任意歯形をもつ歯車と工具の設計・加工に関する研究*
(第1報, 歯形輪郭の計算原理とホブの歯形設計)

石 橋 彰**, 吉 野 英 弘**

Design and Manufacture of Gear Cutting Tools and Gears
with an Arbitrary Profile
(1st Report, Principle of Tooth Profile Calculation and Design of a Gear Hob)

Akira ISHIBASHI and Hidehiro YOSHINO

A new method is introduced for calculating the shape of a gear hob for generating gears with an arbitrary tooth profile. This is applicable to calculate the shape of the tooth profile generated by a hob with an arbitrary shape of the cutting-edge. Because this method simulates exactly the metal removing process in gear tooth profile generation, it is possible to calculate the generated tooth profile when an interference occurs between the cutting edge and the finished tooth profile. As an example, the shape of the cutting edge of a hob was calculated for cutting cylindrical gears with a circular-arc tooth profile (Novikov gears). The profile errors produced in the calculation were less than $1\mu\text{m}$ for gears with a module of 5 mm.

Key Words: Gear, Tooth Profile, Hobbing, Cutting Edge, Novikov Gear

1. 結 言

これまで、歯車装置に用いられる歯形は、工具の製作が容易であること、歯車の性能が工作誤差や組立誤差によって、影響を受けにくいことなどを理由に選ばれてきた。この傾向は、今後とも変わることはないと思われる。しかし、特別の性能が要求される分野では、それぞれの使用条件に最も適した歯形が採用されるようになるであろう⁽¹⁾。歯車の最適歯形設計を実現するうえで重要となるのは、一定の関係にある1対の歯車、歯切り工具、歯車研削用砥石および歯切り工具研削用砥石などの形状輪郭の計算法、さらには、その計算法と一体をなす具体的加工法の開発である。

本研究では、歯車や工具の加工にNC工作機械を用いることを前提として、任意歯形をもつ歯車の設計と、その歯車を加工するための工具の設計に利用できる新しい輪郭計算法を提案し、その適用例について報告する。第1報では、歯形輪郭の計算原理と任意歯形歯車を加工するためのホブの歯形設計について述べ、具体的計算例における誤差などについて考察する。

2. 工具輪郭と歯車歯形の関係

2.1 歯形輪郭計算の考え方 使用する歯切り盤(研削盤)が決まっている場合に、与えられた歯形の歯車を加工するための工具輪郭を求めるには、工具の材料をカッタ軸に、与えられた歯形の歯車をワーク軸に取付けて、両軸を所定の関係位置で相対運動させれば、カッタ軸上に求める工具輪郭を得ることができる。ただし、干渉が生じている場合があるので、はたして得られた輪郭の工具で与えられた元の歯形をもつ歯車と同一の歯車が加工できるかどうかを確かめる必要がある。それらが実用上許容される誤差の範囲にあることが確認されてはじめて、得られた工具輪郭が実際に使用できるものとなる。このことは、歯車どうし、あるいは歯切り工具と歯切り工具の二番面研削用砥石相互間の輪郭計算を行う場合も、全く同様に考慮されなければならない。

本研究で用いる計算方法は、電子計算機を用いて、実際の歯切り盤における材料の除去(切削)過程を忠実にシミュレートし、切削されずに残った部分の形状から歯形輪郭を求める方法である。すなわち、歯車材料を図1に示すように多数の小さなブロックの集合体として表しておき、切削運動によって切れ刃が通過した

* 昭和61年11月3日 中国四国支部・九州支部合同大分地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年2月27日。

** 正員、佐賀大学理工学部 (〒840 佐賀市本庄町1)。

るための工具輪郭を計算する場合も、全く同様に考えることができる。

与えられた工具切れ刃上の点 $P(x, y, z)$ と創成断面上の点 $Q(X, Y)$ は、用いる歯切り盤 (研削盤)、歯車諸元などによって決まるつぎの関係にある。

$$\left. \begin{aligned} X &= F(x, y, z, \xi_1, \xi_2, \dots) \\ Y &= G(x, y, z, \xi_1, \xi_2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 ξ は工具と歯車材の相対運動位置を表すパラメータである (2・2 節の ϕ, k に相当)。本研究で用いる歯形輪郭の計算法では、計算を 2 段階に分けて行う。第 1 段階では、創成される歯形が概略的にどのような形をしているかを把握する。つぎに、得られた概略的歯形にそって、細かいスリット状の受け皿を準備し、工具の切れ刃を表す点の数を増加させて、第 2 段階の計算を行い、計算精度の向上を計る。

