法の場合二乗のべきで収束するためである。

5.1.2 非定常応答のモーメントと初通過確率 図4、5に x_1 の二次と四次のモーメントの非定常応答を示す。図4、5中のシミュレーションの結果は、正規乱数を発生させて式(1)をRunge-Kutta法によって解き、3000回の集合平均をとった結果である。他のシミュレーションの結果も同様である。二次と四次のモーメントにおいては、本手法、正規性を仮定する手法およびシミュレーションの結果にはそれほど大きな相違はない。図6には $t=110$ での x_1 の周辺確率密度関数の結果を示す。この場合も、本手法の結果のほうがシミュレーションの結果に近いものの、やはり大きな差はない。これらの結果から、この数値例は非線形性がそれほど大きくないことがわかる。

しかしながら、図4～6に対応する初通過確率を求めた結果を図7に示すが、初通過確率においては大きな差が現れている。本手法の結果はシミュレーション

$$(\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.0, \epsilon_2 = 0.15625\pi, \zeta = 0.1)$$

図4 二次モーメントの非定常応答

$$(\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 0.0, \epsilon_2 = 0.15625\pi, \zeta = 0.1)$$

図5 四次モーメントの非定常応答

とよく一致しているが、正規性を仮定する方法は大きな誤差を生じており、いき値レベルが高い所では十倍にも達する。図8にはいき値レベル B を2にしたときの両側初通過確率の時間的変化を示す。これも、本手法の結果がシミュレーションの結果とよく一致しており、正規性を仮定する方法は初通過確率を過大に評価している。

図9には、系の減衰比を $\zeta=0.05$ として狭帯域過程の場合について両側初通過確率の時間的変化を求めた結果を示す。ポアソン過程近似のために本手法の結果もシミュレーションの結果からずれているが、正規性を仮定する方法と比較すると本手法の優位性は明らかである。

5.2 非対称非線形系の場合

5.2.1 定常応答の平均いき値通過回数 対称非線形系の場合と同様に厳密解との比較をするために $\eta(t)=1$ のときの定常状態における単位時間当たりの平均いき値通過回数を求めた結果を図10に示す。非対称非線形系の場合も5.1.1項での結果と全く同様であ

る。

5.2.2 非定常応答のモーメントと初通過確率 図11, 12に x_1 の二次と三次のモーメントの非定常応答を示す。本手法の結果は二次と三次のモーメントの両方ともよくシミュレーションの結果と一致しているが、正規性を仮定する手法は、二次モーメントにおいてはそれほど大きな誤差が生じていないものの、三次モーメントにおいてはかなりの誤差が生じている。図13には $t=110$ での x_1 の周辺確率密度関数の結果を示す。図13から明らかなように、本手法の結果は応答のひずみをよく表している。

$$(\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \varepsilon_2=0.15625\pi, \zeta=0.1)$$

図6 $t=T$ における x_1 の周辺確率密度関数とシミュレーションから得られたヒストグラム

$$(\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \varepsilon_2=0.15625\pi, \zeta=0.1)$$

図7 $t=600$ における両側初通過確率

$$(\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \varepsilon_2=0.15625\pi, \zeta=0.1)$$

図8 $B=2$ のときの両側初通過確率の時間的変化

$$(\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \varepsilon_2=0.3215\pi, \zeta=0.05)$$

図9 $B=2$ のときの両側初通過確率の時間的変化

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \zeta=0.2)$$

図10 負側平均いき値通過回数

図14と図15に正側初通過確率と両側初通過確率を示す。負側初通過確率の結果は両側初通過確率の結果とほとんど同じである。本手法の結果はシミュレーションとよく一致しているが、正規性を仮定する方法は大きな誤差を生じており、両側の場合いき値レベルが高い所では十分の一以下にもなっている。これは、正規性を仮定する方法が平均値周りのひずみを考慮することができないために両側の平均的な統計量を与えるからである。

図16には、いき値レベル B を3にしたときの両側初通過確率の時間的変化を示す。これも、本手法の結

果がシミュレーションの結果とよく一致しており、正規性を仮定する方法は初通過確率を過小に評価していることがわかる。

図17には、いき値レベル B を上げて4にしたときの両側初通過確率の時間的変化を示す。正規性を仮定する方法と比較すると本手法の優位性は明らかであるが、本手法の結果もシミュレーションの結果から少しずれている。これは、ポアソン過程近似の観点からは精度が上がるはずだが、本手法で仮定された部分的正

