ばね-摩擦直列結合方式車両の走行安定性解析*
(第3報, ボギー車両の走行安定限界)

横瀬 景司**, 野本 功***

An Analysis of Running Stability for High Speed Railway Vehicles
Connected in Series with Elastic and Frictional Forces
against Truck Turning
(3rd Report, Stability Criteria for Vehicle Hunting)

Keiji YOKOSE and Isao NOMOTO

In this paper, we analysed theoretically the hunting stability of a high speed railway vehicle which has at least seven degrees of freedom with respect to lateral motion when elastic and frictional forces are connected in series against truck turning. According to the theoretical results, it was found that the stability criteria of the hunting, so-called, "lower-center rolling", "upper-center rolling" and "yawing" of a car body, and the front and rear trucks depended on the angular amplitude between the car body and the truck turning. The lower limit cycle corresponding to the lower hunting velocity was an unstable limit cycle, while the upper limit cycle changed into either a stable limit cycle or an unstable one corresponding to the magnitude of the angular amplitude. As the amplitude increased, the unstable region between the lower and upper limit cycles increased larger. Further, as the angular amplitude increased, the truck hunting velocity decreased gradually, and its limit cycle was an unstable one. Besides the hunting phenomena of a bogie car connected with the damping of a suspension device between the car body and the trucks, the magnitude of the angular amplitude between the front and rear trucks, phase angle and others are made clear.

Key Words: Railway, Vehicle Dynamics, Non-Linear-System, Describing Function, Stability Criterion, Hunting

1. ま え が き

新幹線車両のような高速車両においては、直線走行ならびに曲線通過性能向上を図るため、台車のヨーイング運動に対しばねと摩擦とが直列に結合された、いわゆる非線形特性をもつ構造の台車が広く使用されている。このような台車構造をもつ車両の走行安定性、特にだ行動特性については従来より諸外国^{(1)~(4)}はもちろんのことわが国においても詳細な研究が行われ、多くの論文^{(5)~(6)}が発表されており、高速車両設計のための基礎的資料が提出されてきた。しかし、これまでの研究のほとんどすべては、側受摩擦を考慮しない線形理論に基づくものであった。その後、ばね-摩擦直列結合方式による、いわゆる非線形モデルによる解析が松平および著者^{(7)~(8)}らによって行われ、そのだ行動特性が明確になった。しかし、これらはいずれも台車だ行動を主体とした理論解析であって、ボギー車として解析されたものではなかった。この理論解析上の問題点は、車両の運動に関与する自由度が多いことと、複数列の非線形系の介入による計算の複雑さにあっ

た。

上記の理由により、ばね-摩擦直列結合方式によるボギー車のだ行動については、理論解析の困難と解析手法に関する問題などを併せ、大振幅時のボギー車のだ行動解析されたものはほとんどなく、また、現象的に未解明な多くの要素を含んでいるのが現状である。

そこで本論文では、前報^{(9)~(10)}に引き続き側受支持車両のだ行動特性の本質を探り、その現象を理論的に明確にするための初期的段階として、剛体二軸台車より構成されるボギー車のだ行動特性に関する理論式を記述関数を用いて誘導した。解析により車両の走行安定性に及ぼす車体と台車との相対振幅、車体支持装置のダンピングの影響、だ行動の振動数、波長などが求められ、さらにだ行動速度に対応するリミットサイクルの安定性に言及した。これにより、側受支持車両の非線形だ行動特性が明確になり、高速車両設計に際しての基礎的資料が提出された。

2. 計算上の記号と仮定

2.1 記号 解析に用いたボギー車のモデルを図

1に、また記号を次のように定める。

$2m_B$: 車体の質量

$2m_T$: 台車の質量

* 昭和61年11月24日 関西支部第246回講演会において講演、原稿受付 昭和61年5月21日。

** 正員、新潟大学工学部(〒950-21 新潟市五十嵐2の町8050)。

*** 学生員、新潟大学大学院。

- $2I_{BX}$: 車体の前後軸まわりの慣性モーメント
 $2I_{BZ}$: 車体の垂直軸まわりの慣性モーメント
 $2I_T$: 台車の垂直軸まわりの慣性モーメント
 $2L$: 前後台車の中心ピン間の距離
 $2a$: 軸距
 $2b$: 車軸とレールの接触点間隔
 $2b_0$: ボルスタ・アンカー位置の左右間隔
 $2b_1$: 軸ばねの左右間隔
 $2b_2$: まくらばねの左右間隔
 r : 車軸の平均半径
 γ : 車輪の踏面こう配
 f : 一軸当たりのクリープ係数
 v : 車両の走行速度
 y_B : 車体重心の横変位
 ϕ_B : 車体の垂直軸まわりの角変位
 ϕ_B : 車体の前後軸まわりの角変位
 y_{T1} : 前台車重心の横変位
 y_{T2} : 後台車重心の横変位
 ϕ_{T1} : 前台車重心の垂直軸まわりの角変位
 ϕ_{T2} : 後台車重心の垂直軸まわりの角変位
 H_B : レール面上車体重心の高さ
 H_T : レール面上台車重心の高さ
 h_1 : 車軸中心より車体重心までの高さ
 h_2 : まくらばね中央より車体重心までの高さ
 k_1 : 1台車片側当たりの軸ばね定数
 k_2 : 1台車片側当たりのまくらばね定数
 k_0 : 台車回転ばね定数 (台車片側当たりのボルスタ・アンカーのゴムの弾性)
 k_2 : 台車片側のまくらばねの横方向のばね定数
 $K_y, K_\phi, K_{y\phi}$: 台車の支持ばね系の復原係数
 $\tau_y, \tau_\phi, \tau_{y\phi}$: ダンピング時定数で、次式により定義される量とする。 $\tau_y = C_y/K_y$,
 $\tau_\phi = C_\phi/K_\phi$, $\tau_{y\phi} = C_{y\phi}/K_{y\phi}$
 C_y : K_y に対する減衰係数