3・1 歯形輪郭の概略的形状 歯形輪郭の概略的形状を求める第 1 段階の計算では、まず、工具切れ刃の輪郭を粗く分割した点列で表しておき、創成断面上には、正方形のブロックを切れ刃の分割間隔と同じ間隔で、一面に並べておく。軸対称の歯形の場合は、片歯面に相当する部分に対して、ブロックを準備すれば

図 3 創成断面に現れる切れ刃上の点の軌跡と創成歯形の関係

図 4 切れ刃上の点によって取り除かれる創成断面上のブロック

よい。工具と歯車材の相対運動の位置を表すパラメータ ξ を小さい間隔で変化させて、工具切れ刃上の点に対応する創成断面上の点を式 (3) を用いて計算すれば、図 3 および図 4 に破線で示す点列が得られる。このとき、点列が通過したブロックを 1 個ずつ取り除く操作 (切削) を切れ刃上のすべての点について行えば、取り除いたブロックの輪郭を表すブロック列が、創成される歯形の概略の形状を表す。つぎに、このブロック列の各ブロックの座標値を用いて、このブロック列を図 5 に示すように、連続した円弧列に置き換える (第 1 近似)。さらに、その円周を一定の間隔で細分割して、図 6 に示すように、円弧の中心を通る放射状のスリット (計算した点の受け皿) を作り、これらのスリットに通し番号をつけて、第 2 段階の計算に備える。

図 5 概略的歯形を表すブロック列と円弧列

図 6 第 2 段階の計算による歯形輪郭の決定

図 7 工具の切れ刃輪郭の分割

3.2 歯形輪郭の決定 第2段階の計算では、より正確な歯形輪郭を求めるために、工具切れ刃の輪郭を表す点の数を第1段階の計算の場合より増加させて用いる。増加させる点は、図7に示すように、第1段階に用いた点を代表点として、その前後に配置する。つぎに、工具と歯車材の相対運動の位置を表すパラメータ ξ を変化させて、創成断面上に現れる点の座標を計算する。このとき、代表点についての計算 (第1段階と同じ計算) を先に行い、代表点に対応する創成断面上の点が、図5に示す概略の歯形を表すブロック列、またはその隣のブロック内 (図5に破線で示す範囲) にあるかどうかを調べる。計算された点がある範囲にあるときは、代表点に所属する細分割された切れ刃上の点について、創成断面上の点を計算する。もし、代表点に対応する点が、上記のブロック外にあるときは、その代表点に所属する点についての計算は行わない。これにより、計算を創成歯形の近傍に限定できるので、計算時間を大幅に短縮できる。

いま、計算によって求めた創成断面上の点が、図6に示す O_2 を中心とする円弧上にある j 番めのスリット内に現れたとする。第2段階の計算では、工具切れ刃上の多数の点について、相対運動の位置を変化させながら創成断面上の点を計算するので、このほかにも多数の点が j 番めのスリット内に現れる。スリット内に現れたすべての点と円弧の中心 O_2 の距離を各点ごとに計算して、その最小値を R_j とすれば、 R_j を与える点が求める創成歯形に最も近い点となる。この最小値を与える点は、スリットの中心線上にあるとは限らないが、近似的に中心線上にあるとして歯形輪郭上の一点を求める。このようにしても、スリットの中心線の方法は、創成される歯形の法線方向とほぼ一致しているので、誤差はほとんど生じない。円弧の中心の座標を (X_{02}, Y_{02}) 、 j 番めのスリットの中心線と X 軸のなす角を θ_j とすれば、歯形輪郭を表す点 (X_j, Y_j) は、次式で計算できる (第2近似)。

$$\left. \begin{aligned} X_j &= X_{02} + R_j \cos \theta_j \\ Y_j &= Y_{02} + R_j \sin \theta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

O_1 を中心とする円弧の部分では、概略の歯形輪郭が凹形になっているので、スリット内に現れる点と中心 O_2 の距離が最大になるとき、創成歯形上の点が求まる。計算で得られた創成断面上の点が、円弧列のどの円弧に含まれるかは、図5を参照して知ることができる。隣り合う円弧の境界付近では、両方の円弧について最大値または最小値を求め、歯形輪郭が境界で不連続にならないようにした。

