はりにおけるたわみとねじれが多モード共振*

安田 仁彦**, 鳥居 孝夫**

The Multi-Mode Response between Deflectional
and Torsional Modes in a Beam

Kimihiko YASUDA and Takao TORII

Deflectional and torsional modes of a beam may be coupled by nonlinear terms for large amplitudes. As a problem of deflectional-torsional vibrations coupled by nonlinear terms, the dynamic response of a beam with a thin rectangular cross section subjected to harmonic excitation in the lateral direction is taken up. The possibility of a multi-mode response between deflectional and torsional modes is discussed theoretically. For this, first a general analysis is given. Then, a typical case is taken up in which the natural frequency of the second deflectional mode coincides with that of the first torsional one, and a numerical calculation is conducted near the primary resonance point. It is shown that, in addition to the usual harmonic oscillation, two types of oscillations accompanying torsional modes are possible, whose amplitudes decrease in one type and increase in the other, as the excitation frequency increases. In this way the occurrence of the multi-mode response is ascertained. An experimental analysis is also conducted, which confirms the validity of the theoretical analysis.

Key Words: Vibration of Continuous System, Beam, Nonlinear Forced Oscillation, Multi-Mode Response, Deflectional-Torsional Vibrations

1. ま え が き

はりを大振幅で振動させるときの非線形のたわみ振動の問題は、多くの研究者の関心をひいてきている^{(1)~(9)}。著者の一人もこの種の問題の一つとして強制振動の問題を扱い、調和外力を受けるはりが多モード共振となり得ることを示した^{(10)~(12)}。

はりの大振幅の振動としては、たわみ振動以外に、線形の範囲ではたわみとねじれが連成しないような断面形状のはりが、非線形性によって連成される、たわみとねじれの連成振動がある。これまで、このような非線形性によるたわみとねじれの連成振動の問題はあまり扱われていないようである。

そこでこの報告では、この種の問題の例として、薄い長方形断面のはりを取り上げ、横方向に調和外力が作用する場合のはりの動的挙動を調べる。そしてたわみ振動の固有振動数とねじれ振動の固有振動数がある関係を満たすとき、非線形性による連成のため、たわみの方向の外力のみが作用している場合であっても、ねじれを伴った振動が発生し、たわみの振動モードと

ねじれの振動モードの間の多モード共振となり得ることを示す。

はじめに、はりのたわみとねじれを支配する運動方程式を求め、その方程式からモード方程式を導く。このモード方程式を摂動法⁽¹³⁾を用いて解析する。最後に鋼製のはりを用いて実験を行い、理論の妥当性を検討する。

2. 基礎方程式とモード方程式

2・1 基礎方程式 軸方向に初期張力 N_0 で張られた長さ l 、幅 b 、厚さ h のはりを考える。ここで $l \gg b \gg h$ とし、また両端の支持条件は簡単のため単純支持とする。図1のように、平衡状態のはりの中心に沿って x 軸、幅方向に y 軸、厚さ方向に z 軸をとり、 x 軸方向の変位を u 、 z 軸方向のたわみを w 、 x 軸まわりのねじれを ϕ とする。これらの量 u, w, ϕ およびその微分係数の大きさは、微小量 ε に関して次のオーダーであると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w &= O(1), & \phi &= O(1) \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= O(\varepsilon), & u &= O(\varepsilon), & \frac{\partial \phi}{\partial x} &= O(\varepsilon) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= O(\varepsilon^2), & \frac{\partial u}{\partial x} &= O(\varepsilon^2), & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

* 昭和61年11月3日 中国四国支部・九州支部合同大分地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年6月23日。

** 正員、名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

図1 はりの座標系

x, y, z 軸に沿って単位ベクトル e_x, e_y, e_z をとると、はりの変形後の単位ベクトルは

$$\left. \begin{aligned} e'_x &= e_x + \frac{\partial w}{\partial x} e_z \\ e'_y &= e_y + \phi e_z \\ e'_z &= -\frac{\partial w}{\partial x} e_x - \phi e_y + e_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

