かみあいを考慮した平歯車の強度解析* (第1報, 主として歯の変形について)

福 永 圭 悟*¹

A Strength Analysis of Spur Gears including Ratio of Contact (1st Report, Mainly on the Tooth Deflection)

Keigo FUKUNAGA

This paper presents a study of the strength analysis on the spur gears including ratio of contact. The analysis are performed based on the measurement of root stress and Finite Element Method. Spur gear used is module of 6.0, teeth number of 18, face width of 10 mm, and has a boss of total length 45 mm. FEM analysis are carried out 3 and 2 dimensions. The deflection are analyzed a single tooth and a case of ratio of contact. The main conclusions are as follows: (1) if gear has a boss, the stiffness of gear become larger but tooth deflection become smaller. (2) the top clearance is found not to have a significant effect upon the load distribution factor β . (3) if the deflection of a tooth is clearly, β could be obtained precisely.

Key Words: Spur Gear, Tooth Deflection, Ratio of Contact, 3-d FEM Analysis, Load Distribution Factor

1. 緒 言

平歯車の歯のたわみに関する研究は多く^{(1)~(7)}, その中で有限要素法(以下, FEM と呼ぶ)を用いた歯車の強度解析も数多く見受けられる^{(1)~(4)}. 平歯車で解析モデルは二次元弾性問題として解析されることが多く, 三次元立体モデルは溶接構造歯車⁽⁴⁾で見受けられるようである.

比較的良好に使用されるたわみ計算式として石川⁽⁶⁾の式がある. これから求められるたわみ量は, FEM によるたわみ量よりもかなり大きいことが報告される^{(2),(5)}など, 各計算式によって得られる値が互いに異なる場合も少なくない.

実機の平歯車は当然のことながら軸方向に歯幅があり, 軸部やボス部などがあるために歯の変形も三次元的挙動を示すものと考えられる. 歯車のかみあいも1組かみあいと2組かみあいが存在する. また, 動力は駆動歯車が回転しそれが被動歯車へ伝達される機構である. このような実機の状況を十分考慮してFEM解析した報告は少ないようである.

本論文では実機の形状に近いボス部をもった平歯車を対象とし, 歯元応力の測定およびボス部をも考慮した三次元立体モデルと, ボス部を考慮しない二次元モデルでのFEM解析を行った. さらに, この結果を利用して, かみあいを考慮したFEM解析を行い, 歯の変形挙動および荷重分担率について検討した結果について報告する.

2. 歯元応力の測定方法

FEM解析による計算結果と負荷時に実際に生じる歯元応力を比較するために, 図1に示す試験歯車を用いて静的負荷試験を行った. 図2に実験装置の概観写真を示す. 実験は2個の平歯車をかみあわせ, 一方の軸には任意のトルクを作用することができる負荷用レバーをセレーション結合し, 他方の歯車軸にはストッパを結合した. ストッパを上下させることによって, 歯車に回転を与えることができる. 供試歯車対は, モジュール $m_n=6.0$, 歯数 $Z_1/Z_2=18/18$, 圧力角 20° , 転位係数 $X_1=X_2=0.0$, かみあい率 $\varepsilon_s=1.53$, インボリュート歯形の歯車である. 材料はいずれもS45C材であり, ボス部を持っている. 頂げき係数 $C_k=0.35$, 工具刃先の丸み半径 $0.417 m_n$ のホブで歯切加工後, 高周波焼入と焼戻し熱処理加工を行い, マーク研削仕上

* 昭和62年3月14日 関西支部第62期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和61年6月24日.

*¹ 正員, 三菱電機(株) (〒819-01, 福岡市西区今宿青木690番地).