C_ϕ : K_ϕ に対する減衰係数

$C_{y\phi}$: $K_{y\phi}$ に対する減衰係数

S_2 : 二軸固定台車のだ行動の波長

$$[=2\pi\sqrt{br/\gamma \cdot (1+a^2/b^2)}]$$

F : 側受の摩擦力

$M_1(\phi_B, \phi_1)$: 前台車のヨーイングに対する復原モーメント

$M_2(\phi_B, \phi_2)$: 後台車のヨーイングに対する復原モーメント

2.2 仮定 ボギー車の運動方程式をたてるに当たり設けた仮定は、前報⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾と同様であるので詳細については省略するが、輪軸支持装置の前後および左右方向に対する支持ばね定数は無限大、すなわち剛体二軸台車として取扱う。

3. 運動方程式とその解

3.1 運動方程式 ボギー車の横方向に関する運動方程式は、次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
 m_T \ddot{y}_{T1} + 2f/v \cdot \dot{y}_{T1} - 2f\phi_{T1} \\
 - K_y(y_B + L\phi_B - y_{T1}) - K_{y\phi}\phi_B - C_y(\dot{y}_B + L\dot{\phi}_B \\
 - \dot{y}_{T1}) - C_{y\phi}\dot{\phi}_B = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_T \ddot{\phi}_{T1} + 2f/v \cdot (a^2 + b^2)\dot{\phi}_{T1} + 2fb\gamma/r \cdot y_{T1} \\
 - M_1(\phi_B, \phi_{T1}) \cdot (\phi_B - \phi_{T1}) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_T \ddot{y}_{T2} + 2f/v \cdot \dot{y}_{T2} - 2f\phi_{T2} - K_y(y_B - L\phi_B - y_{T2}) \\
 - K_{y\phi}\phi_B - C_y(\dot{y}_B - L\dot{\phi}_B - \dot{y}_{T2}) - C_{y\phi}\dot{\phi}_B = 0
 \end{aligned}$$

$$I_T \ddot{\phi}_{T2} + 2f/v \cdot (a^2 + b^2)\dot{\phi}_{T2} + 2fb\gamma/r \cdot y_{T2}$$

(b) 車両正面図

(a) 車両側面図

(c) 台車モデル

図1 車両モデル

$$\begin{aligned}
& -M_2(\phi_B, \phi_{T2}) \cdot (\phi_B - \phi_{T2}) = 0 \\
& 2m_B \ddot{y}_B + K_y(y_B + L\phi_B - y_{T1}) + K_y(y_B - L\phi_B - y_{T2}) \\
& + C_y(\dot{y}_B + L\dot{\phi}_B - \dot{y}_{T1}) + C_y(\dot{y}_B - L\dot{\phi}_B - \dot{y}_{T2}) \\
& + 2K_{y\phi}\phi_B + 2C_{y\phi}\dot{\phi}_B = 0 \\
& 2I_{Bx}\ddot{\phi}_B + 2K_\phi\phi_B + K_{y\phi}(y_B + L\phi_B - y_{T1}) \\
& + K_{y\phi}(y_B - L\phi_B - y_{T2}) + 2C_\phi\dot{\phi}_B \\
& + C_{y\phi}(\dot{y}_B + L\dot{\phi}_B - \dot{y}_{T1}) \\
& + C_{y\phi}(\dot{y}_B - L\dot{\phi}_B - \dot{y}_{T2}) = 0 \\
& 2I_{Bz}\ddot{\phi}_B + K_y L(y_B + L\phi_B - y_{T1}) - K_y L(y_B - L\phi_B \\
& - y_{T2}) + C_y L(\dot{y}_B + L\dot{\phi}_B - \dot{y}_{T1}) \\
& - C_y L(\dot{y}_B - L\dot{\phi}_B - \dot{y}_{T2}) \\
& + M_1(\phi_B, \phi_{T1}) \cdot (\phi_B - \phi_{T1}) \\
& + M_2(\phi_B, \phi_{T2}) \cdot (\phi_B - \phi_{T2}) = 0
\end{aligned}
\tag{1}$$

ここで,

$$K_y = \bar{D}_\phi / \bar{A}, \quad K_\phi = \bar{C}_y / \bar{A}, \quad K_{y\phi} = -\bar{C}_\phi / \bar{A}$$

ただし,

$$\bar{A} = \bar{C}_y \bar{D}_\phi - \bar{C}_\phi^2, \quad \bar{C}_y = h_1^2 / K_1 + h_2^2 / K_2 + 1 / 2k_2$$

$$\bar{C}_\phi = -(h_1 / K_1 + h_2 / K_2), \quad \bar{D}_\phi = 1 / K_1 + 1 / K_2$$