となる。したがって平衡状態で座標 (x, y, z) の点の位置ベクトル R は

$$\begin{aligned} R &= (x+u)e_x + we_z + ye'_y + ze'_z \\ &= \left(x+u-\frac{\partial w}{\partial x}\right)e_x \\ &\quad + (y-z\phi)e_y + (z+w+y\phi)e_z \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

となり、 x 軸方向のひずみは、高次の微小量を省略して、次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} - 1 \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

これを x 軸方向の応力を与える式

$$\sigma_x = E\epsilon_x + N_0/A \dots\dots\dots (5)$$

に代入し、はりの断面について積分すると断面に作用する合応力および応力モーメントは次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int \sigma_x dA = EA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} EI_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + N_0 \\ M_y &= \int z \sigma_x dA = -EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_z &= -\int y \sigma_x dA = -EI_z \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

また、 x 軸まわりの応力モーメントは次式のようになる⁽¹⁴⁾。

$$M_x = (GK_t + \bar{K}) \frac{\partial \phi}{\partial x} \dots\dots\dots (7)$$

式(6)、(7)において、 E は縦弾性係数、 G はせん断弾性係数、 A ははりの断面積である。また I_y, I_z, I_0 ははりの各断面 2 次モーメント、 $K_t, \bar{K}$ は St. Venant のねじれ定数および Wagner 係数で、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} I_y &= \int z^2 dA = \frac{1}{12} bh^3 \\ I_z &= \int y^2 dA = \frac{1}{12} b^3 h \\ I_0 &= \int (y^2 + z^2) dA = I_z \\ K_t &= \frac{1}{3} bh^3 \\ \bar{K} &= \int (y^2 + z^2) \sigma_x dA \\ &= \frac{I_0}{A} N_x + \frac{2}{5} E \frac{I_z^2}{A} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(6)で与えられていない合応力 N_y, N_x は後で力の釣合いによって求められるものとする。

式(6)、(7)の合応力および応力モーメントの釣合いを慣性力、粘性減衰力および外力を含めて考えると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (N_x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N_z \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (N_z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (N_y \phi) \\ &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_x \frac{\partial w}{\partial t} - q \\ \frac{\partial}{\partial x} (M_x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(M_z \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \rho I_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + c_y \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} (M_y) - \frac{\partial}{\partial x} (M_z \phi) &= N_z \\ \frac{\partial}{\partial x} (M_z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(M_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (M_y \phi) &= N_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。ここで ρ ははりの密度、 c_x, c_y は減衰係数、 q は外力である。簡単のため上式および以後の式において、 ϵ の高次の微小項は省略することにする。このとき式(9)の第1式は

$$\frac{\partial}{\partial x} (N_x) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

となり、 N_x は x に対して独立となる。そこで式(6)の第1式を u について解くと、両端で $u=0$ という境界条件から

$$N_x = \bar{N} = \frac{E}{2l} \int_0^l \left\{ A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx + N_0 \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。同じように式(9)の第4式および第5式からは

$$\left. \begin{aligned} N_z &= -EI_y \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + EI_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ N_y &= -EI_z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(GK_t + \frac{I_o}{A} N_0 \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \phi \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。

これらを、式(9)の第2式および第3式に代入すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_x \frac{\partial w}{\partial t} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \bar{N} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q &= EI_z \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\phi \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(GK_t + \frac{I_o}{A} N_0 \right) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \phi \right\} \right] \\ \rho I_o \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + c_y \frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(GK_t + \frac{I_o}{A} \bar{N} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= EI_z \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{2}{5} E \frac{I_z^2}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