3.3 逆計算による検証 与えられた歯車の歯形から、それを加工するための工具輪郭を求める場合は、前記の計算において、工具切れ刃を歯形輪郭、歯車材を工具材に置き換えて考えればよい。歯車歯形から工具輪郭、工具輪郭から歯車歯形を計算するプログラムを1対として用意しておけば、求めた工具輪郭が正しいかどうかは、逆計算によって直ちに検証できる。与えられた歯形と逆計算で得られた歯形が一致しない場合は、干渉が発生していることになる。その干渉量が実用上問題になる場合は、カット軸とワーク軸の関係位置を変更するなどの対策をして、再計算を行えばよい。

4. ホブ歯形設計への適用

本研究で提案した歯形輪郭の計算法の適用例として、正面断面で円弧の歯形をもつノビコフ歯車を歯切りするためのホブ歯形を設計する場合について述べる。

4.1 座標変換式 ホブ切りした歯車の歯形を求める場合の座標変換式は、先に示した [式(1), (2)]。記号などを同様に選べば、与えられた歯形上の点 $R(X, Y)$ からホブ軸の軸方向断面に現れる点 $T(x, y)$ を求める式は、次式のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} x &= u'' + \frac{p_h}{2\pi} \left\{ I \tan^{-1} \left(\frac{w''}{v''} \right) + N\xi \right\} \\ y &= \sqrt{v''^2 + w''^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\xi + \xi' = \xi''$ とすれば、

$$\begin{aligned} u'' &= X \cos \xi'' \cos \Gamma \\ &\quad - Y \sin \xi'' \cos \Gamma + \xi \sin \Gamma \\ v'' &= -X \sin \xi'' - Y \cos \xi'' + a \\ w'' &= -X \cos \xi'' \sin \Gamma \\ &\quad + Y \sin \xi'' \sin \Gamma + \xi \cos \Gamma \end{aligned}$$

である。 p_h は、ホブの軸方向ピッチで $p_h = \pi d \times \cos \beta / N \cos(\beta - \Gamma)$ で計算できる。また、 ξ と ξ' は、それぞれ歯車の回転位置と軸方向位置を表すパラメータである ($\xi' = 2\xi \tan \beta / d$)。式(5)は、歯車歯形から直接、ホブの軸方向歯形上の点を求める式であるが、式(5)の計算過程を二分して、媒介歯車となる基準ラックを介してホブ歯形上の点を計算することもできる⁽²⁾。また、式(5)を用いて求めたホブ歯形の輪郭は、直線切れ刃溝をもち、すくい角が零の場合のものである。ホブにねじれた切れ刃溝や、すくい角を与える場合は、得られた点をホブのねじ面にそって移動させて、切れ刃上の点を求める。

4.2 数値計算 フライツールによるノビコフ歯車の歯切りの場合は、すでに明らかにした計算方法で

正確に計算できる⁽³⁾。しかし、与えられた歯形をもつノビコフ歯車をホブ切りできる正確なホブを設計するためには、利用困難であると考えられる。図8に計算例に使用した1対のノビコフ歯車の歯形を示す。歯形は正面断面で円弧になっている。ここでは、1対の歯車のうちの凸歯形をもつ小歯車を歯切りするためのホブ歯形の設計について述べる。凹歯形を歯切りするホブの場合も同様に計算できるが、問題は起こらないので省略する。表1に小歯車の正面断面の形状を決定するための寸法、設計しようとするホブの基本寸法などを示す。歯厚比 k_t は、歯車の円周ピッチに対する歯厚の割合を表している。

本研究の輪郭計算法における計算の精度は、歯形を表す点の間隔および計算に用いる歯車と工具の相対運動位置の間隔によって左右される。計算例では、歯車(表1)の歯形を約500個の点で表した。歯車の歯形および求めるホブ歯形を表す点の間隔は、約0.024 mm、またホブ歯形の概略の形状を求める場合のブロックの間隔は、0.193 mm になっている。歯車歯形からホブ歯形を求める場合は、両者の間に2種類の相対運動、すなわち、歯車の回転運動(ξ)と歯車歯形の軸方向への送り運動(ζ)を与えなければならない。計算例では、両運動の移動間隔は、 $\Delta\xi=0.25^\circ$ 、 $\Delta\zeta=1.0$ mm とした。計算に要した時間は、佐賀大学の中形計算機(M 150-F)を用いた場合で約25 minであった。

