n ステージ直列自動生産ラインの最適バッファ配分の近似解法*

山下 英明**, 鈴木 誠道**

An Approximate Solution Method for Optimal Buffer Allocation
in Serial n -stage Automatic Production Lines

Hideaki YAMASHITA and Shigemichi SUZUKI

In this paper we consider the allocation of buffer capacities in a serial, synchronized, automatic production line with buffer storages between adjacent stages. It is assumed that every stage has a geometric distribution of up time. The measure of line efficiency is the maximum output rate from the last stage of the line in the steady state which is referred to as production rate. First, we develop in this paper a new efficient method of calculation of production rate which is suitable for applying dynamic programming approaches. Then, we propose an approximate solution method for optimal buffer allocation so as to maximize production rate applicable even to long lines with many buffer storages and a large total buffer capacity by applying dynamic programming techniques. We confirm the validity of the approach by comparing the solutions obtained by the present method with those obtained by computer simulation for many example problems.

Key Words: Production System, Production Rate, Dynamic Programming Techniques, Buffer Allocation

1. 緒 言

本論文では、図1に示すように仕掛品を加工するステージと仕掛品を一時的にたくわえられるバッファから構成される直列自動生産ラインを考察する。このような生産ラインでは、各ステージで加工を受けた仕掛品は自動的に下流のステージに進もうとするが、下流のステージに加工待ちの仕掛品の待ち行列がある場合は一時的にバッファに留まる。一般にこの種の生産ラインは大量生産に適し、現場でも広く用いられている。この直列自動生産ラインの生産率を増加させるためには、ステージの性能の向上やバッファの容量の増加などの手段が有効であるが、これらの手段を講ずるには費用の増加を伴う。したがって、バッファの総容量を制限し、総容量を生産率が最大になるように各バッファに配分することは重要である。本報ではこれを最適バッファ配分問題と呼ぶ。この問題に対する効率的な解法は、著者らの知る限りまだ公にされていない。本論文では、動的計画法を活用して最適バッファ配分を求める効率的な新しい近似解法を提案する。

最適バッファ配分問題をうまく取扱うためには、各バッファの個数を固定した生産ラインの生産率を適切に評価することが肝要である。自動生産ラインの生産率やバッファの配置に関する研究はすでに数多く行われているが、その多くは中間にバッファを有する2ステージ生産ラインについて生産率を求める解析手法を示したものである⁽¹⁾⁻⁽³⁾⁽⁷⁾。しかし、これらの手法を3ステージ以上の直列生産ラインに適用するのは、計算の複雑さから事実上不可能である。

3ステージ以上の直列生産ラインの解析には、以下のようなものがある。まず Soyster-Toof⁽⁶⁾は、1箇所だけバッファを設けるときの最適位置を求めた。また Sheskin⁽⁴⁾は、各ステージ間にバッファを設ける生産ラインモデルについて生産率の厳密解を求める Compression 法と近似解を求める Decomposition 法を示し、バッファの総容量をさまざまに配分して生産率を比較した。しかしこの手法で最適バッファ配分問題を扱うためには、考えられるすべての配分について生産

図1 n ステージ直列自動生産ライン

* 昭和61年10月6日 第64期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和61年1月27日。

** 正員、上智大学理工学部 (〒102 東京都千代田区紀尾井町7-1)。

率を求めなければならず、バッファ数やバッファ総容量が大きいモデルでは膨大な計算が必要となる。Soyster⁽⁵⁾は、近似関数を用いて生産率と最適バッファ配分の近似解を求めた。しかしこの手法で得たバッファ配分は、最適バッファ配分と大きく異なることがある。

本研究では以上に述べた問題点を解決して、バッファ数やバッファ総容量が大きい生産ラインに対しても容易な計算で最適バッファ配分に極めて近い配分を得ることのできる方法を開発することを主目的としている(4章)。この方法では動的計画法を適用しており、動的計画法が容易に適用できる生産率の精度の高い計算法が一つのキーポイントとなっている(3章)。

本解法の妥当性を検討するためにコンピュータシミュレーションを行い、近似解とシミュレーション結果を比較検討している(5章)。まず、対象とする生産ラインモデルの説明から始める。