次に無次元量

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}, t' = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{N_0}{\rho A}} t, w' = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{AE}{\varepsilon N_0}} w, \phi' = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{AE}{\varepsilon N_0}} \cdot \sqrt{\frac{I_z}{A}} \phi, 2\varepsilon \zeta_x = \frac{l}{\pi} \frac{c_x}{\sqrt{\rho A N_0}} \\ 2\varepsilon \zeta_y &= \frac{l}{\pi} \frac{c_y}{\sqrt{\rho A N_0}} \frac{A}{I_z}, \varepsilon q' = \frac{l}{2\pi N_0} \sqrt{\frac{AE}{\varepsilon N_0}} q, \varepsilon = \frac{A}{l^2}, x_0 = \frac{GK_t}{N_0} \frac{A}{I_z}, \kappa_1 = \frac{EI_y}{N_0} \frac{\pi^2}{l^2} \\ \beta_1 &= I_y/I_z, \beta_2 = (GK_t/EI_z + N_0/EA) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

を導入して式(13)を書き直し、 $\beta_1 \ll 1$, $\beta_2 \ll 1$ であることを考慮して整理し、肩の「'」を省略すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\varepsilon \zeta_x \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{\pi^2} \left[1 + \frac{2\varepsilon}{\pi^2} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\kappa_1}{\pi^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ = 4 \frac{\varepsilon}{\pi^4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} + \varepsilon q \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\varepsilon \zeta_y \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{\pi^2} \left[1 + x_0 + \frac{2\varepsilon}{\pi^2} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ = 4 \frac{\varepsilon}{\pi^4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{8}{5} \frac{\varepsilon}{\pi^4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^3 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

2.2 モード方程式 式(15)の未知量 w, ϕ を両端の境界条件を満たすように次の形におく。

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin n\pi x, \phi = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin n\pi x \dots\dots\dots (16)$$

これを式(15)に代入し、両辺に $\sin n\pi x$ をかけて、 x に関して0から1まで積分すると、 X_n, Y_n を定める方程式

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_n + 2\varepsilon \zeta_x \dot{X}_n + \tilde{p}_n^2 X_n + \varepsilon n^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (X_m^2 + Y_m^2) X_n &= -\varepsilon \sum_{i,j,k=1}^{\infty} H_{nijk} Y_i Y_j X_k + \varepsilon q_n \\ \ddot{Y}_n + 2\varepsilon \zeta_y \dot{Y}_n + \tilde{p}_n^2 Y_n + \varepsilon n^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (X_m^2 + Y_m^2) Y_n &= -\varepsilon \sum_{i,j,k=1}^{\infty} H_{nijk} \left(X_i X_j Y_k + \frac{2}{5} Y_i Y_j Y_k \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

が得られる。ただし

$$\left. \begin{aligned} p_n &= n\sqrt{1 + \kappa_1 n^2}, \tilde{p}_n = n\sqrt{1 + x_0}, q_n = 2 \int_0^1 q(x, t) \sin n\pi x dx \\ H_{nijk} &= 8 \int_0^1 nijk \cos n\pi x \cos i\pi x \cos j\pi x \cos k\pi x dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

である。式(17)から、たわみおよびねじれの各振動モードは非線形項によって互いに連成されていることがわかる。

3. 主共振点付近の振動

3.1 摂動法による解析 はりのたわみ振動およびねじれ振動の固有角振動数 $p_n, \tilde{p}_n$ は式(18)で与えられる。この式および式(14)からわかるように、 $p_n, \tilde{p}_n$ の比は初期張力 N_0 によって変化する。このため N_0 の値によって、たわみ振動の固有角振動数とねじれ振動の固有角振動数のうちあるものは一致すること

がある。ここではたわみの第2モードとねじれの第1モードの固有角振動数が一致する場合を取り上げる。

外力 q としてここでは $q = q(x) \cos \omega t$ の形の調和外力を考え、その角振動数 ω が、上で考えた固有角振動数に近づく主共振点付近の振動を解析することにする。

