機構設計用シミュレーション・システム*

(第2報, 機構の運動解析)

黒岩 正** 本江 明**
平岡 克己** 高原 弘樹***

Simulation System of Design for Link Mechanism
(2nd Report, Kinematic Analysis for Mechanism)

Tadashi KUROIWA, Akira MOTOE,
Katsumi HIRAOKA, and Hiroki TAKAHARA

A method for the analysis of displacement, velocity and acceleration of an arbitrary mechanism is presented by using kinematic loops proposed in the preceding paper (1st Report). Furthermore, the forces and torques acting on joints are analyzed numerically. The equations of motion are derived from the Newton-Euler method. The recurrence relations are introduced to reduce the computing time. The proposed method is applied to an industrial robot including the closed loop, and proves to be an analysis with a high accuracy.

Key Words: Mechanism, Kinematics, Robot, Manipulator, Linkages, Simulation, Equation of Motion, Force, CAE, Open Loop, Closed Loop

1. ま え が き

ロボット, マニピュレータ等をはじめとする各種の機構の設計においては, その運動学的特性はもちろんのこと, 静・動特性, さらに制御系まで含めた特性の把握が重要となってきた。一般に, 機構の特性を記述する方程式は, 非常に非線形性や変数間の干渉が強い連立微分方程式系となる。そのため, これらを自動的に構成して解析を行うシステムを含んだ, CAE (Computer Aided Engineering) システムの開発が必要となってきた。

機構のシミュレーションでは, ジョイントの変位, 速度, 加速度を与えてジョイントに働く力, モーメントを求める運動解析, 逆に, ジョイントに働く力, モーメントを与えてジョイントの変位, 速度, 加速度等を求める応答・振動解析, 外力等が作用した場合の静的平衡位置を求める静解析等を行う必要がある。特に

運動解析においては, 上述の順問題の他に, リンクの通るべき軌道があらかじめ与えられ, それをジョイントの変位等に変換する逆問題を解かねばならない場合も多い。また, 解析の対象とする機構の構造としては, 四節リンクをはじめとする閉ループ機構, 産業用ロボットに代表されるような多自由度の開ループ機構, 手のように枝分れの構造をもつ機構, その他これらの混合タイプの機構も考慮しなければならない。

汎用の機構解析プログラムとしては, Uicker らによる IMP があげられる^{(1)~(3)}。IMP では, 開ループ機構を直接扱うことはできない。一方, ロボット等のように枝分れのない開ループ機構を対象に限ったシミュレーション・システムの開発も多く行われている^{(4)~(7)}。また, 開ループおよび閉ループ機構の両方を対象とするため, IMP を改良したもの^{(8)~(10)}, 開ループ機構の解析法に Lagrange 乗数を付加して閉ループ機構の解析法へ拡張したもの⁽¹¹⁾等が報告されている。

本シミュレーション・システムでは, 第1報⁽¹²⁾で報告した運動ループを用いることにより, 任意の開ループおよび閉ループを含む機構の, 順問題および逆問題の両方の解析を行うことができる。以下では, 上述のシステムの運動解析の手法について示す。

* 昭和61年10月7日 第64期全国大会講演会において講演, 原稿受付 昭和61年3月31日。

** 正員, (株)東芝総合研究所 (〒210 川崎市川崎区浮島町4-1)。

*** (株)東芝総合研究所。

$$T_m = \begin{bmatrix} \cos\theta_m \cos\phi_m & -\cos\theta_m \sin\phi_m & \sin\theta_m & x_m \\ \sin\psi_m \sin\theta_m \cos\phi_m + \cos\psi_m \sin\phi_m & -\sin\psi_m \sin\theta_m \sin\phi_m + \cos\psi_m \cos\phi_m & -\sin\psi_m \cos\theta_m & y_m \\ -\cos\psi_m \sin\theta_m \cos\phi_m + \sin\psi_m \sin\phi_m & \cos\psi_m \sin\theta_m \sin\phi_m + \sin\psi_m \cos\phi_m & \cos\psi_m \cos\theta_m & z_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

2. 位置・速度・加速度解析

2.1 座標系と座標変換行列 座標系として、空間固定の全体座標系 Σ_W と、リンク L_m 上の局所座標系 Σ_m を定義する。また、ジョイント J_j について、リンク L_m 上に固定された局所座標系を Σ_{L_m, J_j} で表す。各座標系は、XYZ 右手直交座標系を用いる。

各座標系間の変換は、回転と並進とを同時に表せる 4 行 4 列の座標変換行列を用いる⁽³⁾。 Σ_W から Σ_m への座標変換行列 T_m は、 Σ_W で表した Σ_m の原点の座標 (x_m, y_m, z_m) と、 Σ_m での Yaw 角 ψ_m , Pitch 角 θ_m , Roll 角 ϕ_m を用いて、図 1 および式(1)のように表される。また、 Σ_m から Σ_{L_m, J_j} への座標変換行列 B_{L_m, J_j} も同様に表される。

ジョイント J_j がリンク L_{m-1} と L_m との間で相対運動を行う場合、 J_j における座標変換行列 P_j は、相対変位を q_j とすると、式(2)のように表される。

(Z 軸まわりの回転ジョイントの場合)

$$P_j = \begin{bmatrix} \cos q_j & -\sin q_j & 0 & 0 \\ \sin q_j & \cos q_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2 \cdot a)$$

(並進ジョイントの場合)

$$P_j = \begin{bmatrix} 1 & q_j \vec{d}_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2 \cdot b)$$

上式で、 $\vec{d}_j$ は、回転軸または並進方向を表す軸(以

下では変位軸と呼ぶ)を表すベクトルで、次式で定義される。なお、 I は、3 次の単位行列である。

$$\vec{d}_j = \begin{cases} (1, 0, 0)^T: \text{変位軸が X 軸} \\ (0, 1, 0)^T: \text{変位軸が Y 軸} \\ (0, 0, 1)^T: \text{変位軸が Z 軸} \end{cases} \quad (3)$$