げを行った。ホブ加工とマージ研削加工による歯形上の段差は 0.09 mm 以下であった。歯先硬度は $H_{rc}53 \sim 54$ 、歯厚寸法差は $-0.02 \sim -0.025$ mm、歯筋・歯形精度は共に JIS 0 級相当であった。

歯元応力は、引張側歯面の歯元すみ肉曲線に沿って、Hofor の 30° 接線位置に 0.3 mm 長のひずみゲージを接着して測定した。

3. 解析方法

FEM によって歯車の応力と変位を求めた。用いたプログラムは 2 種類あり、一方は MSC/NASTRAN (NASA. STRucture ANalysis Program)**1 であり、他方は三菱電機(株)で開発された静解析用プログラム STAP である。NASTRAN では三次元立体要素 (以下、立体要素と呼ぶ) を用いたモデルの解析、および二次元平面要素である三角形要素と四辺形要素 (以下、

これを平面要素と呼ぶ) を適当に組合せたモデルの解析を行った。STAP は二次元弾性問題を解析するプログラムであり、3 節点三角形平面要素 (以下、三角形要素と呼ぶ) を用いている。STAP の計算制限は要素数 2400 以下、節点数 3200 以下であり、倍精度で計算できる。STAP での解析の場合は、要素分割には自動分割プログラムを用いた。解析はすべて縦弾性係数 $E_1 = E_2 = 206$ GPa $\{2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2\}$ 、ポアソン比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ とした。平面要素と三角形要素の場合には二次元平面応力問題として計算を行った。

表 1 に歯車諸元と計算条件を示す。実験 No. G-2 ~ G-5 が単一歯での解析、G-6 ~ G-8 がかみあいを考慮した解析である。STAP は G-2 と G-3、G-4 ~ G-8 は NASTRAN によって解析した。立体要素は G-5 のみである。

図 3 は荷重作用点と歯車の寸法関係を示す。図 3 において、a はかみあい開始点、b は内 1 枚かみあい点、c はピッチ点かみあい、d は外 1 枚かみあい点、e は歯先荷重の作用点を示す。したがって、a ~ b と d ~ e が

図 1 平歯車の外形寸法

表 1 歯車諸元と実験および計算条件

NO	Items	Module	Number of teeth Z_1/Z_2	Top clearance C_{k1}/C_{k2}	Total Number	
					Elements	Nodes
G-1	Experimental	6.0	18/18	0.35/0.35	—	—
G-2	Single gear Plane and model	6.0	$Z_1=18$	0.35	Ne=1373	Nn=770
G-3				0.5	Ne=1436	Nn=806
G-4				0.35	Ne=191	Nn=221
G-5				0.35	Ne=478	Nn=758
G-6	a pair of gears	6.0	18/18	0.35/0.35	Ne=382	Nn=440
G-7				0.35/0.5	Ne=392	Nn=448
G-8				0.5/0.5	Ne=400	Nn=456

(1) 添字 1, 2 は駆動・被動歯車を示す。

図 2 歯元応力の測定方法

Point	a	b	c	d	e
λ mm	9.3	7.5	6.2	4.5	0.0
$^\circ\gamma$	≈ 0.0	10.3	15.0	20.0	30.3
L mm	9.3	8.4	7.5	6.0	1.2

図 3 歯のたわみを求める寸法

**1 NASTRAN の解析法については、戸川隼人著、有限要素法概論、(昭 59)、培風館などに解説されている。

2組かみあい領域, $b \sim c \sim d$ が1組かみあい領域となる。

歯元のすみ肉曲線の形状は歯のたわみや歯元応力の値に大きな影響を与える。頂げき係数 $C_k = 0.35$ の場合は歯切り加工に用いたホブ図面を利用して創成法により歯形形状を正確に求めた。したがって、実験に供した歯車と解析に用いた歯車 ($C_k = 0.35$ の場合のみ) は歯元すみ肉曲線を含みほぼ同じ歯形形状である。

歯の変位量は、図3に示すように、歯先部歯厚の中心(点K)と歯車の中心を結んだ直線が荷重の作用線と交わる点(点A)の荷重作用線方向のたわみ量 W を用いた⁽²⁾。 W は式(1)で求めることができる。

$$W = (\delta_z^2 + \delta_x^2)^{1/2} \times \cos\{\gamma - \tan^{-1}(\delta_z/\delta_x)\} \quad \dots\dots\dots(1)$$