2. 生産ラインモデル

本報で扱う自動生産ラインモデルは同一種類の加工物のみを加工するモデルであり、加工時間、故障、生産ラインへの未加工品の供給、生産ラインからの完成品の出力などに関して、Sheskin⁽⁴⁾のモデルと同じである。両者の違いは、本モデルではステージがステージ内の仕掛品に対して一時的にバッファの役割をも果たすが、Sheskinのモデルではステージがこのような役割をしないという点である。

本モデルにおける仮定と記号を以下に示す。

(1) n 個のステージのうち、加工時間が最大であるステージの加工時間を生産ラインの周期と定義する。

(2) バッファ i の容量を N_i で表す ($i=2, 3, \dots, n$)。

(3) ステージの状態は加工可能状態か加工不可能状態のいずれかであり、この状態は周期を通して変化しない。任意の周期にステージ i が加工可能状態である確率を A_i とし、加工不可能状態である確率を $1-A_i$ とする。 A_i は前の周期のステージの状態に独立である。したがって、ステージ i の加工可能状態である時間の分布は、パラメータ A_i の幾何分布となる。

(4) 周期の初めにステージ i に未加工の仕掛品がある場合、ステージ i が加工可能状態であればその仕掛品は加工を受け、加工不可能状態であれば次の周期までステージ i で待機する。ステージ i が加工可能状態であっても未加工の仕掛品がない場合、ステージ i は稼働できない。このときステージ i はスタービング

(Starving) 状態であるという。

(5) 周期の終わりに、ステージ i で加工を受けた仕掛品は、バッファ $i+1$ に空きがあればそこに移動し、空きがなければ次の周期の終わりまでステージ i で待機する。このときステージ i はブロッキング(Blocking)状態であるという。また、周期の終わりにバッファ i に仕掛品がある場合、ステージ i に空きがあればその仕掛品のうち1個がステージ i に移動する。これらの仕掛品の移動は、1個ずつ、すべての仕掛品が移動できなくなるまで、加工時間に比べて無視できるほど小さい時間内に行われる。

(6) ステージ1が加工可能状態であれば、未加工品が生産ライン外からステージ1に供給され、最終ステージに完成品があれば、それは周期の終わりに生産ラインから出力される。

(7) 生産率を、任意の周期に最終ステージ n から完成品が流出する確率と定義する。

3. 生産率の近似解法

この章では、前述のモデルについて生産率の近似解法を示す。ステージに供給される仕掛品が常に存在し、各ステージが単独に働いているという条件のもとで、任意の周期にステージから仕掛品が流出する確率をそのステージの性能と定義する。ここで、ステージ i の性能は A_i と等しい。実際には、仕掛品はどの周期にもステージに供給されるとは限らない。そこで P_i を任意の周期の初めにステージ i に仕掛品があり、かつその仕掛品がその周期で加工される確率と定義する。

最初のステージ1には常に加工すべき仕掛品があるので、明らかに次式が成立する。

$$P_1 = A_1 \dots\dots\dots (1)$$

最終ステージ n には出力の制限はないので、 P_n が求めるべき生産ラインの生産率となる。

次に P_2 について考える。いま $X_{i,j}$ を、 $X_{i,j} \leq N_i + 1$ の場合は周期 j の初めにおけるバッファ i とステージ i にある仕掛品の個数と定義し、 $X_{i,j} = N_i + 2$ はステージ i とバッファ i に空きがなくかつステージ $i-1$ がブロッキング状態であることを意味すると定義する。また W_i を、周期の初めにステージ i に加工すべき仕掛品があるという条件のもとで、その周期にその仕掛品がステージ i から流出する確率と定義する。もしステージ i がブロッキング状態になる確率を無視すると、 W_i はステージ i の性能と等しくなる。すなわち、

$$W_i = A_i \dots\dots\dots (2)$$

ここで $X_{2,j}$ の値の推移確率を考えると、次の関係を得

る。

$$\left. \begin{aligned} P[x_{2,j+1}=1|x_{2,j}=0] &= P_1 \\ P[x_{2,j+1}=0|x_{2,j}=0] &= 1-P_1 \\ P[x_{2,j+1}=N_2+1|x_{2,j}=N_2+2] &= W_2 \\ P[x_{2,j+1}=N_2+2|x_{2,j}=N_2+2] &= 1-W_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