2.2 開ループ・順問題 機構に含まれる開ループは、図 2 に示すように、空間固定のベース・リンク、または、ジョイントが 3 個以上つながっている分岐リンク L_0 から始まり、自由端リンク、または、開ループ分岐リンク L_λ で終わる形になる⁽²⁾。

T_m およびその時間微分 $\dot{T}_m$, $\ddot{T}_m$ ($m=1, \dots, \lambda$) は、以下に示す漸化式により求められる。

$$T_m = T_{m-1} B_{L_{m-1}, J_m} P_m B_{L_m, J_m}^{-1} \quad (4)$$

$$\dot{T}_m = \dot{T}_{m-1} B_{L_{m-1}, J_m} P_m B_{L_m, J_m}^{-1} + T_{m-1} \dot{B}_{L_{m-1}, J_m} P_m B_{L_m, J_m}^{-1} \dot{q}_m \quad (5)$$

$$\ddot{T}_m = \ddot{T}_{m-1} B_{L_{m-1}, J_m} P_m B_{L_m, J_m}^{-1} + 2 \dot{T}_{m-1} \dot{B}_{L_{m-1}, J_m} P_m B_{L_m, J_m}^{-1} \dot{q}_m + T_{m-1} \ddot{B}_{L_{m-1}, J_m} P_m B_{L_m, J_m}^{-1} \dot{q}_m^2 + T_{m-1} \dot{B}_{L_{m-1}, J_m} P_m \ddot{B}_{L_m, J_m}^{-1} \dot{q}_m \quad (6)$$

上式で、

$$P_m' = dP_m / dq_m \quad (7)$$

$$P_m'' = d^2 P_m / dq_m^2 \quad (8)$$

また、 $\dot{q}_m (= dq_m / dt)$, $\ddot{q}_m (= d^2 q_m / dt^2)$ は、それぞれ、ジョイント J_m の速度、加速度である。

なお、 T_m , $\dot{T}_m$, $\ddot{T}_m$ は、ベース・リンク側から順に計算するので、 T_0 , $\dot{T}_0$, $\ddot{T}_0$ の値は既に求まっている。

図 1 座標変換

図 2 単純な開ループ機構

図 3 単純な閉ループ機構

ただし、リンク L_0 がベース・リンクの場合、 T_0 は定数行列として与えられ、 $\dot{T}_0 = \ddot{T}_0 = 0$ である。

2.3 閉ループ・順問題 機構に含まれる閉ループの一個を取り出すと、図3に示すように、分岐リンク L_0 から始まり、再び L_0 へ戻る形になる¹²。ある機構が閉ループとなる場合、その閉ループに含まれるジョイントの変位、速度、加速度間には、拘束条件が成り立つ。従って、駆動機構をもつ駆動ジョイントの変位等が既知であれば、上述の拘束条件を満足するように残りの未知ジョイントの変位等を計算することができる⁽²⁾。

2.3.1 拘束条件 ジョイント変位について、次式が満足されなければならない。

$$B_{L_0, J_1} P_1 A_1 \cdots A_{\lambda-1} P_\lambda B_{L_0, J_\lambda}^{-1} = I \quad (9)$$

上式で、

$$A_m = B_{L_m, J_m}^{-1} B_{L_m, J_{m+1}} \quad (m=1, \dots, \lambda) \quad (10)$$

なお、 I は、4 次の単位行列である。

同様に、ジョイント速度、加速度については、式(9)を時間微分した式が満足されなければならない。

$$\sum_{m=1}^{\lambda} (\bar{C}_m \dot{q}_m) = 0 \quad (11)$$

$$\sum_{m=1}^{\lambda} (\bar{C}_m \ddot{q}_m + \dot{\bar{C}}_m \dot{q}_m) = 0 \quad (12)$$

上式で、

$$\bar{C}_m = \bar{S}_m P_m' \bar{W}_m \quad (m=1, \dots, \lambda) \quad (13)$$

$$\dot{\bar{C}}_m = \{ (\dot{\bar{S}}_m P_m' - \bar{C}_m \dot{\bar{W}}_m^{-1}) + (\bar{S}_m P_m'') \} \dot{\bar{W}}_m \quad (m=1, \dots, \lambda) \quad (14)$$

$$\bar{S}_m = \begin{cases} B_{L_0, J_1} & (m=1) \\ \bar{S}_{m-1} P_{m-1} A_{m-1} & (m=2, \dots, \lambda) \end{cases} \quad (15)$$

$$\bar{W}_m = \begin{cases} B_{L_0, J_\lambda}^{-1} & (m=\lambda) \\ A_m P_{m+1} \bar{W}_{m+1} & (m=\lambda-1, \dots, 1) \end{cases} \quad (16)$$

$$\dot{\bar{S}}_m = \begin{cases} 0 & (m=1) \\ \dot{\bar{W}}_{m-1}^{-1} A_{m-1} & (m=2; \dots, \lambda) \end{cases} \quad (17)$$

$$\dot{\bar{W}}_m^{-1} = \dot{\bar{S}}_m P_m + \bar{S}_m P_m' \dot{q}_m \quad (m=1, \dots, \lambda) \quad (18)$$

2.3.2 解法 λ 個のジョイント J_m ($m=1, \dots, \lambda$) のうち、 $m=D_k$ ($k=1, \dots, \lambda_D$) を駆動ジョイント、 $m=U_k$ ($k=1, \dots, \lambda_U$, $\lambda_U = \lambda - \lambda_D$) を未知ジョイントとする。

a. 変位 式(9)を線形化した式を用いて、収束計算することにより数値的に求める。

ジョイント変位 q_m の近似値を $\tilde{q}_m$ 、真の値との誤差を dq_m とおくと、次式が成り立つ。

$$q_m = \tilde{q}_m + dq_m \quad (m=1, \dots, \lambda) \quad (19)$$

P_m は q_m のみの関数であるから、 P_m を $q_m = \tilde{q}_m$

において Taylor 展開し、2 次以上の項を省略すると次のようになる。

$$P_m(q_m) = \tilde{P}_m + P_m' dq_m \quad (m=1, \dots, \lambda) \quad (20)$$

上式で、

$$\tilde{P}_m = P_m(\tilde{q}_m) \quad (m=1, \dots, \lambda) \quad (21)$$

$$\tilde{P}_m' = \left. \frac{dP_m}{dq_m} \right|_{q_m = \tilde{q}_m} \quad (m=1, \dots, \lambda) \quad (22)$$