表1 計算に用いた歯車の諸元など

Normal module	m_n mm	5
Number of teeth	N	5
Radius of pitch circle	r mm	13.3022
Helix angle	β	20°RH
Radius of tooth profile at transverse section	ρ_s mm	7.5
Tooth thickness ratio	k_t	0.75
Number of hob threads	I	1
Radius of hob pitch circle	r_h mm	46.6219
Lead angle	γ	3.0738°RH
Center distance	a mm	59.9241
Inclination angle of hob axis	Γ	16.9262°

図8 計算例に用いた1対のノビコフ歯車の歯形

図9は、計算で得られたホブ歯形の概略的形状を表す円弧列(破線)と、それを基にして求めたホブの歯形輪郭(実線)を示している。両者の食違いが小さいほど、得られたホブの歯形輪郭の計算誤差は小さくなる。概略的歯形を表す円弧の数は、図9の場合、5個になっている。この円弧の数は、概略的歯形を表すブロック列からの誤差がある限界値を超えないように、自動的に決定できるようにしている。

計算の精度を、さらに高めたい場合は、得られたホブの歯形輪郭(第2近似)を用いて、再度円弧列を作り直して再計算を行えばよい(第3近似)。しかし、普通に用いられる歯車用のホブの場合は、以下に示すように第2近似で得られたホブの歯形輪郭で十分である。

つぎに、計算で求めたホブの歯形輪郭が実際に使用できるかどうかを、式(1)、(2)を用いる逆計算によって検証しなければならない。図10は、計算で求めたホブを用いて歯切りされる歯車の歯形を、与えられた元の歯形を基準に、法線方向の誤差として表示したものである。逆計算では、ホブの回転方向の計算間隔は、

図9 ホブ歯形の概略の形状を表す円弧列とそれを基に計算したホブの歯形輪郭

図10 計算で得た輪郭をもつホブで歯切りされた歯車の歯形と与えられた元の歯形との比較

図 11 ホブ切り歯車の歯形誤差に及ぼすホブの軸方向セッティングの影響 ($K=12$ の場合)

$\Delta\phi=0.25^\circ$, ホブの切れ刃溝数は, 実際のホブよりかなり大きく $K=60$ として計算した。また, 切れ刃溝は直線で, すくい角は零とした。干渉の生じた歯元付近の一部を除いて, 元の歯形との差はほぼ $1\sim 2\mu\text{m}$ 以内に入っている。歯元付近の突出部は, ホブ先端の丸み部によって仕上げられているので, ホブの設計条件 (中心距離, ホブ軸傾け角など) を多少変更しても, この部分の誤差を小さくすることは困難と思われる。これは, 図 8 に示す 1 対の歯のかみあいからも理解できる。この誤差が, 凹歯車とのかみあいに支障をきたす場合は, 凹歯車の歯たけを少し低くするか, または 1 対の歯の歯形曲率半径差を少し大きくすればよい。

4.3 誤差の検討 逆計算で求めた歯車の歯形と与えられた元の歯形との輪郭誤差は, 歯元部を除いて考えれば, ほぼ $1\sim 2\mu\text{m}$ 以内に入っている。この誤差は, 輪郭を表す点の間隔, 計算に用いた相対運動位置の間隔に影響される計算誤差である。したがって, 与えられた歯形からホブの歯形を求めた段階での計算誤差は, この半分の $0.5\sim 1\mu\text{m}$ と考えて差しつかえない。この結果は, モジュール 5 に対するものであるが, モジュールが 10 となっても計算誤差は, $2\mu\text{m}$ 以下となり, 実用上問題ない値と考えてよい。

図 11(a) は, ホブの切れ刃溝数を普通に用いられる $K=12$ としたときの歯形誤差を示している。図 10 の $K=60$ の場合に比べ切れ刃溝数が少ないので, 歯底付近に多角形誤差が生じている。また, かみあいに参加する歯先部にも, $2\sim 9\mu\text{m}$ の歯形誤差が生じている。