簡単のため、系の挙動はたわみの第2モードとねじれの第1モードの二つのモードによって近似的に支配されるものとし、したがって式(17)において X_2, Y_1 以外の未知量は無視できるものとする。このとき式(17)は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} + 2\varepsilon\zeta_x\dot{X} + p^2X + \varepsilon(H_{xx}X^2 + H_{xy}Y^2)X \\ = \varepsilon Q \cos \omega t \\ \ddot{Y} + 2\varepsilon\zeta_y\dot{Y} + p^2Y + \varepsilon(H_{yx}X^2 + H_{yy}Y^2)Y = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

のように書き直される。ただし

$$\left. \begin{aligned} X = X_2, Y = Y_1, p = p_2 = \bar{p}_1 \\ Q \cos \omega t = q_2 \\ H_{xx} = 2^2 \cdot 2^2, H_{xy} = 2^2 \cdot 1^2 + H_{2112} \\ H_{yx} = 1^2 \cdot 2^2 + H_{1221}, H_{yy} = 1^2 \cdot 1^2 + \frac{2}{5}H_{1111} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

とおいた。

外力の角振動数 ω と固角振動数 p とのずれは ε の一乗の程度であると仮定し、 ω を次の形におく。

$$\omega = p + \varepsilon\sigma \dots\dots\dots (21)$$

マルチスケールの摂動法⁽¹³⁾で式(19)を解くため、解を次の形におく。

$$\left. \begin{aligned} X = X_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon X_1(T_0, T_1, \dots) + \dots \\ Y = Y_0(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon Y_1(T_0, T_1, \dots) + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここに $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, \dots$ は異なったスケールの時間である。解を ε^1 までの精度で求めるものとする、式(19)から X_0, Y_0 が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} X_0 = U(T_1)e^{ipT_0} + \bar{U}(T_1)e^{-ipT_0} \\ Y_0 = V(T_1)e^{ipT_0} + \bar{V}(T_1)e^{-ipT_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 U, V は未知量で T_1 の関数であり、 $\bar{U}, \bar{V}$ はそれらの共役複素数である。これらの未知量は X_1, Y_1 が永年項をもたないための条件

$$\left. \begin{aligned} 2ipU' + 2ip\zeta_x U - \frac{1}{2}Qe^{i\sigma T_1} + H_{xx}(3U^2\bar{U}) \\ + H_{xy}(2V\bar{V}U + V^2\bar{U}) = 0 \\ 2ipV' + 2ip\zeta_y V + H_{yy}(3V^2\bar{V}) \\ + H_{yx}(2U\bar{U}V + U^2\bar{V}) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

によって定められる。ここで、肩の記号「 $\cdot$ 」は T_1 に関する微分を表す。

式(24)を解くため、 U, V を

$$\left. \begin{aligned} U = \frac{1}{2}Re^{i(\sigma T_1 - \tau)} \\ V = \frac{1}{2}Se^{i(\sigma T_1 - \delta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

とおく、これを式(24)に代入し、得られた式を実部と虚部に分離すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} pR' = -p\zeta_x R + \frac{1}{2}Q \sin \gamma \\ - \frac{1}{8}H_{xy}S^2R \sin(2\gamma - 2\delta) \\ pR\gamma' = p\sigma R + \frac{1}{2}Q \cos \gamma - \frac{3}{8}H_{xx}R^3 \\ - \frac{1}{8}H_{xy}S^2R\{2 + \cos(2\gamma - 2\delta)\} \\ pS' = -p\zeta_y S - \frac{1}{8}H_{yx}R^2S \sin(2\delta - 2\gamma) \\ pS\delta' = p\sigma S - \frac{3}{8}H_{yy}S^3 \\ - \frac{1}{8}H_{yx}R^2S\{2 + \cos(2\delta - 2\gamma)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

定常解を求めるため、式(26)において $R' = S' = \gamma' = \delta' = 0$ とおく。得られた連立方程式の解を、式(25)、式(23)および式(22)に順次代入すれば、式(19)の解が次の形で得られる。

$$\left. \begin{aligned} X = R \cos(\omega t - \gamma) \\ Y = S \cos(\omega t - \delta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