式(20)～(22)を式(9)に代入し、 dq_m の2次以上の項を省略して整理すると、次のようになる。

$$\sum_{m=1}^{\lambda} (\tilde{C}_m dq_m) = I - E \quad (23)$$

上式で、 $\tilde{C}_m$ は、式(13)、(15)、(16)において、 $P_m = \tilde{P}_m$ 、 $P_m' = \tilde{P}_m'$ とおいた場合の $\bar{C}_m$ の近似値である。また、 E は誤差行列で、次式で計算される。

$$E = B_{L_0, J_1} \tilde{P}_1 A_1 \cdots A_{\lambda-1} \tilde{P}_\lambda B_{L_0, J_\lambda}^{-1} \quad (24)$$

変位が既知の駆動ジョイントについては、

$$\tilde{q}_{D_k} = q_{D_k} \quad (k=1, \dots, \lambda_D) \quad (25)$$

$$dq_{D_k} = 0 \quad (k=1, \dots, \lambda_D) \quad (26)$$

とおけるから、式(23)は次式に書き換えられる。

$$\sum_{k=1}^{\lambda_U} (\tilde{C}_{U_k} dq_{U_k}) = I - E \quad (27)$$

式(27)の両辺の第1～3行の成分について比較した式を行列の形で表すと、次式のようになる。

$$\tilde{M} \vec{q}_U = \vec{e} \quad (28)$$

上式で、 $\tilde{M}$ は 12 行 λ_U 列の行列、 $\vec{q}_U$ は λ_U 次元の未知変位ベクトル、 $\vec{e}$ は 12 次元の誤差ベクトルで、成分を次式に示す。なお、行列 $\tilde{C}_{U_k}$ 、 E の第 i 行 j 列成分を、それぞれ $\tilde{C}_{U_k i, j}$ 、 E_{ij} で表している。

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{U111} & \cdots & \tilde{C}_{Uk11} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U11} \\ \tilde{C}_{U121} & \cdots & \tilde{C}_{Uk21} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U21} \\ \tilde{C}_{U131} & \cdots & \tilde{C}_{Uk31} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U31} \\ \tilde{C}_{U112} & \cdots & \tilde{C}_{Uk12} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U12} \\ \tilde{C}_{U122} & \cdots & \tilde{C}_{Uk22} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U22} \\ \tilde{C}_{U132} & \cdots & \tilde{C}_{Uk32} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U32} \\ \tilde{C}_{U113} & \cdots & \tilde{C}_{Uk13} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U13} \\ \tilde{C}_{U123} & \cdots & \tilde{C}_{Uk23} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U23} \\ \tilde{C}_{U133} & \cdots & \tilde{C}_{Uk33} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U33} \\ \tilde{C}_{U114} & \cdots & \tilde{C}_{Uk14} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U14} \\ \tilde{C}_{U124} & \cdots & \tilde{C}_{Uk24} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U24} \\ \tilde{C}_{U134} & \cdots & \tilde{C}_{Uk34} & \cdots & \tilde{C}_{U\lambda_U34} \end{bmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} 1 - E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{12} \\ 1 - E_{22} \\ E_{32} \\ E_{13} \\ E_{23} \\ 1 - E_{33} \\ E_{14} \\ E_{24} \\ E_{34} \end{bmatrix} \quad (29) \quad (30)$$

$$\vec{q}_U = (dq_{U1}, \dots, dq_{Uk}, \dots, dq_{U\lambda_U})^T \quad (31)$$

$\vec{e}$ が十分小さく、 $\vec{e} = \vec{0}$ とみなせれば、その時の近似値 $\tilde{q}_{U_k}$ を、未知であったジョイント変位 q_{U_k} の真値とする。この結果、すべてのジョイント変位が求まり、

$$P_m = \tilde{P}_m \quad (32)$$

$$P_m' = \tilde{P}_m' \quad (33)$$

$$\tilde{C}_m = \tilde{C}_m \quad (34)$$

$$M = \tilde{M} \quad (35)$$

となる。 $\vec{e} = \vec{0}$ とみなせない場合、式(28)はそのまま解けないので、次式に示す最小二乗推定を用いて、

$\vec{q}_{U_k}$ の新しい近似値を求める。

$$\vec{q}_{U_k} = (\tilde{M}^T \tilde{M})^{-1} \tilde{M}^T \vec{e} \quad (36)$$

なお、 $(\tilde{M}^T \tilde{M})$ は、正則とする。式(36)から $d\vec{q}_{U_k}$ が求まるので、

$$\vec{q}_{U_k}^{\text{new}} = \vec{q}_{U_k}^{\text{old}} + d\vec{q}_{U_k} \quad (k=1, \dots, \lambda_U) \quad (37)$$

と置き換えて、再び上述の計算を行う。

b. 速度 式(11)の左辺の $\dot{\vec{q}}_m$ についての和を、既知なものと未知なものに分けて整理すると、次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{\lambda_U} (\tilde{C}_{U_k} \dot{\vec{q}}_{U_k}) = E_V \quad (38)$$

$$E_V = - \sum_{k=1}^{\lambda_D} (\tilde{C}_{D_k} \dot{\vec{q}}_{D_k}) \quad (39)$$

式(38)の両辺の第1～3行の成分について比較した式を行列の形で表すと、次式のようになる。

$$M \vec{q}_V = \vec{e}_V \quad (40)$$

次式で表される未知速度ベクトル $\vec{q}_V$

$$\vec{q}_V = (\dot{\vec{q}}_{U_1}, \dots, \dot{\vec{q}}_{U_k}, \dots, \dot{\vec{q}}_{U_{\lambda_U}})^T \quad (41)$$