および

$$K_1 = 2k_1 b_1^2, \quad K_2 = 2k_2 b_2^2 \tag{2}$$

であり, また $M_1(\phi_B, \phi_{T1})$ および $M_2(\phi_B, \phi_{T2})$ は台車と車体のヨーイング運動に伴う記述関数表示による復原モーメントで, $\phi_B - \phi_{Ti}$ (ただし, $i=1, 2$ であり, $i=1$ は前車, 2 は後車) と $M_i(\phi_B, \phi_{Ti})$ との関係は図2に示す経路をたどるものとする. 記述関数は前報⁽⁹⁾の解析をそのまま適用し, 正弦波運動に対する解を $\phi_B - \phi_{Ti} = \phi_{\max i} e^{j\theta i}$ と仮定し,

$$M_i(\phi_B, \phi_{Ti}) = (M_i' + jM_i'') \tag{3}$$

の形で表すと, 結果は次式のようなになる.

$$(i) \quad k_0 b_0 \phi_{\max i} - F \leq 0 \text{ ならば, } M_i' = K, M_i'' = 0$$

$$(ii) \quad k_0 b_0 \phi_{\max i} - F > 0 \text{ ならば,}$$

$$\phi_B - \phi_{Ti} = \phi_{\max i} \cos \theta_i \text{ とおくと,}$$

$$0 < \theta_i < \theta_{Bi} \text{ に対して,}$$

$$M_i(\phi_B, \phi_{Ti}) = K\phi_{\max i} \cos \theta_i - (K\phi_{\max i} - 2Fb_0)$$

$$\theta_{Bi} < \theta_i < \pi \text{ に対して,}$$

$$M_i(\phi_B, \phi_{Ti}) = -2Fb_0$$

$$\pi < \theta_i < \pi + \theta_{Bi} \text{ に対して,}$$

$$M_i(\phi_B, \phi_{Ti}) = K\phi_{\max i} \cos \theta_i + (K\phi_{\max i} - 2Fb_0)$$

$$\pi + \theta_{Bi} < \theta_i < 2\pi \text{ に対して,}$$

$$M_i(\phi_B, \phi_{Ti}) = 2Fb_0$$

$$\tag{4}$$

また,

$$\theta_{Bi} = \tan^{-1} \{ \sqrt{2x_i - x_i^2 / (1 - x_i)} \} \tag{5}$$

ただし,

$$x_i = 2F / (\phi_{\max i} K_0 b_0) \tag{6}$$

であり, $(\phi_B - \phi_{Ti}) = \phi_{\max i} \cos \theta_i$ に対して,

$$M_i' = 1/\pi \cdot \int_0^{2\pi} M_i(\phi_B, \phi_{Ti}) \cos \theta_i d\theta_i / \phi_{\max i}$$

$$M_i'' = -1/\pi \cdot \int_0^{2\pi} M_i(\phi_B, \phi_{Ti}) \sin \theta_i d\theta_i / \phi_{\max i} \tag{7}$$

を計算すると, $k_0 b_0 \phi_{\max i} - F \leq 0$ ならば, $M_i' = K, M_i'' = 0$, であるが, $k_0 b_0 \phi_{\max i} - F > 0$ ならば,

$$M_i' = K/\pi \cdot (\theta_{Bi} - 1/2 \cdot \sin 2\theta_{Bi})$$

$$M_i'' = K/\pi \cdot \sin^2 \theta_{Bi} \tag{8}$$

となり, 式(1)は線形の微分方程式に変換されたことになる. ただし, $K = 2k_0 b_0^2$

3.2 非線形復原モーメント $M_i(\phi_B, \phi_{Ti})$ の計算式(8)により M_i', M_i'' を求めれば復原モーメント $M_i(\phi_B, \phi_{Ti})$ は決まるが, $M_1(\phi_B, \phi_{T1})$ は車体と前車とのヨーイング運動に対する相対変位に, また $M_2(\phi_B, \phi_{T2})$ は車体と後車とのヨーイングの相対変位に関する量であるから式(3)のままでは式(1)を解くことはできない. そこで, 式(3)を決定するには, $(\phi_B - \phi_{T1})$ と $(\phi_B - \phi_{T2})$ の関係を求めることが必要となる.

そこでいま, $M_i(\phi_B, \phi_{Ti})$ を定数 (複素数) と仮定し, 式(1)に対する定常解の仮定の下に $|\phi_B - \phi_{T1}|$ と $|\phi_B - \phi_{T2}|$ の関係を誘導する. この計算は複雑であるので, 途中の過程を省略し結果のみを示すと相対振幅の実振幅比として次式が得られる.

$$\left| \frac{\psi_B - \psi_{T2}}{\psi_B - \psi_{T1}} \right| = \left| \frac{(X_B' - X_2')^2 + (X_B'' - X_2'')^2}{(X_B' - X_1')^2 + (X_B'' - X_1'')^2} \right|^{1/2} \tag{9}$$

また, 位相角 β は,

$$\beta_i =$$

$$\tan^{-1} \left| \frac{(X_B' - X_1')(X_B'' - X_2'') - (X_B' - X_2')(X_B'' - X_1'')}{(X_B' - X_1')(X_B'' - X_2') + (X_B' + X_1')(X_B'' - X_2'')} \right| \tag{10}$$

ここで,

図2 復原モーメント $M_i(\phi_B, \phi_{Ti})$

$$\begin{aligned}
X_1' &= Q'U' - Q''U'' - R'T' + R''T'' \\
X_1'' &= Q'U'' + Q''U' - R'T'' - R''T' \\
X_2' &= R'S' - R''S'' - P'U' + P''U'' \\
X_2'' &= R'S'' + R''S' - P'U'' - P''U' \\
X_3' &= P'T' - P''T'' - Q'S' + Q''S'' \\
X_3'' &= P'T'' + P''T' - Q'S'' - Q''S'
\end{aligned}$$