式(26)から、定常解は2種類存在することがわかる。一つは $S=0$ となるもので、たわみ振動のみの通常の調和振動が発生する場合を表す。もう一つは $S \neq 0$ となるもので、この解は、非線形項の連成によってたわみとねじれの二つのモードが同時に励起されて、たわみとねじれの多モード共振となる場合を表す。

定常解の安定性は、式(24)の定常解 U, V に微小な乱れ $\Delta U, \Delta V$ を与え、その乱れの時間的変化を調べることによって定められる。具体的には式(24)において、 U, V を $U + \Delta U, V + \Delta V$ で置き換え、二乗以上の微小量を省略し、 $\Delta U, \Delta V$ を支配する微分方程式を導く。この方程式を、実係数の方程式とするため、 $\Delta U, \Delta V$ を

$$\left. \begin{aligned} \Delta U = \frac{1}{2}(\xi + i\tilde{\xi})e^{i\sigma T_1} \\ \Delta V = \frac{1}{2}(\eta + i\tilde{\eta})e^{i\sigma T_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

とおき、得られた方程式を実部と虚部に分離する。最後に得られた方程式の係数行列の固有値を求め、その実部の正負によって安定判別を行う。

3・2 振動の性質 数値例によって振動の性質を検討する。外力の分布は、後に述べる実験との対応を考慮して、 $x = x_M$ を中心として幅 b_M の領域で一定値 q_0 、その外では零となるものとした。図2は、系のパラメータを適当な値にとって得られた共振曲線と位相曲線の一例である。

図中、実線は安定な振動、破線は不安定な振動を表

す。図から、この場合の共振曲線は、 $S=0$ となる通常の調和振動の分枝と、 $S \neq 0$ となる分枝 BCDE からなっている。前者の分枝 ABEF には不安定領域 BE が存在し、その両側の境界から後者の分枝 BCDE が分岐している。分枝 BCDE のうち、BC と DE の部分が安定となっている。

図 2 によって主共振点付近の振動の様子がわかる。例えば、 ω を小さい値から徐々に大きくしていくと、最初は分枝 AB で表される調和振動が発生する。しかし、 ω が点 B に対応する値を超えると、連続的に分枝 BC に移行し、急速に S が大きくなって、たわみとねじれの間の多モード共振となる。このときの二つのモードの位相差は、図 2 の γ と δ を比較してわかるようにほぼ $\pi/2$ である。このまま ω を大きくしていくと、点 C で跳躍して、分枝 DE で表される振動へ、不連続的に移行する。この振動が発生しているときの二つのモードの位相差は、ほぼ π である。さらに ω を大きくしていくと、 R は大きくなるが、 S は逆に小さくなる。そして ω が点 D に対応する値になると、 S は零

になり、分枝 EF の調和振動へ連続的に移行する。

4. 実験による解析

4.1 実験方法 前章の理論解析の妥当性を検討するため、鋼製のはりを用いて実験を行った。実験装置の概略を図 3 に示す。軸方向の初期張力 N_0 は左側のナットの締付けによって与えられる。はりをはさんで 2 個の電磁石 M_1, M_2 を配置し、これらに交互に電流を流すことにより、はりに調和外力を加える。

振動を検出するセンサは、図 3 の右側に示すように幅方向に 2 個ならべておき、演算増幅回路によりそれらの信号の和や差を取り出すことによって、たわみとねじれを分離して測定する。