$1 \leq l \leq N_2+1$ において

$$\left. \begin{aligned} P[x_{2,j+1}=l+1|x_{2,j}=l] &= P_1(1-W_2)=\lambda_2 \\ P[x_{2,j+1}=l-1|x_{2,j}=l] &= (1-P_1)W_2=\mu_2 \\ P[x_{2,j+1}=l|x_{2,j}=l] &= 1-\lambda_2-\mu_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

式(3), (4)より, 図2に示すような $X_{2,j}$ の状態推移図が得られる。図2について平衡状態方程式をたて, これを解くと, $X_{2,j}$ の平衡状態確率 X_2 を得る。この結果, 少なくともステージ2には仕掛品がある確率は,

$$\left. \begin{aligned} K_2 \neq 1: \\ P[X_2 \geq 1] &= \frac{\rho_2(1-\rho_2 K_2^{N_2+1})}{1-\rho_2^2 K_2^{N_2+1}} \\ K_2 = 1: \\ P[X_2 \geq 1] &= \frac{1-W_2+N_2+1}{2(1-W_2)+N_2+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} K_2 &= \lambda_2/\mu_2 \\ \rho_2 &= P_1/W_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

したがって, P_2 は次式から計算される^{*1}。

$$P_2 = A_2 P[X_2 \geq 1] \dots\dots\dots (7)$$

次に P_3 を求める。図1において, ステージ1, バッファ2, ステージ2 を一つのステージとみなし, P_2 が既知であることを考慮すれば, P_3 は P_2 と同様にして求められる。同様な手順が $P_4, P_5, \dots, P_n$ に対して順に適用できるので, 所望の生産率は次式から計算される。

$$P_i = A_i P[X_i \geq 1] \dots\dots\dots (8)$$

ここに, $P[X_i \geq 1], K_i$ および ρ_i は式(5), (6)において添字2に添字 i を代入した式から計算できる。

上述の解析では, ステージ i がブロッキング状態になる可能性を考慮していない。つまり, この段階では W_i は仕掛品が実際にステージ i から流出する確率ではなく, バッファ $i+1$ に空きがあるという条件のも

とで仕掛品が流出する確率になっている。したがって上述の解析で得られる生産率は, 第一次近似解である。いま図2と同様に, バッファ $i+1$ とステージ $i+1$ 内の仕掛品の個数, すなわち X_{i+1} についての状態推移図を考えると, ステージ i がブロッキング状態である確率は次式で表現できる。

$$\left. \begin{aligned} K_{i+1} \neq 1: \\ P[X_{i+1}=N_{i+1}+2] &= \frac{\rho_{i+1} K_{i+1}^{N_{i+1}+1} (1-\rho_{i+1})}{1-\rho_{i+1}^2 K_{i+1}^{N_{i+1}+1}} \\ K_{i+1} = 1: \\ P[X_{i+1}=N_{i+1}+2] &= \frac{1-W_{i+1}}{2(1-W_{i+1})+N_{i+1}+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

仕掛品が実際にステージ i から流出する確率のよりよい近似は, 次式から得られる。

$$W_i = A_i (1-P[X_{i+1}=N_{i+1}+2]) \dots\dots\dots (10)$$

式(9), (10)を用いて, W_i は $i=n-1$ の場合から順に修正計算できる。ステージ n はブロッキング状態にならないので, W_n は修正計算する必要はない。そこでまず式(9)を用いて $P[X_n=N_n+2]$ を計算し, 次に式(10)を用いて W_{n-1} を計算する。同様に $P[X_{n-1}=N_{n-1}+2], W_{n-2}, P[X_{n-2}=N_{n-2}+2], W_{n-3}, \dots, P[X_3=N_3+2], W_2$ を順次計算する。このようにして求められた W_i を上述の P_i の逐次計算に用いることによって, 第二次近似解を得ることができる。この計算手順を生産率が収束するまで繰返すことにより高精度の解が得られる。なお, 本解法は恣意的な初期値を必要としない。