および,

$$\begin{aligned}
P' &= L[K_y(-m_{Ti} \omega^2 + M_i) - C_y \omega(2f/v I^2 \omega \\
&\quad + M_i')] - 2fb\gamma/r \cdot M_i' \\
P'' &= L[K_y(2f/v \cdot I^2 \omega + M_i') \\
&\quad + C_y \omega(-m_{Ti} \omega^2 + M_i')] - 2fb\gamma/r \cdot M_i'' \\
Q' &= L[-K_y(-m_{Ti} \omega^2 + M_i) + C_y \omega(2f/v I^2 \omega \\
&\quad + M_i')] - 2fb\gamma/r \cdot M_i' \\
Q'' &= L[-K_y(2f/v \cdot I^2 \omega + M_i') \\
&\quad - C_y \omega(-m_{Ti} \omega^2 + M_i')] - 2fb\gamma/r \cdot M_i'' \\
R' &= 2fb\gamma/r \cdot (-2m_{Bi} i_{Bz}^2 \omega^2 + M_i' + M_i'' + 2K_y L^2) \\
&\quad - L[K_y(M_i' - M_i'') + C_y \omega(M_i' - M_i'')] \\
R'' &= L[-K_y(M_i' - M_i'') - C_y \omega(M_i' - M_i'')] \\
&\quad + 2fb\gamma/r \cdot (M_i' + M_i'' + 2C_y L^2 \omega) \\
S' &= -(-m_{Ti} \omega^2 + K_y)(-m_{Ti} \omega^2 + M_i') \\
&\quad + (2f/v \cdot \omega + C_y \omega)(2f/v \cdot I^2 \omega + M_i') - 4f^2 b\gamma/r \\
S'' &= -(-m_{Ti} \omega^2 + K_y)(2f/v \cdot I^2 \omega + M_i'') \\
&\quad - (2f/v \cdot \omega + C_y \omega)(-m_{Ti} \omega^2 + M_i'') \\
T' &= (-m_{Ti} \omega^2 + K_y)(-m_{Ti} \omega^2 + M_i') \\
&\quad - (2f/v \cdot \omega + C_y \omega)(2f/v \cdot I^2 \omega + M_i'') \\
&\quad + 4f^2 b\gamma/r \\
T'' &= (-m_{Ti} \omega^2 + K_y)(2f/v \cdot I^2 \omega + M_i'') \\
&\quad + (2f/v \cdot \omega + C_y \omega)(-m_{Ti} \omega^2 + M_i'') \\
U' &= (-m_{Ti} \omega^2 + K_y)(M_i' - M_i'') - (2f/v \cdot \omega + C_y \omega) \\
&\quad \times (M_i' - M_i'') - 4LK_y fb\gamma/r \\
U'' &= (-m_{Ti} \omega^2 + K_y)(M_i'' - M_i') + 2f/v \cdot \omega + C_y \omega \\
&\quad \times (M_i' - M_i'') - 4LK_y fb\gamma/r
\end{aligned}$$

.....(11)

ここで, $I^2 = a^2 + b^2$, $i_T = \sqrt{I_T/m_T}$, $i_{Bz} = \sqrt{I_{Bz}/m_B}$

上記の解析により, $M_i(\phi_B, \phi_{Ti})$ を記述関数で表現することにより, 式(1)の第2式, 第4式および第7式に含まれる弾性復原モーメント $M_i(\phi_B, \phi_{Ti})$ は, $|\Psi_B - \Psi_{T1}|$ あるいは $|\Psi_B - \Psi_{T2}|$ のいずれかの関数として表すことができる。

3.3 特性方程式およびその解 式(1)の解を $y_{Ti} = Y_{Ti} e^{\lambda t}$, $\phi_{Ti} = \Psi_{Ti} e^{\lambda t}$... と仮定し, $\dot{y}_{T1} = x_1$, $y_{T1} = x_2$, $\dot{\phi}_{T1} = x_3$, $\phi_{T1} = x_4$... とおき変数変換を行うと,

$$\lambda X = AX \quad \text{.....(12)}$$

となる。ここで, λ は固有値で A および X は,

$$A = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,i} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & & C_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{i,1} & C_{i,2} & & C_{i,i} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \end{bmatrix} \quad \text{.....(13)}$$

であり, X は固有ベクトル, $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, ..., $C_{i,i}$ は車両の諸量によって決まる定数である (ただし, 複素数)。

式(13)を Danilevsky の方法により解くと, 次式に示す複素係数をもつ特性方程式が得られる。

$$\sum_{i=0}^{14} (\bar{A}_{i,1} + j\bar{A}_{i,2}) \lambda^i = 0 \quad \text{.....(14)}$$

ただし, $j = \sqrt{-1}$ である。

式(14)を解くと, 台車の振動, 車体の振動などを示す14組の根 ($\alpha \pm j\omega$ とし, α は実数部, ω は虚数部) が得られるが, 車両の運動の定常状態においては, これらの根の実数部は零にならないといけない。そこで, それぞれの根の実数部が零となるまで繰返し計算を行う。