実験に使用したはりの諸元は次のとおりである。

長さ	$l=1\,000\text{ mm}$
幅	$b=32\text{ mm}$
厚さ	$h=0.5\text{ mm}$
縦弾性係数	$E=206\text{ GPa}$
せん断弾性係数	$G=79.2\text{ GPa}$

$$p=2.01, 2\epsilon\zeta_x=2\epsilon\zeta_y=0.01$$

$$\epsilon=1\times 10^{-5}, q_0=40, x_M=0.25, b_M=0.12$$

図 2 理論解析から得られた共振曲線および位相曲線

図3 実験装置の概略

密度 $\rho = 7.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

また磁石の位置は $x_M = 250 \text{ mm}$, センサ S_A, S_B 間の距離は $b_s = 18 \text{ mm}$ である。

軸方向の張力を変化させてはりの固有振動数を測定したところ図4のような結果が得られた。図で横軸には、張力にかわるものとして、たわみの第1モードの固有振動数 p_1 がとってある。図中の一点鎖線は理論値である。この図から、 $p_1 = 28 \text{ Hz}$ 付近で、たわみの第2モードの固有振動数 p_2 とねじれの第1モードの固有振動数 $\tilde{p}_1$ はともに約 56 Hz となり、ほぼ一致していることがわかる。

4.2 実験結果 たわみの第2モードの固有振動数とねじれの第1モードの固有振動数が一致する場合を取り上げ、外力の振動数を固有振動数に近づけて実験を行ったところ、通常の調和振動以外に、図5(a), (b)に示すような2種類の振動が観察された。この図において、 w_A, w_B はそれぞれセンサ S_A, S_B で測定した波形で、 $(w_A + w_B)/2, (w_A - w_B)/2$ は演算増幅回路により分離した、たわみとねじれの波形である。また図の左右はそれぞれ $x = l/2, x = 3l/4$ で測定した波形である。これらの図から、ねじれを伴った振動が実際に発生すること、たわみは第2モード、ねじれは第1モードの振動であることがわかる。次に、図6には図5のような波形から得られた共振曲線を示す。測定位置は $x = 2l/3$ である。

図5および図6から、次のようなことがわかる。外力の振動数を小さな値から徐々に大きくしていくと、最初は調和振動のみが発生するが、ある振動数でねじれの振幅が急速に大きくなり、分枝Iの振動へ連続的に移行する。このときのたわみのモードとねじれのモードの間の位相差は、図5からわかるようにほぼ $\pi/2$ である。これらのことから、分枝Iの振動は図2の分枝BCに対応することがわかる。

さらに振動数を大きくしていくと、ある振動数で跳躍して、分枝IIの振動数に移行する。この状態で振動

図4 はりの固有振動数

数を変化させると、振動数の増加とともにねじれの振幅は小さくなり、たわみの振幅は大きくなる。また、このときのたわみのモードとねじれのモードの間の位相差はほぼ π である。これらのことから、分枝IIは図2の分枝DEに対応することがわかる。

なお、図5からわかるように分枝Iは高調波振動を含んでおり、より高次の振動モードも関係していると考えられるが、本報の目的は、たわみとねじれの間で多モード共振となり得ることを示すことにあるので、理論解析において、高次の振動モードは考慮しなかった。

以上述べてきた結果は、3章までの理論解析の結果が定性的にほぼ妥当なものであることを示している。

5. む す び

非線形性によってたわみとねじれが連成するはりの強制振動の問題の一例として、薄い長方形断面のはりを取り上げ、たわみの第2モードの固有振動数とねじれの第1モードの固有振動数が一致する場合の、横方

(a) $\omega = 57.2 \text{ Hz}$ (図6のIの振動) (b) $\omega = 58.0 \text{ Hz}$ (図6のIIの振動)

図5 実験から得られた振動波形

図6 実験から得られた共振曲線

向の調和外力による主共振点付近の振動を解析した。得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) 初めに、はりのたわみとねじれを支配する運動方程式を求め、それからモード方程式を導いた。

(2) 得られたモード方程式を見ると、たわみの振動モードとねじれの振動モードは非線形項によって連成している。

(3) このため、主共振点付近ではたわみの方向のみの外力が作用しているにもかかわらず、外力の振動数のある範囲内でたわみとねじれが連成し、たわみのモードとねじれのモードの多モード共振となる。