この解法は, Sheskin⁽⁴⁾の解法と次の点で異なる。ステージ i がブロッキング状態である確率を修正計算するとき, Sheskin の解法ではステージ i より下流のすべてのバッファとステージに関する確率を用いるのに対し, 本解法ではステージ i に隣接する下流のバッファ $i+1$ とステージ $i+1$ に関する確率だけを用いる。本解法では, 他の下流の情報はこれらのステージとバッファの情報に含まれているからである。それゆえ, 本解法では P_i が P_{i-1} とステージ i に関するパラメータだけで表現され, 式(8)のような P_i を計算するための帰納的方程式が得られる。この帰納的方程式は, バッファ配分問題における動的計画法の適用を可能にする。この点が Sheskin の解法と異なる本解法の著しい特徴である。

図2 $X_{2,j}$ の状態推移図

^{*1} 論文(6)とほぼ同様の式であるが, モデルが若干相異なるので表現も異なる。

4. バッファ配分問題

この章では生産率を最大にするバッファ配分問題を扱う。本解法では動的計画法を適用している。これによってバッファ数やバッファ総容量が大きい生産ラインに対しても容易に近似解を得ることが可能となった。

まずバッファ総容量を N_s で表し、バッファ 2 からバッファ i までに配分したバッファ容量の和を S_i で表す。すなわち

$$\left. \begin{aligned} S_i &= N_2 + N_3 + \cdots + N_i \\ S_n &= N_s \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (11)$$

またバッファ容量 S_i を最初の $i-1$ 個のバッファに最適に配分した場合の状態確率 P_i の値を P_{i,S_i} と表す。 n ステージ生産ラインの生産率は、 $N_2, N_3, \cdots, N_{n-1}, N_n$ および $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ の関数であるから $F_n(A_1, A_2, \cdots, A_n; N_2, N_3, \cdots, N_n)$ と表すと、 A_i が与えられたとき、バッファ配分問題は次式を満足するような $N_2, N_3, \cdots, N_n$ を求める問題となる。

$$\begin{aligned} P_{n,S_n} &= \max F_n(A_1, \cdots, A_n; N_2, \cdots, N_n) \cdots \cdots \cdots (12) \\ \sum_{j=2}^n N_j &= S_n \end{aligned}$$

いま n のかわりに $i (i=2, 3, \cdots, n)$ の場合を考えると、次式を得る。

$$\begin{aligned} P_{i,S_i} &= \max F_i(A_1, \cdots, A_i; N_2, \cdots, N_i) \cdots \cdots \cdots (13) \\ \sum_{j=2}^i N_j &= S_i \end{aligned}$$

また $F_i(A_1, \cdots, A_i; N_2, \cdots, N_i)$ は、 $F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1}; N_2, \cdots, N_{i-1})$ 、 A_i および N_i の関数でもあるので、 P_{i,S_i} は次式のようにも表現できる。

$$\begin{aligned} P_{i,S_i} &= \max G\{F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1}), A_i, N_i\} \cdots \cdots \cdots (14) \\ \sum_{j=2}^i N_j &= S_i \end{aligned}$$

ここに式(5)～(8)より

$$G\{F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1}), A_i, N_i\} = A_i P[X_i \geq 1] \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} K_i \neq 1 : P[X_i \geq 1] &= \frac{\rho_i(1 - \rho_i K_i^{N_i+1})}{1 - \rho_i^{N_i+1} K_i^{N_i+1}} \\ K_i = 1 : P[X_i \geq 1] &= \frac{1 - W_i + N_i + 1}{2(1 - W_i) + N_i + 1} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \frac{F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1})(1 - W_i)}{\{1 - F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1})\} W_i} \\ \rho_i &= F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1}) / W_i \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (17)$$

さらに N_i を固定したとき、 $G\{F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1}), A_i, N_i\}$ は $F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1})$ の単調増加関数になることから*2、 P_{i,S_i} は次式のように表現される。

$$\begin{aligned} P_{i,S_i} &= \max G\{\max F_{i-1}(A_1, \cdots, A_{i-1}), A_i, N_i\} \\ 0 \leq N_i \leq S_i, \quad \sum_{j=2}^{i-1} N_j &= S_i - N_i \\ &= \max G(P_{i-1,S_i-N_i}, A_i, N_i) \cdots \cdots \cdots (18) \\ 0 \leq N_i \leq S_i \end{aligned}$$