は、最小二乗推定により求められる。

$$\vec{q}_V = (M^T M)^{-1} M^T \vec{e}_V \quad (42)$$

なお、 $\vec{e}_V$ の成分は、行列 E_V の第*i*行*j*列成分を

E_{Vij} とすると、次式で表される。

$$\vec{e}_V = (E_{V11}, E_{V21}, E_{V31}, E_{V12}, E_{V22}, E_{V32}, E_{V13}, E_{V23}, E_{V33}, E_{V14}, E_{V24}, E_{V34})^T \quad (43)$$

c. 加速度 速度の場合と同様に、式(12)を整理すると、次のようになる。

$$\sum_{k=1}^{\lambda_U} (\tilde{C}_{U_k} \ddot{\vec{q}}_{U_k}) = E_A \quad (44)$$

$$E_A = - \sum_{k=1}^{\lambda_D} (\tilde{C}_{D_k} \ddot{\vec{q}}_{D_k}) - \sum_{m=1}^{\lambda} (\tilde{C}_m \ddot{\vec{q}}_m) \quad (45)$$

式(44)の両辺の第1～3行の成分について比較した式を行列の形で表すと、次式のようになる。

$$M \vec{q}_A = \vec{e}_A \quad (46)$$

次式で表される未知加速度ベクトル $\vec{q}_A$

$$\vec{q}_A = (\ddot{\vec{q}}_{U_1}, \dots, \ddot{\vec{q}}_{U_k}, \dots, \ddot{\vec{q}}_{U_{\lambda_U}})^T \quad (47)$$

は、最小二乗推定により求められる。

$$\vec{q}_A = (M^T M)^{-1} M^T \vec{e}_A \quad (48)$$

なお、 $\vec{e}_A$ の成分は、行列 E_A の第*i*行*j*列成分を

E_{Aij} とすると、次式で表される。

$$\vec{e}_A = (E_{A11}, E_{A21}, E_{A31}, E_{A12}, E_{A22}, E_{A32}, E_{A13}, E_{A23}, E_{A33}, E_{A14}, E_{A24}, E_{A34})^T \quad (49)$$

なお、行列 $\tilde{M}$, M , ベクトル $\vec{q}_U$, $\vec{q}_V$, $\vec{q}_A$ の成分のうち、長さの次元をもつ第10～12行については、数値計算上の精度を向上するため、リンクの代表長さを用いて正規化している。

以上で閉ループ部分のすべてのジョイントの変位、速度、加速度が求まったので、開ループの場合と同様に、 T_m , $\dot{T}_m$, $\ddot{T}_m$ を計算する。

2.3.3 多重閉ループ 定義された機構の中に閉ループが複数個存在する場合も、同様に計算する。

この場合、式(9), (11), (12)が閉ループの個数だけ成り立つから、 $\tilde{M}$, M の行の数、および $\vec{e}$, $\vec{e}_V$, $\vec{e}_A$ の次元は、(閉ループの数)×12となり、 $\tilde{M}$, M の列の数、および $\vec{q}_U$, $\vec{q}_V$, $\vec{q}_A$ の次元は、定義された機構に含まれるすべての未知ジョイントの数となる。

2.4 逆問題 あるリンク上の点の通るべき軌道が与えられているときに、ジョイントの変位を逆算する逆問題では、 Σ_W と、軌道が拘束されているリンクとの間に仮想的なジョイントを挿入して、閉ループ・順問題として定式化する。すなわち、 Σ_W で表したリンクの位置 x_{BW} , y_{BW} , z_{BW} と、Yaw角 ψ_{BW} , Pitch角 θ_{BW} , Roll角 ϕ_{BW} を、それぞれ、仮想的に挿入されたX, Y, Z方向の並進ジョイント、およびX, Y, Z軸まわりの回転ジョイントの変位とする。

2.5 全体座標系での表示 運動解析結果として機構の形状を図形表示する場合、全体座標系 Σ_W で表したリンクの位置等を求める必要がある。

リンク L_m 上に点 P_P があるとき、 Σ_m で表した点 P_P の位置ベクトルを

$$\vec{r}_P = (x_P, y_P, z_P, 1)^T \quad (50)$$

とすると、 Σ_W で表した点 P_P の位置 $\vec{r}_P^W$, 速度 $\dot{\vec{r}}_P^W$, 加速度 $\ddot{\vec{r}}_P^W$ は、それぞれ、次式で求められる。

$$\vec{r}_P^W = T_m \vec{r}_P \quad (51)$$

$$\dot{\vec{r}}_P^W = \dot{T}_m \vec{r}_P \quad (52)$$

$$\ddot{\vec{r}}_P^W = \ddot{T}_m \vec{r}_P \quad (53)$$

3. 角速度・角加速度解析

リンク L_m の角速度、角加速度は、局所座標系で表す。 Σ_m で表したリンク L_m の角速度ベクトル $\vec{\omega}_m$, 角加速度ベクトル $\vec{\beta}_m$ ($m=1, \dots, \lambda$)は、次式で求められる。

$$\vec{\omega}_m^W = \vec{\omega}_{m-1}^W + T_m B_{L_m, J_m} \dot{\vec{\alpha}}_m \quad (54)$$

$$\vec{\omega}_m = T_m^T \vec{\omega}_m^W \quad (55)$$

$$\vec{\beta}_m^W = \vec{\beta}_{m-1}^W + \dot{T}_m B_{L_m, J_m} \dot{\vec{\alpha}}_m + T_m B_{L_m, J_m} \ddot{\vec{\alpha}}_m \quad (56)$$

$$\vec{\beta}_m = T_m^T (\vec{\beta}_m^W - \dot{T}_m \vec{\omega}_m^W) \quad (57)$$

上式で、 $\dot{\vec{\alpha}}_m$, $\ddot{\vec{\alpha}}_m$ は、ジョイントの角速度、角加速度

で、次のようになる。

$$(\text{回転ジョイントの場合}) : \dot{\vec{\alpha}}_m = \dot{q}_m \vec{d}_m \quad (58)$$

$$\dot{\vec{\alpha}}_m = \dot{q}_m \vec{d}_m \quad (59)$$

$$(\text{並進ジョイントの場合}) : \dot{\vec{\alpha}}_m = \dot{\vec{\alpha}}_m = \vec{0} \quad (60)$$