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \zeta=0.05)$$

図11 二次モーメントの非定常応答

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \zeta=0.05)$$

図12 三次モーメントの非定常応答

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \zeta=0.05)$$

図13 $t=T$ における x_1 の周辺確率密度関数とシミュレーションから得られたヒストグラム

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \zeta=0.05)$$

図14 $t=600$ における正側初通過確率

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \zeta=0.05)$$

図15 $t=600$ における両側初通過確率

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \zeta=0.05)$$

図16 $B=3$ のときの両側初通過確率の時間的変化

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=\varepsilon_4=0.0, \zeta=0.05)$$

図 17 $B=4$ のときの両側初通過確率の時間的変化

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=0.4\sqrt{\pi}, \varepsilon_4=0.1\pi, \zeta=0.1)$$

図 18 $t=T$ における x_1 の周辺確率密度関数とシミュレーションから得られたヒストグラム

規確率密度関数は、厳密な確率密度関数が指数の負のより高いべきで零に収束するのに対して二乗のべきで収束するためと考えられる。

以上の結果はすべて減衰項が線形の場合である。減衰項が非線形でさらに非線形性が強い場合についても計算を行った。図 18 にその場合の確率密度の結果を示す。本手法はシミュレーションの結果とよく合っている。図 19, 20 にはこれに対応する正側と両側の初通過確率を示す。図 19, 20 から明らかのように、正規性を仮定する方法は極めて大きな誤差を生じている。

6. 結 言

本研究は、著者が提案する部分的正規確率密度関数を用いる手法を適用して非定常不規則入力を受ける非線形系の応答と初通過確率について考察した。対称非線形系に対しては本研究において新たに部分的確率密度を与えたが、非対称非線形系の場合と同様にモーメントおよび初通過確率において優れた推定精度を示し、本手法の有効性が確認された。

ポアソン過程近似によって得られる非線形系の初通過確率に関する結論を要約すると以下ようになる。

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=0.4\sqrt{\pi}, \varepsilon_4=0.1\pi, \zeta=0.1)$$

図 19 $t=600$ における正側初通過確率

$$(\varepsilon_1=0.25\sqrt{\pi}, \varepsilon_2=0.025\pi, \varepsilon_3=0.4\sqrt{\pi}, \varepsilon_4=0.1\pi, \zeta=0.1)$$

図 20 $t=600$ における両側初通過確率

(1) 確率密度の推定が初通過確率の算定に大きな影響を与える。特に、確率密度のすその部分の推定精度が重要である。

(2) 対称非線形系の場合、従来の応答の正規性を仮定する手法は、二次モーメントを比較的良好に推定できても初通過確率においては大きな誤差を生じる場合がある。硬化ばね特性のように確率密度のとがり度が小さくなる系に対しては初通過確率を過大に評価する。軟化ばね特性の場合はこの逆となることが推測される。

(3) 非対称非線形系の場合、応答の正規性を仮定する手法は、平均値周りで対称な確率密度となるために両側の平均的な統計量を与える。したがって、この手法は両側いき値通過問題を考察するかぎり初通過確率を極めて過小に評価し、危険側の評価を与えることが明らかとなった。