$P_{2,S_2} = G(P_1, A_2, N_2)$ から始めて、式(18)を帰納的に適用すると、生産率の第一次近似解を最大にするようなバッファ配分とその時の生産率を得る。次に、上述の手順により式(9)、(10)を用いて W_i を求め、同様に生産率の第二次近似解を最大にするようなバッファ配分とその時の生産率を得る。この計算手順を生産

率が収束するまで繰返すことにより、最適バッファ配分問題の近似解を求めることができる。

バッファ配分問題の計算手順を以下に示す。

〈手順1〉 $G(P_1, A_2, N_2)$ を $S_2 = N_2 = 0, 1, 2, \cdots, N_s$ について計算し、 $P_{2,S_2} = G(P_1, A_2, N_2)$ とおく。 $i=3$ とおく。

〈手順2〉 $S_i = 0$ とおく。

〈手順3〉 $G(P_{i-1,S_i-N_i}, A_i, N_i)$ を $N_i = 0, 1, \cdots, S_i$ に

*2 証明を付録に示す。

表 1 近似解法とシミュレーションによる生産率の比較

Case Specification	Case(1)				Case(2)				Case(3)			
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
	0.9	0.9	0.9	0.9	0.8	0.85	0.9	0.95	0.6	0.7	0.8	0.9
Approximate Solution Method	N ₂ N ₃ N ₄				N ₂ N ₃ N ₄				N ₂ N ₃ N ₄			
	3	3	3		5	3	1		5	3	1	
	0.8624				0.7930				0.5941			
Computer Simulation	0.8652 ± 0.0009				0.7950 ± 0.0015				0.5960 ± 0.0018			
Error	-0.0028 ± 0.0009				-0.0020 ± 0.0015				-0.0019 ± 0.0018			
Relative Error (%)	-0.32 ± 0.10				-0.25 ± 0.19				-0.32 ± 0.30			

表 2 動的計画法を適用して得た準最適バッファ配分

Case(4)						Case(5)					
A ₁	A ₂	A ₃	A ₄			A ₁	A ₂	A ₃	A ₄		
0.9	0.9	0.9	0.9			0.95	0.95	0.8	0.95		
N _s	N ₂	N ₃	N ₄	Produc. Rate		N _s	N ₂	N ₃	N ₄	Produc. Rate	
6	*2	2	2	0.8490		6	*1	3	2	0.7989	
	1	3	2	0.8461			0	4	2	0.7985	
	2	3	1	0.8461			1	2	3	0.7984	
	1	2	3	0.8435			0	3	3	0.7982	
	3	2	1	0.8435			2	2	2	0.7980	
	2	1	3	0.8422			1	4	2	0.7951	
	3	1	2	0.8422			2	3	1	0.7949	
9	3	3	3	0.8623		9	*1	4	4	0.7999	
	2	4	3	0.8614			1	5	3	0.7998	
	3	4	2	0.8614			1	3	5	0.7997	
	*2	3	4	0.8600			2	3	4	0.7997	
	4	3	2	0.8600			2	4	3	0.7997	
	3	2	4	0.8592			0	4	5	0.7994	
	4	2	3	0.8592			0	5	4	0.7994	

ついてそれぞれ計算し、 P_{i,S_i} を求める。

〈手順4〉 $S_i = N_s$ ならば、手順5へとぶ。

$S_i < N_s$ ならば、 $S_i = S_i + 1$ とおき、手順3へ戻る。

〈手順5〉 $i = n$ ならば、手順6へとぶ。 $i < n$ ならば、 $i = i + 1$ とおき、手順2へ戻る。

〈手順6〉 P_{n,N_s} が収束したら終了する。

〈手順7〉 $i = n - 1$ とおく。

〈手順8〉 P_{i,S_i} と W_{i+1} を用いて $P[X_{i+1} = N_{i+1} + 2]$ を計算する。 A_i と $P[X_{i+1} = N_{i+1} + 2]$ を用いて W_i を計算する。 $W_i = W_i'$ とおく。