また、行列 T_m , $\dot{T}_m$, B_{L_m} , J_m は、回転を表す3行3列の部分のみを用いる。

なお、角速度、角加速度は、ベース・リンク側から順に計算するので、 $\vec{\omega}_0^W$, $\vec{\beta}_0^W$ の値は既に求まっている。ただし、リンク L_0 がベース・リンクの場合、 $\vec{\omega}_0^W = \vec{\beta}_0^W = \vec{0}$ である。

4. 力解析

力解析では、各ジョイントの変位、速度、加速度が与えられたときに、それらに働く力、モーメントを求める。

4.1 力、モーメントの定義

4.1.1 ジョイントに働く力、モーメント ジョイント J_m がリンク L_{m-1} と L_m との間に定義されている場合、 J_m に働く力 $\vec{F}_{J_m}$ 、モーメント $\vec{M}_{J_m}$ は、局所座標系 Σ_{L_{m-1}, J_m} で表される。力解析では、 $\vec{F}_{J_m}$ と $\vec{M}_{J_m}$ とが未知数となる。

4.1.2 ジョイントのバネに働く力、モーメント

ジョイント J_m のバネのバネ定数を k_m 、その自然長を q_{0m} 、ダンパのダンピング定数を c_m とすると、 J_m のバネに働く力 $\vec{F}_{K_m}$ 、ダンパに働く力 $\vec{F}_{C_m}$ 、バネに働くモーメント $\vec{M}_{K_m}$ 、ダンパに働くモーメント $\vec{M}_{C_m}$ は、それぞれ、次のようになる。

(回転ジョイントの場合)

$$\vec{F}_{K_m} = \vec{F}_{C_m} = \vec{0} \quad (61)$$

$$\vec{M}_{K_m} = k_m(q_m - q_{0m}) \vec{d}_m \quad (62)$$

$$\vec{M}_{C_m} = c_m \dot{q}_m \vec{d}_m \quad (63)$$

(並進ジョイントの場合)

$$\vec{F}_{K_m} = k_m(q_m - q_{0m}) \vec{d}_m \quad (64)$$

$$\vec{F}_{C_m} = c_m \dot{q}_m \vec{d}_m \quad (65)$$

$$\vec{M}_{K_m} = \vec{M}_{C_m} = \vec{0} \quad (66)$$

4.1.3 リンクに作用する外力 リンク L_m に作用する外力、外モーメントは、リンク L_m の重心 G_m に作用する等価な外力、外モーメントに置き換えられる。それらを、局所座標系 Σ_m の原点を G_m に平行移動した G_m 上の局所座標系 Σ_{G_m} で表したものを、それぞれ、 $\vec{f}_{G_m}$, $\vec{n}_{G_m}$ とする。

4.2 リンクの運動方程式 リンクの運動方程式は、 Σ_{G_m} で求める。なお、定式化は、計算時間が短くなる Newton-Euler 法^{(4), (7)} による。

$$\vec{F}_{L_m} = \sum_{j \text{ for } L_m} \{Q_{L_m, J_j}(\vec{F}_{J_j} + \vec{F}_{K_j} + \vec{F}_{C_j})\} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{L_m} = & \sum_{j \text{ for } L_m} \{Q_{L_m, J_j}(\vec{M}_{J_j} + \vec{M}_{K_j} + \vec{M}_{C_j}) \\ & + \vec{s}_{G_m, J_j} \times \{Q_{L_m, J_j}(\vec{F}_{J_j} \\ & + \vec{F}_{K_j} + \vec{F}_{C_j})\}\} \end{aligned} \quad (68)$$

ただし、

$$\vec{F}_{L_m} = m_m \vec{T}_m^T (\vec{r}_{G_m}^W - \vec{g}^W) - \vec{f}_{G_m} \quad (69)$$

$$\vec{M}_{L_m} = I_{G_m} \vec{\beta}_m^W + \vec{\omega}_m \times (I_{G_m} \vec{\omega}_m) - \vec{n}_{G_m} \quad (70)$$

上式で、 m_m はリンク L_m の質量、 I_{G_m} は Σ_{G_m} で表したリンク L_m の重心 G_m まわりの慣性テンソル、 $\vec{g}^W$ は Σ_W で表した重力ベクトルである。また、 $\vec{r}_{G_m}^W$ は Σ_W で表した重心 G_m の加速度で、 Σ_m で表した G_m の位置ベクトルを $\vec{r}_{G_m}$ とすると、式(53)から、次のように求められる。

$$\vec{r}_{G_m}^W = \ddot{T}_m \vec{r}_{G_m} \quad (71)$$

ジョイント J_j がリンク L_ℓ と L_k とを結んでいるとすると、行列 Q_{L_i, J_j} 、ベクトル $\vec{s}_{G_i, J_j}$ ($i = \ell, k$) は、

それぞれ、次式で定義される。

$$Q_{L_\ell, J_j} = B_{L_\ell, J_j} \quad (72)$$

$$Q_{L_k, J_j} = -B_{L_k, J_j} P_j^{-1} \quad (73)$$

$$\vec{s}_{G_\ell, J_j} = Q_{L_\ell, J_j} (0, 0, 0, 1)^T - \vec{r}_{G_\ell} \quad (74)$$

$$\vec{s}_{G_k, J_j} = -Q_{L_k, J_j} (0, 0, 0, 1)^T - \vec{r}_{G_k} \quad (75)$$

なお、式(67)～(69)の計算では、行列 Q_{L_m, J_j} , T_m は、回転を表す3行3列の部分のみを用いる。

4.3 開ループ・力解析 開ループの力解析では、位置解析等とは逆に、自由端リンク側のリンク L_λ から、ベース・リンク側のリンク L_1 の順に、ジョイントに働く力 $\vec{F}_{J_m}$ 、モーメント $\vec{M}_{J_m}$ を計算する。