(4) たわみとねじれが連成した振動は2種類存在し、そのうちの一つは、二つの振動モードの位相差が $\pi/2$ のもので、もう一つのは位相差が π のものである。前者の振動が発生しているとき、ねじれの振幅は、外力の振動数の増加とともに大きくなるが、後者の場合は小さくなる。

最後に、鋼製のはりを用いて実験を行い、理論解析の結果が定性的に妥当なものであることを確認した。

文 献

- (1) Ray, J. D. and Bert, C. W., *Trans. ASME*, Ser. B, **91**-4 (1969), 997.
- (2) Tseng, W. Y. and Dugundji, J., *Trans. ASME*, Ser. E, **37**-2 (1970), 292.
- (3) Bennett, J. A. and Eisley, J. G., *AIAA J.*, **8**-4 (1970), 734.
- (4) Eisley, J. G. and Bennett, J. A., *Int. J. Non-Linear Mech.*, **5**-4 (1970), 645.
- (5) Tseng, W. Y. and Dugundji, J., *Trans. ASME*, Ser. E, **38**-2 (1971), 467.
- (6) Busby, H. R. Jr. and Weingarten, V. I., *Int. J. Non-Linear Mech.*, **7**-3 (1972), 289.
- (7) Nayfeh, A. H., ほか2名, *J. Acoust. Soc. Am.*, **55**-2 (1974), 281.
- (8) Bennett, J. A., *AIAA J.*, **11**-5 (1973), 710.
- (9) Nayfeh, A. H., ほか2名, *AIAA J.*, **12**-9 (1974), 1222.
- (10) 山本・ほか2名, 機論, **46**-410, C (昭55), 1171.
- (11) 山本・ほか2名, 機論, **46**-411, C (昭55), 1327.
- (12) 山本・ほか2名, 機論, **47**-422, C (昭56), 1258.
- (13) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), 56, John Wiley & Sons.
- (14) Chen, W. F. and Atsuta, T., *Theory of Beam-Columns*, **1** (1976), 17, McGraw Hill.

討 論

〔質問〕 末岡 淳男〔九州大学工学部〕

(1) 図2と6で、IIとDEの対応を述べておられるが、ねじれ角のほうは振動数増加とともに振幅が零にならず、曲げねじれが連成し続けるような傾向が見られる。分枝IIで図6よりさらに振動数を増加させ、図2のEF分枝(曲げのみの振動)まで到達した様相を観察されたか。

(2) 解析で高次モードの影響を無視しておられるが、実験では明確に高次(第3高調波)が存在してい

る。高次まで考慮した場合、振動特性に変化を生じることはないか。

(3) 図6はFFTアナライザにより、強制振動数のみをプロットされたのか。

(4) 実験で強制力を一定とされるために、何か工夫が必要であったか。

〔回答〕 (1) 本研究で用いた実験装置では、分枝IIの状態から振動数を増加させていくと、ある振動数で図6の右下の調和振動の分枝へと跳躍を起し、

図2の分枝EFは観察されなかった。

(2) 高次のモードを考慮にいれた場合、弦における高調波振動(付1)の類推から、図2の分枝BCは高調波を大きく含んだ分枝と高調波をあまり含まない分枝の二つにわかれ、またそれ以外にも多くの分枝が発生することが予想される。実際図6の分枝Iが図2の分枝BCよりずっと短いのは、高調波の影響によるものと考えられる。しかし実験ではI、II以外の分枝は観察されず、高次のモードを考慮にいれなくとも実験結果を説明できるので、ここでは考慮しなかった。

(3) ご指摘のとおり図6では、FFTアナライザにより励起振動数の成分のみの振幅を取り出して、プロットしてある。

(4) 実験では電磁石にかかる有効電圧を一定として行った。したがって外力の大きさは振動数に依存し、厳密には一定とはいえない。しかし、振動数のせまい範囲では、その変化はあまり大きくないと考えて実験を行った。

(付1) 安田・鳥居, 機論, 51-468, C(昭60), 1944.