〈手順9〉 $i = 2$ ならば、手順1へ戻る。 $i > 2$ ならば、

$i = i - 1$ とおき、手順8へ戻る。

5. 数 値 計 算 例

4 ステージラインにおいて、上述の解法で得た生産率の近似解法とコンピュータシミュレーションによる結果の比較を表1に示す。シミュレーションによる結果は、1000 周期あたりに最終ステージから流出した仕掛品数のシミュレーションデータを25個とり、このデータの平均値の推定を t 分布によって信頼度95%で行い、この結果を1/1000したものである。Case(1)はすべてのステージの性能が等しい場合、Case(2)は性能に少し差がある場合、Case(3)は性能にかなり差がある場合である。表1より本解法による生産率の近似解とシミュレーション結果はほぼ一致していることがわかる。表1で相対誤差が最大になるのはCase(3)で、その誤差は0.7%以下である。ステージの性能に差がある場合より性能が等しい場合のほうが相対誤差が小さくなるのは、性能が等しい場合のほうがシミュレーションによる結果のばらつきが小さいからである。

次に動的計画法を適用したバッファ配分問題の近似解法の精度を検討する。動的計画法を適用して得た準最適バッファ配分時の生産率と、その他の配分時の生産率を比較した結果を表2に示す。バッファ配分は生産率が大きくなるものから順に挙げ、動的計画法を適用して得たバッファ配分に「*」を付してある。Case(4)はすべてのステージの性能が等しい場合、Case(5)は他のステージに比べてステージ3だけ性能が悪い場合である。表2よりCase(4)の $N_s = 9$ の場合で本解法で得た配分より優れた配分が存在し、本解法では必ずしも最適バッファ配分が得られるとは限らないことがわかる。この原因は、ステージから仕掛品が流出する確率を修正計算するときに、前回の繰返し手順

図3 バッファ総容量と生産率の関係

で得られたバッファ配分時における諸確率を用いることによる。本解法はバッファ数やバッファ総容量が大きい生産ラインに対しても適用できるので、準最適バッファ配分を得る有効な手段である。またこの手法で得られた生産率は、ほとんどの場合において最適バッファ配分時の生産率にかなり近い値になっている。

上述の解析に基づいて、図3に示すようなバッファ総容量と生産率の関係が得られる。この種のグラフは、バッファ容量を増加するのに必要な費用と生産率の増分による利益を考慮することにより、バッファ総容量を決定するうえで参考になる。

6. 結 言

本研究では n ステージ直列自動生産ラインの生産率の近似解法を開発した。この近似解を得るのに要する計算時間は、厳密解を得るのに要する計算時間に比べて非常に短いので、本解法はバッファ数やバッファ容量が大きいラインに対しても適用できる。また本解法による数値結果は、シミュレーションによる結果に非常に近い値になることが判明した。本解法のもう一つの利点は、動的計画法を用いたバッファ配分問題に適用されるのに適していることである。

この利点のために、比較的容易な計算で最適バッファ配分問題の近似解を得ることができた。数値結果例から、動的計画法を用いて得たバッファ配分はほとんどの場合において最適バッファ配分に一致し、一致しない場合でも、生産率の観点からみれば最適配分に比べてほとんど劣っていないことが判明した。

バッファ数やバッファ総容量が増加するとバッファ配分の組合せの数が急激に増加するので、列挙法によ

って最適バッファ配分を求めるのは困難である。したがって動的計画法は、バッファ数やバッファ総容量が大きい生産ラインに対してより有効である。この方法は自動生産ラインの種々の設計を評価する有効な手段を提供するであろう。

付 録

1. 単調増加性 $G\{F_{i-1}(A_1, \dots, N_{i-1}), A_i, N_i\}$ が $F_{i-1}(A_1, \dots, N_{i-1})$ の単調増加関数であることを証明する。