4. 数 値 計 算

4.1 数値 新幹線車両を例にとり, 次の数値を選ぶ。

$$\begin{aligned}
m_{Tg} &= 10\,848.6 \text{ N} \\
m_{Bg} &= 18\,816 \text{ N} \\
I_{Tg} &= 18\,316.2 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \\
I_{Bxg} &= 44\,256.8 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \\
I_{Bzg} &= 833.98 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \\
r &= 0.455 \text{ m}, a = 1.25 \text{ m} \\
b &= 0.75 \text{ m}, b_0 = 1.415 \text{ m} \\
b_1 &= 1.05 \text{ m}, b_2 = 1.25 \text{ m} \\
h_1 &= 1.204 \text{ m}, h_2 = 0.459 \text{ m} \\
L &= 8.75 \text{ m}, H_B = 1.659 \text{ m} \\
k_1 &= 2\,861.6 \text{ kN/m} \\
k_2 &= 490 \text{ kN/m} \quad k'_2 = 362.6 \text{ kN/m} \\
f &= 16\,464 \text{ kN} \quad \gamma = 0.025 \\
\tau_y = \tau_\phi = \tau_{y\phi} &= 0.02 \text{ s}, F = 4\,900 \text{ N} \\
k_0 &= 980 \text{ kN/m (仮定)}
\end{aligned}$$

4.2 計算結果 計算結果を図3~8に示す。

4.2.1 線形復原モーメントの場合 非線形復原モーメントをもつ車両のだ行動を理解するためには, まず, 線形理論によるだ行動特性を十分に理解しておかなければならない。そこで本節においては線形復原モーメントによる車両だ行動の安定性について述べる。図3は車両走行速度と特性方程式の根との関係を示すものである。前後台車の弾性復原モーメントは線

形であるから、式(8)において、

$$M_1' = M_2' = 2k_0 b_0^2, M_1'' = M_2'' = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

となることはいうまでもない。また特性方程式(14)は $\bar{A}_{1,2} = 0$ となるから、

$$\sum_{i=0}^{14} \bar{A}_{i,1} \lambda^i = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。特性方程式は十四次であるから14個の根が存在するが、いま問題の対象としているだ行動に関係のある根のみを示した。だ行動を大別して二つの形のものがある。すなわち、車体だ行動と台車だ行動である。まず車体だ行動には3種類がある。「下心のローリング」、「上心のローリング」および「ヨーイング」である。この例では「下心のローリング」に関するだ行動は安定 ($\alpha_i < 0$) である。まず車体の上心のローリングを主体とするだ行動が現れる。限界速度は v_2, v_2' である。次に車体のヨーイングを主体とする振動が現れ、その限界速度は v_3, v_3' である。

本数値例による車体だ行動は、車体の固有振動数と台車の幾何学的だ行動の振動数とが一致する付近の速度で不安定度が最大となる。そこで本例による車体の固有振動数を計算する。まずローリングの振動数は、

$$\nu_{y\phi 1,2}^2 = 1/2 \cdot \{ (\nu_y^2 - \nu_\phi^2) \pm \sqrt{(\nu_y^2 - \nu_\phi^2)^2 + 4\varepsilon^2 \nu_y^4} \}$$

であり、ヨーイングに対しては、

$$\nu_\psi^2 = (K_y L^2 + 2k_0 b_0^2) / I_{Bz}$$

であって、ここで

$$\nu_y^2 = K_y / m_B, \nu_\phi^2 = K_\phi / I_{Bx}, \varepsilon = e / i_{Bx}$$

図3 走行速度と特性方程式の根との関係 ($\tau = 0.02s$ の場合)

$$e = K_{y\phi} / K_y, i_{Bx} = \sqrt{I_{Bx} / m_B}$$

であるから、前記の数値を入れて計算すると、

$$\nu_{y\phi} = 4.53 \text{ rad/s} (0.72 \text{ Hz})$$

および $7.04 \text{ rad/s} (1.12 \text{ Hz})$

$$\nu_\psi = 8.25 \text{ rad/s} (1.31 \text{ Hz})$$

となる。また、台車の幾何学的だ行動の波長 S_2 は、

$$S_2 = 2\pi \sqrt{br/\gamma \cdot (1 + a^2/b^2)} = 45.1 \text{ m}$$

であるから、限界速度の推定値は、

$$v_1 = \nu_{y\phi 1} / 2\pi \cdot S_2 = 32.5 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \nu_{y\phi 2} / 2\pi \cdot S_2 = 50.5 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \nu_\psi / 2\pi \cdot S_2 = 59.2 \text{ m/s}$$

となる (これは、ダンピングを無視した近似値)。

最後に台車だ行動には二つのモードがあり、一つは前後台車逆位相、他の一つは同位相のもので、これらの限界速度を v_4 および v_5 で示す。この振動は限界速度を越えると再び安定とならないことがわかる ($\alpha_{4,5} > 0$)。

台車のヨーイングの固有振動数は、 $\nu_T = \sqrt{2k_0 b_0^2 / I_T} = 14.64 \text{ rad/s} (2.33 \text{ Hz})$ であるから、限界速度は近似的に

$$v_{3,4} = \nu_T / 2\pi \cdot S_2 = 105.1 \text{ m/s}$$

となる。

4.2.2 非線形復原モーメントによるだ行動速度

図4~8は、ばね-摩擦直列結合による復原モーメントの非線形性を考慮した場合の計算結果を示す。

図4 ($\tau = 0.02s$ とする) は前台車と車体のヨーイングとの相対角振幅 $|\psi_B - \psi_{T1}|$ とだ行動速度 (線形理論における限界速度) との関係を示す。微小角振幅では