最後に、本研究の遂行に際し本学 下郷太郎教授ならびに本学大学院学生 田中正敏君に助力を得たことを記し、深く感謝する。

文 献

- (1) Crandall S. H., ほか 2 名, *Trans. ASME, Ser. E*, **33**-3 (1966), 532.
- (2) Vanmarke E. H., *Trans. ASME, Ser. E*, **42**-1 (1975), 215.
- (3) Cortis R. B., ほか 2 名, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Eng. Mech. Div.*, **98**-EM2 (1972), 401.
- (4) Roberts J. B., *J. Sound Vib.*, **8**-2 (1968), 301.
- (5) Roberts J. B., *AIAA J.*, **12**-12 (1974), 1636.
- (6) Roberts J. B., *J. Sound Vib.*, **46**-1 (1976), 1.
- (7) Roberts J. B., *J. Sound Vib.*, **56**-1 (1978), 71.
- (8) Lin Y. K., *AIAA J.*, **8**-4 (1970), 720.
- (9) Yang J. N. and Shinozuka M., *Trans. ASME, Ser. E*, **38**-4 (1971), 1017.
- (10) Krenk S., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **46**-9 (1979), 919.
- (11) Mason, Jr. A. B. and Iwan W. D., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **50**-3 (1983), 641.
- (12) 矢ヶ崎・ほか 2 名, 機論, **52**-474, C (昭 61), 631.
- (13) Lin, Y. K. (森ほか 5 名訳), 構造力学の確率論的方法, (昭 47), 306, 培風館.
- (14) Bolotin, V. V. (小林ほか 4 名訳), 構造設計の確率論的方法と信頼性問題, (昭 56), 189, 培風館.
- (15) 岩壺・ほか 2 名, 機論, **49**-440, C(昭 58), 573.
- (16) 青木, 鈴木, 機論, **49**-458, C(昭 59), 2021.
- (17) 木村・ほか 2 名, 機論, **52**-474, C(昭 61), 624.
- (18) 持尾, 機論, **49**-445, C(昭 58), 1455.
- (19) 吉田, 機論, **51**-472, C(昭 60), 3220.
- (20) 吉田, 文献(17)の 616 ページ.

討 論

〔質問〕 砂 原 善 文

〔京都工芸繊維大学工学学部〕

(1) 非定常不規則入力の数学モデルとして, 式(4)~(7)を採用されている。このモデルは妥当なものと考えられるが, 一方実際に発生する非定常不規則波形は実に数多く記録されている。ここで採用された数学モデルは, どのような分野の非定常不規則波形に対するものとして採用できるか, またその適用範囲は広いかどうか。

(2) 復原力と減衰力とがいずれも式(2)および式(3)で設定されている。いずれも全く同形の非線形特性であるが, 実際問題として両者同形の非線形特性はありうるか。特に減衰力非線形特性は復原力のそれとはかなり違ったものを設定しなければならない実例が多いのではなからうか。著者のお考えをお聞かせ願いたい。

〔回答〕 (1) 本研究で採用した非定常不規則波の数学モデルは, 地震に対する最も簡単な数学モデルとして耐震工学の分野ではよく使われるモデルである。このモデルは, 周波数成分の有色性とその非定常性などは考慮しておらず, 実際の問題の定量的な応答計算においてはその適用範囲が限定されることはいうまでもない。しかしながら, 確率密度のひずみやとがりの変化として現れる非線形特性が応答と初通過確率に及ぼす影響と, 現在でもよく使われている正規確率密度関数を仮定する手法の問題点とを調べるのが本研究の主な目的であったので, その意味においては十分な数学モデルと思っている。なお, より実際の地震波に近い数学モデルについては現在検討中である。

(2) 本研究の数値計算においては式(2), (3)に

対応する非線形特性の場合しか示さなかったもので, 基礎式においても非線形特性を式(2), (3)に限定した。しかしながら, 本研究で提案している手法は一つの Fokker-Planck 方程式の近似解法であり, 非線形特性は式(2), (3)に限定されない。したがって, 復原力と減衰力の非線形特性が同形でないご指摘の場合についても本手法を適用することができる。(1)のご質問の回答においても述べたように, 本研究の目的からすれば式(2), (3)の非線形特性によって本研究の目的が十分達成されていると思う。

〔質問〕 木 村 康 治〔東京工業大学〕

ブラウン運動過程 $\gamma(t)$ の性質として, 式(9), (10)を挙げておられるが, $S(t)$ が定数でない場合には, 式(10)は相関関数の対称性の性質を満たさないように思われる。確率微分方程式として表す場合, インテンシティ $S(t)$ については, ブラウン運動過程の係数, たとえば $\eta(t)$ [式(7)より, $\eta(t) = \sqrt{\pi S(t)/2\xi}$] として導入するのが一般的と思われる。以上の点についてお考えを伺いたい。

〔回答〕 ご質問の趣旨からすると, ご提言のようにインテンシティを設定しても同じ問題が生じると思う。一般的表現は, 本研究の場合式(8)の第2項を $\{0, \eta(t)\}^T d\gamma$ として, $S(t) = 2\xi/\pi$ とする表現だと思う。本研究の結果はこの場合に対応している。式(4), (5)に対応した表現をするために式(9), (10)のような表現をした。伊藤の確率積分の定義からすると, 式(10)において $S(t)$ として $t > \tau$ の場合だけ $S(\tau)$ とすれば問題ないように思われるが, 表現に適切さを欠いたことには変わりなく, ご指摘に感謝する。