はじめに $G\{F_{i-1}(A_1, \dots, N_{i-1}), A_i, N_i\}$ は式(13)~(17)で表される。 A_i, W_i は定数であるから、 $P[X_i \geq 1]$ が ρ_i の単調増加関数であることを証明すればよい。そのためには、次式で表される $P[X_i=0]$ が ρ_i の単調減少関数であることを証明すればよい。

$$\left. \begin{aligned} K_i \neq 1: P[X_i=0] &= \frac{1-\rho_i}{1-\rho_i^2 K_i^{N_i+1}} \\ K_i = 1: P[X_i=0] &= \frac{1-W_i}{2(1-W_i)+N_i+1} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

ところが $K_i=1$ のとき $\rho_i=1$ であるから、ロピタルの定理を用いると次の関係が得られる。

$$\lim_{K_i \rightarrow 1} \frac{1-\rho_i}{1-\rho_i^2 K_i^{N_i+1}} = \frac{1-W_i}{2(1-W_i)+N_i+1} \dots (20)$$

したがって、式(21)の $K_i \neq 1$ の場合の表現は $K_i=1$ の場合についても有効である。

いま、 $H(\rho)$ を次のように定義する。

$$H(\rho) = (1-\rho)/(1-\rho^2 K^s) \dots (21)$$

ここに

$$\rho = \rho_i, K = K_i, S = N_i + 1 \dots (22)$$

$G\{F_{i-1}(A_1, \dots, N_{i-1}), A_i, N_i\}$ が $F_{i-1}(A_1, \dots, N_{i-1})$ の単調増加関数であることを証明するためには、 $H(\rho)$ が ρ の単調減少関数であることを証明すればよい。

〔補題〕 $f(x)$ を $[0, q)$, ($q > 1$) において定義される次の条件を満たす関数とする。

- (i) $f(x)$ は3回微分可能な凹関数
- (ii) $f(0) = c > 0, f(1) = 0$

このとき関数 $F(x) = (1-x)/f(x)$ は微分可能な単調減少関数である。

〔証明〕 $f(x)=0$ なる x 以外の点において $F'(x)$ は微分可能で、 $F'(x)$ は次のようになる。

$$F'(x) = \frac{-f(x) - f'(x)(1-x)}{f(x)^2} \dots (23)$$

ここで $f(x)$ は凹関数であるから

$$\left. \begin{aligned} f(x) + f'(x)(1-x) &\geq f(1) = 0 \\ F'(x) &\leq f(1)/f(x)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

$f(0) > 0$ かつ f が凹関数であるから、 $[0, q)$ において $f(x)=0$ となるのは $x=1$ のときに限る。ロピタルの

定理を用いると、 $F'(1)$ は次式のように定義される。

$$\begin{aligned} F'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} (-f' - f'' + f''x + f') / (2ff') \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (-f''' + f'''x + f'') / (2f'f' + 2ff'') \\ &= f'' / (2(f')^2) \leq 0 \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

したがって $F(x)$ は微分可能 (ただし $x=0$ においては右側微分可能) で減少関数である。

〔系〕 $[0, 1/w]$ において次式で定義される $E(\rho)$ は微分可能な ρ の単調減少関数である。

$$E(\rho) = (1 - \rho) / (1 - \rho^2 K^s) \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに

$$K = \rho(1 - w) / (1 - \rho w) \quad \dots\dots\dots (27)$$

S は $S \geq 1$ なる整数で、 w は $1 > w > 0$ なる実数である。

〔証明〕 $g(\rho)$ を $(1 - \rho^2 K^s)$ とすると、以下に示すように $g(\rho)$ は補題の $f(x)$ に対する条件 (i) と (ii) を満たすことを示すことができる。

(i)

$$g'(\rho) = - \left[2\rho K^s + \frac{SK^{s+1}}{1-w} \right] \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned} g''(\rho) &= - \left[2K^s + \frac{2\rho SK^{s-1}(1-w)}{(1-\rho w)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S(S+1)K^s}{(1-\rho w)^2} \right] < 0 \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'''(\rho) &= - \left[\frac{2SK^{s-1}(1-w)}{(1-\rho w)^2} \right. \\ &\quad + \frac{2S^2K^{s-1}(1-w)}{(1-\rho w)^3} + \frac{2SK^s w}{(1-\rho w)^2} \\ &\quad \left. + \frac{S^2(S+1)K^{s-1}(1-w)}{(1-\rho w)^4} + \frac{2S(S+1)K^s w}{(1-\rho w)^3} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