図4 相対角振幅とだ行動速度との関係 ($\tau = 0.02s$ の場合)

$M_1(\phi_B, \psi_{T1}), M_2(\phi_B, \psi_{T2})$ は線形であり, この例では 5 個の限界速度が現れることは前述のとおりである。

まず, 車体のローリングを主体とするだ行動について考察する。この例では微小角振幅に対しては, 下心のローリングを主体とするだ行動は安定である。角振幅が増大し $|\psi_B - \psi_{T1}| > 0.0036 \text{ rad}$ となると側受到に滑りが起こり弾性復原モーメントの非線形性が現れる。まず v_1 に対応するだ行動速度は角振幅の増大とともに低下するが, これは式(8)の M_i が角振幅の増加とともに減少 (弾性復原モーメントの減少) するからである。これに対し, 上部のだ行動速度 v_1' は 0.008 rad 付近において極値をとるが, 角振幅の増加とともにほぼ一定値に近づいていく。このように線形理論では車体の下心のローリングを主体とするだ行動は安定であっても, 弾性復原力の非線形性を考慮すると, 台車の大振幅の運動に対しては車体だ行動が発生し, 角振幅の増大とともに不安定域が広がることがわかる。

次に車体の上心のローリングに対応するだ行動速度は, v_2, v_2' 間で起こる。角振幅の増加に伴い不安定域が広がることは下心のローリングの場合と同様である。 v_2 は角振幅の増加に伴いだ行動速度はわずかに低下する。しかし, v_2' はやや複雑である。すなわち, $M_i(\phi_B, \psi_{Ti})$ の線形から非線形域に入る状態でわずかに不安定域が減少し, その後, 角振幅の増加とともに急激に不安定域が広がる。このように, ばね-摩擦直列結合による非線形特性を考慮すると, 車体のローリング特に上心のローリングを主体とするだ行動が顕著に現れることがわかる。

つぎに, v_3 および v_3' で車体のヨーイングが現れる。この特性は車体のローリングの場合と全く同様である。

最後に台車だ行動が現れる。 v_4 は前後台車逆位相, v_5 は同位相のものを示す。これより台車だ行動についても, だ行動速度は角振幅に依存し, $|\psi_B - \psi_{T1}|$ が $F/k_0 b_0$ より小さければ上限 (v_4 あるいは v_5) は一定値をとるが, $|\psi_B - \psi_{T1}|$ の増加とともにだ行動速度は次第に低下する。

以上のように車体と台車との相対角振幅が増大すると, だ行動速度は振幅の増大とともに低下し, 特に車体だ行動速度が低速度から発生しやすくなるので, 車体だ行動防止に注意を払うことが重要である。本計算例では $k_0 = 980 \text{ kN/m}$ とし, 台車は剛体二軸台車として取扱ったが, 新幹線台車においては, $k_0 = 2940 \sim 4900 \text{ kN/m}$ を目標とし, かつ輪軸は台車枠に対して前後および左右方向に弾性支持された構造の台車が用いられているので, 文献(6)に示すように低速から

だ行動が発生することはない。

4.2.3 だ行動の振動数と波長 図5は角振幅と振動数との関係を示す。まず下心のローリングについて考察する。微小振幅 (線形領域) においてはだ行動は安定であるから特に問題外である。角振幅が増大すると, だ行動速度 v_1 に対応する振動数 ω_1 は次第に低下し, 二軸台車の幾何学的だ行動の振動数 $\omega = 2\pi S_2/v$ に, また, 下心のローリングの上部速度 v_1' に対応する振動数 ω_1' は角振幅に無関係にほぼ一定値をとり, その振動数は $4 \cdot 2 \cdot 1$ 項で計算した車体のローリングの固有振動数 4.53 rad/s (0.72 Hz) に一致する。次に車体の上心のローリングを主体とするだ行動速度 v_2 に対応する振動数 ω_2 は幾何学的だ行動の振動数にほぼ一致するが, 角振幅の増大とともに車体の下心のローリングの固有振動数に近づいていく。これに対し v_2' に対応する ω_2' は車体の上心の固有振動数 7.04 rad/s (1.12 Hz) に一致する。

だ行動速度 v_3 に対応する ω_3 は, 角振幅の増大とともに, 次第に低下し幾何学的だ行動の振動数に近づいていく。また v_3' に対応する ω_3' は角振幅の増大とともにわずかに増大し, これは車体のヨーイングの固有振動数 8.25 rad/s (1.31 Hz) にほぼ一致する。さらに台車だ行動速度の振動数 ω_4, ω_5 は幾何学的だ行動の振動数にほぼ一致し, 角振幅の増大につれ振動数も低下する。

上記のように車体だ行動の振動数は, ばね-摩擦直列結合による復原モーメントの非線形の影響を受け, 角振幅に応じ複雑に変化する。

図5 相対角振幅とだ行動振動数との関係 ($r=0.02 \text{ s}$ の場合)

図6は相対角振幅とだ行動速度における波長との関係を示したものである。まず下心のローリングに対する波長 S_{11} は角振幅の増加につれて台車の幾何学的波長に近づいてゆくが、上限の速度 v_1 に対応する波長 S'_{11} は $|\psi_B - \psi_{T1}| = 0.008$ rad 付近で極値をとるがこの値を超えると波長は次第に短くなってゆく。また上心のローリング波長 S_{21} は弾性復原モーメントの線形領域を超えると短くなるが、その後角振幅の増加とともにわずかに長くなり、二軸台車の波長に近づいてゆく。車体のヨーイングに対してもほぼ同様の傾向を示す。台車だ行動の波長は線形領域を超えると短くなるが、これは二軸台車の波長にほぼ近い。