リンク L_λ が自由端リンクの場合(図4参照)、ジョイント J_λ に働く力 $\vec{F}_{J_\lambda}$ 、モーメント $\vec{M}_{J_\lambda}$ は、式(67)、(68)から、次式で求められる。

$$\vec{F}_{J_\lambda} = Q_{L_\lambda, J_\lambda}^T \vec{F}_{L_\lambda} - \vec{F}_{K_\lambda} - \vec{F}_{C_\lambda} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{J_\lambda} = & Q_{L_\lambda, J_\lambda}^T (\vec{M}_{L_\lambda} - \vec{s}_{G_\lambda, J_\lambda} \times \vec{F}_{L_\lambda}) \\ & - \vec{M}_{K_\lambda} - \vec{M}_{C_\lambda} \end{aligned} \quad (77)$$

リンク L_λ が開ループ・分岐リンクの場合(図5参照)、ベース・リンク側のジョイント J_λ に働く力 $\vec{F}_{J_\lambda}$ 、モーメント $\vec{M}_{J_\lambda}$ は、式(67)、(68)から、次式で求められる。なお、 J_λ 以外のジョイントは、 J_{j_1} , J_{j_2} , ... に働く力、モーメントの値は、既に計算されている。

$$\begin{aligned} \vec{F}_{J_\lambda} = & Q_{L_\lambda, J_\lambda}^T [\vec{F}_{L_\lambda} - \sum_{j \text{ for } L_\lambda} \{Q_{L_\lambda, J_j}(\vec{F}_{J_j} \\ & + \vec{F}_{K_j} + \vec{F}_{C_j})\}] - \vec{F}_{K_\lambda} - \vec{F}_{C_\lambda} \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{J_\lambda} = & Q_{L_\lambda, J_\lambda}^T (\vec{M}_{L_\lambda} - \vec{s}_{G_\lambda, J_\lambda} \times \vec{F}_{L_\lambda} \\ & - \sum_{j \text{ for } L_\lambda} \{(\vec{s}_{G_\lambda, J_j} - \vec{s}_{G_\lambda, J_\lambda}) \\ & \times \{Q_{L_\lambda, J_j}(\vec{F}_{J_j} + \vec{F}_{K_j} + \vec{F}_{C_j})\} \\ & + Q_{L_\lambda, J_j}(\vec{M}_{J_j} + \vec{M}_{K_j} + \vec{M}_{C_j})\}) \\ & - \vec{M}_{K_\lambda} - \vec{M}_{C_\lambda} \end{aligned} \quad (79)$$

閉ループ・中間リンク L_m に、ジョイント J_m (ベース・リンク側) および J_{m+1} (自由端リンク側) がつながっているとき (図6参照), $\vec{F}_{J_m}$, $\vec{M}_{J_m}$ は、式(67), (68) から、次式で求められる。

$$\vec{F}_{J_m} = Q_{L_m, J_m}^T \{ \vec{F}_{L_m} - Q_{L_m, J_{m+1}} (\vec{F}_{J_{m+1}} + \vec{F}_{K_{m+1}} + \vec{F}_{C_{m+1}}) \} - \vec{F}_{K_m} - \vec{F}_{C_m} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{J_m} = & Q_{L_m, J_m}^T \{ \vec{M}_{L_m} - \vec{s}_{G_m, J_m} \times \vec{F}_{L_m} \\ & - (\vec{s}_{G_m, J_{m+1}} - \vec{s}_{G_m, J_m}) \\ & \times \{ Q_{L_m, J_{m+1}} (\vec{F}_{J_{m+1}} + \vec{F}_{K_{m+1}} + \vec{F}_{C_{m+1}}) \} \\ & - Q_{L_m, J_{m+1}} (\vec{M}_{J_{m+1}} + \vec{M}_{K_{m+1}} + \vec{M}_{C_{m+1}}) \} \\ & - \vec{M}_{K_m} - \vec{M}_{C_m} \end{aligned} \quad (81)$$

4.4 閉ループ・力解析 閉ループの力解析では、その閉ループに含まれるすべてのジョイントに働く力、モーメントを、それらを未知数とする連立方程式を解くことにより求める。

4.4.1 連立方程式の構成 リンク L_m が閉ループ・中間リンクの場合 (図6参照), ジョイント J_m , J_{m+1} に作用する力、モーメント $\vec{F}_{J_m}$, $\vec{F}_{J_{m+1}}$, $\vec{M}_{J_m}$, $\vec{M}_{J_{m+1}}$ に関する式は、式(67), (68) から、次のようになる。

$$\begin{aligned} Q_{L_m, J_m} \vec{F}_{J_m} + Q_{L_m, J_{m+1}} \vec{F}_{J_{m+1}} \\ = \vec{F}_{L_m} - Q_{L_m, J_m} (\vec{F}_{K_m} + \vec{F}_{C_m}) \\ - Q_{L_m, J_{m+1}} (\vec{F}_{K_{m+1}} + \vec{F}_{C_{m+1}}) \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} Q_{L_m, J_m} \vec{M}_{J_m} + X_{G_m, J_m} \vec{F}_{J_m} \\ + Q_{L_m, J_{m+1}} \vec{M}_{J_{m+1}} + X_{G_m, J_{m+1}} \vec{F}_{J_{m+1}} \\ = \vec{M}_{L_m} - Q_{L_m, J_m} (\vec{M}_{K_m} + \vec{M}_{C_m}) - Q_{L_m, J_{m+1}} \\ (\vec{M}_{K_{m+1}} + \vec{M}_{C_{m+1}}) - X_{G_m, J_m} (\vec{F}_{K_m} + \vec{F}_{C_m}) \\ - X_{G_m, J_{m+1}} (\vec{F}_{K_{m+1}} + \vec{F}_{C_{m+1}}) \end{aligned} \quad (83)$$

リンク L_m が閉ループ・分岐リンクの場合 (図7参照), 自由端リンク側へつながる閉ループに含まれるアクティブ・ジョイント⁰² J_{a1} , J_{a2} , ... に働く力、モーメントの値は既に計算されているので、パッシブ・ジ