(ii)

$$g(0) = 1 > 0, \quad g(1) = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

系を適用することにより、 $G\{F_{i-1}, (A_1, \dots, N_{i-1}), A_i, N_i\}$ が $F_{i-1}(A_1, \dots, N_{i-1})$ の単調増加関数であることが証明される。

2. 記号 本論文で使用した記号とその定義は以下のとおりである。

N_i : バッファ i の容量

A_i : 任意の周期にステージ i が加工可能状態である確率 (ステージ i の性能)

P_i : 任意の周期の初めにステージ i に仕掛品があり、かつその仕掛品がその周期で加工される

確率

$X_{i,j}$: $X_{i,j} \leq N_i + 1$ のとき周期 j の初めにおけるバッファ i とステージ i にある仕掛品の個数,
 $X_{i,j} = N_i + 2$ のときステージ i とバッファ i に空きがなくかつステージ $i-1$ がブロッキング状態であること

W_i : 周期の初めにステージ i に加工すべき仕掛品があるという条件のもとで、その周期にその仕掛品がステージ i から流出する確率

λ_i : ステージ i とバッファ i にある仕掛品の個数が任意の周期に l ($1 \leq l \leq N_i + 1$) 個から 1 個増加する確率

μ_i : ステージ i とバッファ i にある仕掛品の個数が任意の周期に l ($1 \leq l \leq N_i + 1$) 個から 1 個減少する確率

K_i : μ_i に対する λ_i の比 (λ_i / μ_i)

ρ_i : W_i に対する P_{i-1} の比 (P_{i-1} / W_i)

W_i : 修正計算で求められる W_i [式 (10) 参照]

N_s : バッファ総容量

S_i : バッファ 2 からバッファ i までに配分するバッファ容量の和

P_{i,S_i} : バッファ容量の和 S_i をバッファ 2 からバッファ i までに最適に配分した場合の状態確率 P_i [式 (15) 参照]

$F_i(A_1, \dots, A_i; N_2, \dots, N_i)$: i ステージ生産ラインの生産率を A_j ($j=1, 2, \dots, i$) と N_j ($j=2, 3, \dots, i$) の関数として表したもの

$G\{F_{i-1}(A_1, \dots, N_{i-1}), A_i, N_i\}$: i ステージ生産ラインの生産率を F_{i-1}, A_i, N_i の関数として表したもの

文 献

- (1) Gershwin, S. B. and Berman, O., *AIIE Transactions*, 13-1 (1981), 2.
- (2) Murphy, R. A., *AIIE Transactions*, 10-2 (1978), 139.
- (3) Murphy, R. A., *AIIE Transactions*, 11-2 (1979), 113.
- (4) Sheskin, T. J., *AIIE Transactions*, 8-1 (1976), 146.
- (5) Soyster, A. L., Schmidt, J. W. and Rohrer, M. W., *AIIE Transactions*, 11-2 (1979), 140.
- (6) Soyster, A. L. and Toof, D. I., *Naval Research Logistics Quarterly*, 23-3 (1976), 437.
- (7) Wijngaard, J., *AIIE Transactions*, 11-1 (1979), 42.

討 論

〔質問〕 由良 憲二〔姫路工業大学〕

貴論文ではステージが加工可能状態である時間の分布が幾何分布の場合を取扱っておられる。貴論文の考え方は幾何分布以外にどのような分布に対して適用できるのかお教え願いたい。

〔回答〕 本論文で扱ったモデルでは、ステージの性能をステージが加工可能状態である時間の分布によって表現しており、実際には幾何分布のパラメータ A_i がこの役割を果たしている。本モデルを周期を考えない連続時間モデルに拡張する場合は、ステージの性

能はサービス時間の分布によって表現されることになる。この場合、サービスが偶発的な場合には指数分布が適しており、本解法は指数サービスモデルにそのまま適用することができる。また、サービス時間分布に山がある場合はアーラン分布が適し、本解法は残余ステージ数についての状態推移図を考えることによりアーランサービスモデルにも対応することができる。さらに一般的なサービス時間分布に対しては、モデルの変更が必要であると考えている。