上記のほか、 v_2, v_3 に対応する S'_{21}, S'_{31} があるが、この波長は 70~80 m であるので本図では省略した。

図7は前後台車の角振幅比 $\phi = |\psi_B - \psi_{T2}| / |\psi_B - \psi_{T1}|$ と $|\psi_B - \psi_{T1}|$ との関係を示したものである。車体の上心のローリングおよびヨーイングに対する相対振幅比は、角振幅が増大しだ行動速度が低下(図4)すると前車台が後車台より大きく振れる。これに対し、下心のローリングおよび台車だ行動に対するものは、前後台車ともほぼ同程度の振動をする。高速度域においては、前車台より後車台の方が振動振幅が大きいことは経験的によく知られた事実である。その他位相特性が得られたが、ここでは省略する。

図8は車体支持装置のダンピングの影響を示すもので、この図では $\tau = 0.01$ s の例を示す。このようにダンピングが小さくなると低速から車体だ行動が現われ、かつ、角振幅の増大と共に $\tau = 0.02$ s の場合(図4)に比べ、不安定域が広がることがわかる。

図6 相対角振幅とだ行動波長との関係 ($\tau = 0.02$ s の場合)

5. リミットサイクルの安定性

リミットサイクルが安定であるか不安定であるかは車両の走行安定性を検討するうえで重要である。すなわち定常解付近において微小振幅を与えたとき振動がリミットサイクルに近づくか、あるいは遠ざかるかである。そこで図4により、まず車体の上心のローリングについて考察する。いま車両が一定速度 v で走行しているとする。 $v < v_2$ であればだ行動はもちろん安定である(線形領域に対し $M'_1 = 2k_0 b_0^2$, $M''_1 = 0$, $\alpha_1 < 0$)。しかし、式(8)に示すように、 M'_1, M''_1 は角振幅の関数となっており、角振幅の増大とともに M'_1, M''_1 も変動

図7 前車台角振幅と前後車台振幅比の関係 ($\tau = 0.02$ s の場合)

図8 相対角振幅とだ行動速度との関係 ($\tau = 0.01$ s の場合)

する。そこで、いま線形域から非線形域に移る境界の $|\psi_B - \psi_{T1}|$ を $\psi_{\max 0}$ とし、微小角 $\Delta|\psi_B - \psi_{T1}|$ の増分に対する $\psi_{\max 0}$ を $\psi_{\max 1} (= \psi_{\max 0} + \Delta|\psi_B - \psi_{T1}|)$ とする。角振幅 $\psi_{\max 1}$ におけるだ行動速度を v_{21} とすると $\psi_{\max 1}$ の微小角の減少により振動は減衰し、また微小角の増分に対しだ行動は発散する。すなわち、 v_{21} を境とし $|\psi_B - \psi_{T1}| < \psi_{\max 1}$ であれば上心のローリングは安定であるが、これと反対に $|\psi_B - \psi_{T1}| > \psi_{\max 1}$ では不安定となりだ行動は発散する。すなわち v_{21} は不安定なリミットサイクルである (上記に関する証明は、1/2 車両について行った理論解析⁽¹⁰⁾ により説明することができる)。一方、上部速度 v_2 についてはやや複雑である。まず $|\psi_B - \psi_{T1}| < \psi_{\max 0}$ のとき v_2 で定常振動を行うことは線形理論の示すとおりである。そこで $\Delta|\psi_B - \psi_{T1}|$ の増分に対し $\psi_{\max 1}$ で定常解が存在するものとし、これを v_{22} (Q 点) とする。しかるとき $v_{22} > v_2$ であるから振動は減衰する。一方、 $\psi_{\max 1}$ の微小角の増分に対しだ行動は発散し R 点達する。ゆえに Q 点においては不安定なリミットサイクル、R 点においては安定なリミットサイクルが存在する。上記のように上心ローリングの上部だ行動速度については S 点 (リミットサイクルの極大値) を境とし、これより左側では不安定なリミットサイクル、右側では安定なリミットサイクルとなる。

ヨーイングについても傾向は同様である。

台車だ行動については、 $v_4, v_5 (|\psi_B - \psi_{T1}| < \psi_{\max 0})$ に限界速度が存在するが、 $|\psi_B - \psi_{T1}| > \psi_{\max 0}$ では不安定なリミットサイクルが存在することは文献(9)に示すとおりである。

6. あ と が き

台車のヨーイング運動に対し、ばねと摩擦とが直列に結合された、いわゆる側受支持車両について、記述関数法を用いて解析したところ、従来未解明であった車両のだ行動現象が明らかにされた。本論文での解析結果によれば、車両の走行安定性は台車と車体との相対角振幅に依存し、特に非線形特性は車両だ行動に及ぼす影響が顕著であることがわかった。また、車体支

持装置のダンピングを増大することにより、微小振幅時における車体の下心のローリングを主体とするだ行動を消滅させることができるが、台車の角振幅が増大するとだ行動が発生することがわかった。また、車体支持装置のダンピングが小さすぎると車体だ行動の不安定域が広がるので、不安定域を狭くし、かつだ行動速度を高くするにはダンピングを大きくすることが必要である。