ョイント⁰³ J_{p1} , J_{p2} , ... に働く力 $\vec{F}_{J_{p1}}$, $\vec{F}_{J_{p2}}$, ... , モーメント $\vec{M}_{J_{p1}}$, $\vec{M}_{J_{p2}}$, ... に関する式は、式(67), (68) から、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{p \text{ for } L_m} (Q_{L_m, J_p} \vec{F}_{J_p}) \\ = \vec{F}_{L_m} - \sum_{a \text{ for } L_m} \{ Q_{L_m, J_a} (\vec{F}_{J_a} + \vec{F}_{K_a} + \vec{F}_{C_a}) \} \\ - \sum_{p \text{ for } L_m} \{ Q_{L_m, J_p} (\vec{F}_{K_p} + \vec{F}_{C_p}) \} \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \sum_{p \text{ for } L_m} (Q_{L_m, J_p} \vec{M}_{J_p} + X_{G_m, J_p} \vec{F}_{J_p}) \\ = \vec{M}_{L_m} - \sum_{a \text{ for } L_m} \{ Q_{L_m, J_a} (\vec{M}_{J_a} + \vec{M}_{K_a} + \vec{M}_{C_a}) \\ + X_{G_m, J_a} (\vec{F}_{J_a} + \vec{F}_{K_a} + \vec{F}_{C_a}) \} \\ - \sum_{p \text{ for } L_m} \{ Q_{L_m, J_p} (\vec{M}_{K_p} + \vec{M}_{C_p}) \\ + X_{G_m, J_p} (\vec{F}_{K_p} + \vec{F}_{C_p}) \} \end{aligned} \quad (85)$$

行列 Q_{L_m, J_j} の第 k 列 ($k=1, 2, 3$) の第1~3行を成分とする3次元の列ベクトルを $\vec{Q}_{L_m, J_j}^k$ と表すと、式(83), (85)における行列 X_{G_m, J_j} は、次式で表される。

$$\begin{aligned} X_{G_m, J_j} = [\vec{s}_{G_m, J_j} \times \vec{Q}_{L_m, J_j}^1, \vec{s}_{G_m, J_j} \times \vec{Q}_{L_m, J_j}^2, \\ \vec{s}_{G_m, J_j} \times \vec{Q}_{L_m, J_j}^3] \end{aligned} \quad (86)$$

また、閉ループに含まれるジョイント J_m のうち、 $m = U_k$ ($k=1, \dots, \lambda_U$) の未知ジョイントは駆動力、トルクを発生しないから、次に示す拘束条件が成り立つ。

$$(\text{回転ジョイントの場合}) : \vec{d}_m^T \vec{M}_{J_m} = 0 \quad (87)$$

$$(\text{並進ジョイントの場合}) : \vec{d}_m^T \vec{F}_{J_m} = 0 \quad (88)$$

4.4.2 解法 閉ループに含まれるジョイントに働く力 $\vec{F}_{J_m}$, モーメント $\vec{M}_{J_m}$ は、その閉ループに含まれる閉ループ・中間リンクおよび閉ループ・分岐リンクについて成り立つ関係式(82)~(85)と、拘束条件式(87), (88)からなる連立方程式の解として求められる。これらをまとめると、次式のように

図4 自由端リンク

図6 中間リンク

図5 閉ループ・分岐リンクの場合

図7 閉ループ・分岐リンクの場合

表される。

$$D\vec{f} = \vec{h} \quad (89)$$

上式で $\vec{f}$ は、ジョイント力、モーメントを成分にもつベクトルで、次式のように表される。

$$\vec{f} = (\vec{F}_{J_1}^T, \vec{M}_{J_1}^T, \dots, \vec{F}_{J_\lambda}^T, \vec{M}_{J_\lambda}^T)^T \quad (90)$$

また、行列 D およびベクトル $\vec{h}$ は、それぞれ、式 (82) ~ (85), (87), (88) の左辺の係数および右辺を成分にもつ。なお、行列 D の大きさを m_D 行 n_D 列とすると、ベクトル $\vec{f}$, $\vec{h}$ の次元は、それぞれ n_D , m_D となる。 m_D は方程式の数、 n_D は未知数の数で、それぞれ、次式で求められる。

$$m_D = 7\lambda - 6 - \lambda_D \quad (91)$$

$$n_D = 6\lambda \quad (92)$$

$m_D = n_D$ の場合 (例えば、 $\lambda = 7$, $\lambda_D = 1$)、 D は正方行列となるので、 D が正則であれば、式 (89) の解として $\vec{f}$ が求まる。

$$\vec{f} = D^{-1} \vec{h} \quad (93)$$

D が正方行列とならない場合、 $m_D < n_D$ となり、式 (89) を満足する解は無数に存在する。Orin らは、最適化問題として定式化して解いている¹⁴⁾が、新たに制約条件を加える必要があり、計算量も増加する。ここでは、ジョイントに作用する力、モーメントの2乗和を最小化する解 $\vec{f}^*$ を求める¹⁵⁾。これは、エネルギーの最小化を疑似的に行っていることに相当する。

$$\vec{f}^* = D^T (DD^T)^{-1} \vec{h} \quad (94)$$

4.4.3 多重閉ループ 定義された機構の中に閉ループが複数個存在する場合、式 (82) ~ (85), (87), (88) は、すべての閉ループ・中間リンクおよび閉ループ・分岐リンクについて成り立つ。これらをまとめると、式 (89) と同じ形になる。すべての閉ループに含まれるリンクの数を N_L 、ジョイントの数を N_J 、ジョイントの全自由度の数を λ_T 、駆動自由度の数を λ_D とすると、 m_D , n_D は、それぞれ、次のようになる。

$$m_D = 6(N_L - 1) + \lambda_T - \lambda_D \quad (95)$$

$$n_D = 6N_J \quad (96)$$

5. 例題

本シミュレーション・システムを用いた解析例を次に示す。例として用いたのは、図8に示すような産業用ロボットで、開ループの途中に平行四節リンクからなる閉ループを含んだ機構となっている。