図 11(b) は, 切れ刃溝数は同じく $K=12$ であるが, ホブを軸方向に切れ刃溝間隔の半分に相当する $S=k_n/2K$ だけオフセットして計算した場合の歯形誤差を示している。オフセットにより, 歯底付近の多角形誤差の山が半ピッチだけ移動している。また, 問題となる歯先寄りのかみあい部では, 歯形誤差が著しく小さくなっている。これは, ホブのオフセットによってホブの切れ刃の一つが, 円弧歯形の仕上げに適した位置に移動したためである。円弧歯形歯車のホブ切りでは, 歯のかみあい部が 1 個の切れ刃によって仕上げられることが多いので (一種のフライツール切り), ホブと歯車材の関係位置によっては, 歯形誤差が大きくなる場合があり, 注意が必要である。この誤差は, 歯切りする歯車の歯数とホブの切れ刃溝数が小さいほど生じやすい。

5. 考 察

歯車の歯形は, 与えられた輪郭をもつ工具と歯車材の間の相対運動による切削によって形成される。本研究で用いる歯形輪郭の計算方法は, 切れ刃による材料の除去過程をそのままシミュレートしているため, 歯形を包絡線として求める方法で用いられる収束計算⁽²⁾を必要としない。干渉が生じる場合も, 別に干渉の有無をチェック⁽⁴⁾しないで, 最終的な創成歯形が得られる。また, その干渉が実用上有害であるかどうか, 直ちに判断できる。さらに, 切れ刃溝数が有限である実際の工具によって歯切りされる歯車の歯形も, 高精度で計算できる。

6. 結 言

任意歯形の歯車を加工するための工具輪郭, もしくは, 与えられた工具によって加工される歯形を求めるとき, 干渉が生じる場合にも適用できる数値計算法を提案し, 具体的計算例を通して, この方法が, 実用上十分な精度で, 各種の歯形および歯切り工具の設計に活用できることを示した。

文 献

- (1) 梅澤, 機械設計, 29-11 (昭 60), 31.
- (2) 中野・ほか 3 名, 精密機械, 47-5 (昭 56), 579.
- (3) 石橋・吉野, 機論, 49-447, C (昭 58), 2039.
- (4) 西田・ほか 2 名, 精機学会春季大会講演論文集, (昭 60), 721.

討 論

〔質問〕 島 地 重 幸〔東北大学工学部〕

歯車実質部への工具最接近位置を求める手法における諸問題をいくつかの工夫で解決され、この手法を実用的なものにされたことに敬意を表す。次の点についてお教え願いたい。

図5において、円弧の中心の求め方、またその円周の細分化は、どのような規則の下で行われるか。第2近似するときの計算精度を念頭に置いておられるかと推察するが、この点との関係どうもう少し詳しくお教えいただきたい。

〔回答〕 第1近似の輪郭計算（円弧の半径と中心位置の計算）に用いるブロック群の数と間隔は、求める歯形の形状と要求される計算精度を勘案して決定する必要がある。本研究の場合は、ブロックの間隔が要求精度の約200倍になるようにして、概略の歯形を表すブロック列を求めた。ブロック列を連続した円弧列に近似する方法としては、いろいろ考えられるが、本研究では以下のようにして円弧列を求めている。

点列を円弧列に置き換える計算は、基本的には、3点を通る円、および1点を通り円周上の1点でほかの円と接する円を求める計算を行っている。ブロックの

座標値は、とびとびの値をもつ階段状になっているので、著者らは、ブロック列の表す輪郭を損なうことなく、ブロック列をより滑らかな点列とするために、各点の前後3点の平均値を計算して新たに点列をつくり、円弧列の計算に用いた。円弧列は、点列と円弧列の表す輪郭の誤差が設定した許容値以内に入るように、始点から順に決定している。この計算は、1種のトライアルになるが、一つ先の円弧も考慮にいれることで、円弧の数ができるだけ少なくなるようにしている。なお、設定する誤差の許容値は、経験的にブロック間隔の0.5倍くらいが最適のようである。

円弧列の細分割の間隔は、理想的には歯形の創成に参加している位置の工具切れ刃を創成断面上に移した場合に、切れ刃の分割間隔が創成断面上にどのような長さとして表れるかを考慮して決定するのが適当と思われる。本研究では、便宜上、工具切れ刃と円弧列の分割間隔を等しくして計算に用いたが、全く問題は生じなかった（ $\beta \leq 30^\circ$ のとき）。ただし、ねじれ角が著しく大きい場合は、上記のことを考慮して円弧列の細分割間隔を決定する必要があると思っている。