また、車体の下部だ行動に対するリミットサイクルは不安定リミットサイクルに対応し、上部だ行動速度は、角振幅の大きさにより安定あるいは不安定リミットサイクルになることがわかった。一方、台車だ行動速度は角振幅の増大とともに低下するが、これは車体支持装置のダンピングには、ほとんど左右されない。その他、リミットサイクルにおける振動数、波長、前後台車の相対振幅比などが求められた。

本論文では剛体二軸台車をもつボギー車として解析したが、実物車両では輪軸は台車枠に弾性支持されたものである。さらにボギー車のだ行動現象の深度化を図るためには、一般的構造をもつボギー車について解析を行うとともに、台車の大振幅の運動によるクリープ力の非線形を考慮したものについて理論的検討をすることが、今後の課題となるであろう。

末筆ながら、本論文をまとめるに当たり協力いただいた新潟大学大学院学生、進藤宏史君に心から感謝の意を表する次第である。

文 献

- (1) Hedrick, J. K., *Trans. ASME, J.* 101-3 (1979), 230
- (2) D'souza, A. F., *Trans. ASME, J.* 102-1 (1980), 77
- (3) Young, J. A., *Trans. ASME, J.* 103-1 (1981), 39
- (4) Whitman, A. M., *Trans. ASME, J.* 105-2 (1983), 120
- (5) 松平・横瀬, 東海道新幹線に関する研究, 第4冊, (昭38), 221.
- (6) 横瀬, 機論, 36-291 (昭45), 1836.
- (7) 松平・横瀬, 東海道新幹線に関する研究, 第5冊, (昭39), 331.
- (8) 横瀬, 機論, 35-279 (昭44), 2190.
- (9) 横瀬・野本・進藤, 機論, 52-476, C (昭61), 1312.
- (10) 横瀬・進藤, 機論, 52-482, C (昭61), 2662.

討 論

(質問) 谷 藤 克 也 (鉄道技術研究所)

自由度の多いボギー車について、非線形性を考慮した複雑な解析をされたことに敬意を表す。以下の点についてご教示いただきたい。

- (1) 式(14)の解法において、各根の実数部が零になるまでの繰返しの手順について。
- (2) ダンピング時定数の $\tau = 0.02$ s は、検討の計算諸元に対し、具体的な減衰要素としてはいかなる値

と想定されるものか、また、ダンピングの効果における3種の τ の影響の大きさについて。

(3) たとえば、図4で角振幅が大きくなった場合、40 m/sおよび80 m/sで現れる蛇行動のモードは何か、非線形を考慮した場合の安定性の余有度について。

〔回答〕 (1) 計算手順は以下のとおりである。

(i) まず初期値を $|\psi_B - \psi_{T2}| = 0$ とし、任意の速度 v を設定する。

(ii) $M_i(\phi_B, \psi_{Ti})$ [式(3)]を計算し、式(14)の係数をDanilevskyの方法により求める。式(14)を解いて方程式の根の実部が正か負かを判定し、もしある一つの根の実部が零にならなければ v を小刻みに増減し(ii)を繰返す。

(iii) 定常状態においては式(9)は一定値をとるので、一定値になるまで $|\psi_B - \psi_{T2}|$ を変えて(ii)を繰返す。

(iv) 条件(iii)を満足したところで $\alpha_i = 0$ に対応する ω_i を求め、これをミットサイクルの振動数とする。同様の操作をそれぞれの根について実行する。

(2) 車体支持装置のばね系(k_1, k_2, k_2)に一樣な比率のダンピング(それぞれのばね系に対応するダンピング係数を c_1, c_2, c_2' とする)が入ったことを想定したものである。たとえば、 $\tau = c_y/K_y = 0.02$ sとすると、 $c_1 = 57.23$ kN・s/m, $c_2 = 9.8$ kN・s/m, $c_2' = 7.25$ kN・s/

mとなる。また、本計算においては $\tau = 0.01$ s, 0.02 sの2種類について計算を行ったが、 $\tau = 0.02$ s(図4)では、 $\tau = 0.01$ s(図8)の場合に比べ、 $|\psi_B - \psi_{T1}|$ の値にほぼ無関係に τ が大きいほど蛇行動速度 v は上昇、すなわち安定範囲が広がる。この傾向は線形範囲で特に顕著である。本文には記していないが、 $\tau = 0$ とすれば $v = 35$ m/s付近より蛇行動(下心ローリング)が発生し、車体蛇行動は各モードとも再び安定となることはない。このことより、 τ は車体蛇行動の安定範囲を広げる効果がある。

(3) 非線形範囲において $|\psi_B - \psi_{T1}| > 0.01$ radとすると、 $v = 40$ m/s付近で2種類の蛇行動が現れる。 $v < 40$ m/sについては車体の上心のローリングを主体とするもの、 $v > 40$ m/sでは下心のローリングを主体とするものである。また $v = 80$ m/s付近のものは車体の上心のローリングを主体とする振動である。つぎに、非線形を考慮した安定の余有度は、本論文では特に計算してはいないが、解析法についてはすでに文献(付1)、(付2)で詳細に述べている。これらの結果によれば、余有度をいかに選ぶかにより蛇行動速度は極端に低下する。余有度をいかにすべきかについて確立された文献もなく、また実験的に検討されたものもない。

(付1) 横瀬, 機論, 35-279 (昭44), 2190.

(付2) 横瀬・進藤, 機論, 52-482, C(昭61), 2662.