ここでは、ハンド L_7 が、全体座標系 Σ_W に対し、常に一定姿勢を保つようにしたまま、垂直方向 (Z_W 方向) に上から下へ動かした場合について示す。これは逆問題となる。ハンド L_7 の軌道を、以下のように定める。

$$x_{BW}(t) = x_0 \quad (97)$$

$$y_{BW}(t) = y_0 \quad (98)$$

$$z_{BW}(t) = z_A \left\{ \frac{t}{t_0} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \right\} + z_0 \quad (99)$$

$$\dot{z}_{BW}(t) = \frac{z_A}{t_0} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \right\} \quad (100)$$

$$\ddot{z}_{BW}(t) = \frac{2\pi z_A}{t_0^2} \sin\left(\frac{2\pi t}{t_0}\right) \quad (101)$$

$$\psi_{BW} = \theta_{BW} = \phi_{BW} = 0 \quad (102)$$

式 (97) ~ (101) で、 z_A , x_0 , y_0 , z_0 , t_0 は定数である。

ここでは、 $t_0 = 6$ 秒とした。

図9は、 $t = 0, 3, 6$ 秒における機構の形状を示す。図10, 11, 12は、それぞれ、逆問題を解いて得られた、ジョイント J_2, J_3, J_5, J_7 の変位、速度、加速度である。図13は、ジョイント J_2, J_3, J_5 の駆動トルクを示す。

なお、上述の計算の場合、タイム・ステップ数を24としているが、収束判定の基準とする相対誤差を 10^{-5} とすると、各タイム・ステップにおいて最大3回の反復で収束しており、実用上十分の精度であると考えられる。

6. 結論

本報告では、任意の開ループおよび閉ループを含む機構について、ジョイントの変位、速度、加速度 (順問題)、あるいは、リンクの空間内での軌道 (逆問題) を与えた時の、各ジョイントに働く力およびモーメントを計算する運動解析の手法を示した。また、本手法を用いた対話型のシミュレーション・システムを作成し、数値的にも十分精度の良い計算が可能であることを示した。

図8 産業用ロボットの例

文 献

- (1) Sheth, P. N., and Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. B*, **94**-2 (1972), 454
- (2) Uicker, J. J. Jr., Denavit, J., and Hartenberg, R. S., *Trans. ASME, Ser. E*, **86**-2 (1964), 309.
- (3) Uicker, J. J. Jr., *Trans. ASME, Ser. B*, **91**-1 (1969), 251.
- (4) Takano, M., Yashima, K., and Yada, S., "Development of Computer Simulation System of Kinematics and Dynamics of Robot," *Journal of the Faculty of Engineering, The University of Tokyo (B)*, Vol. XXXVI, No. 4 (1982), 677.
- (5) 野口, 加藤, 松家, 清水, 情報処理学会第27回全国大会講演論文集(昭58), 1573.
- (6) 増田, 萩原, 日本ロボット学会誌, **2**-4 (昭59), 359.
- (7) Luh, J. Y. S., Walker, M. W., and Paul, R. P., *Trans. ASME, Ser. G*, **102**-2 (1980), 69.
- (8) 長松・斎藤・一柳, 機論, **51**-470, C (昭60), 2668.
- (9) 長松・斎藤・一柳, 機論, **51**-470, C (昭60), 2677.
- (10) 長松・斎藤・桜井, 機論, **51**-470, C (昭60), 2684.
- (11) 増田, 二川, 有本, 宮崎, 日本ロボット学会誌, **4**-1 (昭61), 9.
- (12) 黒岩, 本江, 平岡, 論文講演前刷, (第64期全国大会講演会) (昭61-10) 論文No 86-0378A.
- (13) Paul, R. P., *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*, (1981), 9, MIT Press.
- (14) Orin, D. E., and Oh, S. Y., *Trans. ASME, Ser. G*, **103**-2 (1981), 134.
- (15) 児玉, 須田, システム制御のためのマトリクス理論, (昭53), 計測自動制御学会.

討 論

〔質問〕 高野政晴〔東京大学工学部〕

機構の構成から運動解析と力学解析をするはん用システムを開発されたことを高く評価する。ついては次のことをどのように処理するのかお教え願いたい。

(1) 一般的な機構を考えたとき、部分的に自由度零の閉ループまたは過剰拘束の閉ループがしばしば生じる。その場合運動解析の解なしということになるが、どう処理するか。

(2) たとえば平面4節リンク機構は自由度1であるが空間機構としてみれば自由度は零以下である。しかしジョイントの軸が平行であるという特殊条件のもとでのみ動けるので、このような特殊条件はほかにもいろいろあるが、ここではどのように扱うのか。

(3) 上記の拘束された閉ループや特殊条件では構造が不静定であり、リンクジョイントの変形も考慮する必要があるが、いかがか。

〔回答〕 (1) 2・3・2項に示した計算を適当な繰返し数だけ実行しても収束しない場合には、解なしとみなして計算を中止させる。

(2) 一般に、機構の自由度 λ_N は、次式で表される。

$$\begin{aligned}\lambda_N &= \lambda_T - C \cdot L_c \\ &= \lambda_T - C(N_J - N_L + 1) \cdots \cdots (i)\end{aligned}$$

λ_T : ジョイントの全自由度

L_c : 独立な閉ループの数

N_J : ジョイントの数

N_L : リンクの数

$$C = \begin{cases} 3: \text{平面機構の場合} \\ 6: \text{空間機構の場合} \end{cases}$$

ここでは、上式による機構の自由度の計算は行っていないので、平面機構か空間機構かの区別、リンクの長さによる特殊条件については、特に考慮はしていない。

本報で用いている駆動ジョイントの数 λ_D は、実際に機構を駆動しているジョイント(自由度)の数を示している。多くの場合、 $\lambda_D = \lambda_N$ と考えてかまわないが、ご指摘のような特殊条件のある場合や、 C の値の違いにより、 $\lambda_D \neq \lambda_N$ の場合もありえるので、本システムでは、 λ_D と λ_N を区別している。

(3) リンクの部分は剛体として取扱っており、その変形は考慮してない。ご指摘のような場合、方程式(運動方程式)の数 m_D は、未知数(ジョイント力、モーメント)の数 n_D よりも小さくなり、一般的には、解が無限個存在し、不定となる。

リンクの弾性の影響をジョイントでの等価な並進と回転ばねへ置き換えて、所望の変形量とリンクに働く力やモーメントを求める必要がある。

ジョイントでのばねと力、モーメントの静的な釣合いを求める場合については、次報で報告の予定である。