4. 計算精度

FEM解析では、一般に要素数を多くすれば計算精度は向上すると言われる⁽²⁾。コンピュータの計算容量、経済性、あるいは要素分割のわずらわしさなどから要素数にはおのずと限度がある。ここでは、FEM解析の計算精度を、実験による歯元応力の実測値とFEM解析による応力値との比較において検討する。

図4 立体要素モデルの要素分割

図5 三角形要素モデルの要素分割

図4は実験用歯車とほぼ同じ寸法形状を持った解析モデルである。解析モデルG-4では要素の分割は図4を軸方向からみた要素の分割状態に等しくした。図5は一般に広く利用されている⁽²⁾⁽³⁾⁽⁷⁾三角形要素で構成された解析モデルであり、G-4やG-5に比べると要素数が3～6倍も多い。単一歯でのFEM解析の境界条件はすべて図5と同じである。

歯元すみ肉曲線におけるHoferの30°接線位置にほぼ最大応力値が発生することはよく知られている。そこで、すべての解析モデルでは、歯元すみ肉曲線の一つの節点をHeferの30°接線位置に設定するようにした。

NASTRANの解析解は節点応力であるが、STAPの場合は要素内応力である。

図6は1組かみあい領域(図3の $b \sim c \sim d$)における荷重作用点と最大主応力 σ_t の関係である。図6中には実験による応力値 σ_t を1.0とした場合の解析値の割合も%で表している。荷重作用点が歯先側へ近づけば、解析値は実測値に近くなる傾向を示すことから、解析モデルは基本的には実験用歯車を再現していると考えられる。ここで、実験値が真の応力値であるとすれば、立体要素モデルG-5の計算精度は約93～97%、三角形要素モデルG-2の場合は約94～97%となり、ほぼ同じ計算精度である。

図7は歯先荷重での解析結果である。G-5の応力値を基準にすれば、G-4では約6%小さく、G-2では逆に約5%大きな応力値となっている。平面要素のG-4の応力値が小さいことから、歯幅およびボス部を考慮することによって解析モデルG-5の剛性が大きくなったと思われる。

以上の考察から各解析モデルの計算精度を推定すれば、おおよそ次のようになるものと考えられる。

立体要素モデル : 約93%以上

図6 荷重作用点と最大主応力

平面要素モデル : 約 87 % 以上

三角形要素モデル : 約 94 % 以上

このことから本研究に用いた3種類の解析モデルにはそれほど大きな計算精度の差はなく、NASTRANによる解析 (G-5, G-4) は、STAP (G-2) に比べれば要素数が著しく少なくても十分な計算精度を持っていることがわかる。このことは、複雑な形状をFEM解析する場合にはNASTRANを用いたほうが有利であることを意味している。G-5とG-4の計算精度の差は小さいと考えて、かみあいを考慮したFEM解析ではG-4の要素分割を用いることにした。

5. 歯の変形

5.1 単一歯の変形 荷重は荷重作用線方向に単位歯幅当たりの歯面法線力 $P_n=196.1 \text{ kN/m} (20 \text{ kgf/mm})$ が歯面に作用するようにした。立体要素では線荷重として、平面要素では節点集中荷重として与えた。

図8はSTAPによる変形状態の一例である。荷重が作用しない隣接歯の変形量は少ない。このような傾向は荷重の作用点や解析モデルを変えてもほとんど同じであった。このことは、かみあいを考慮したFEM解析を行う場合は、隣接歯の存在をそれほど考える必要がないことを示すと思われる。図9はNASTRAN解析による歯のたわみ量 δ_x の一例である。荷重作用線

図7 最大主応力, 歯先荷重の場合

図8 歯の変形, STAP, 歯先荷重の場合

方向と歯形中心線の交点 (図3の点A) から歯先側の歯は単に傾斜するだけであることがわかる。歯幅とボス部を考慮した立体要素モデルG-5のたわみ量は平面要素モデルのG-4よりも小さくなっている。戸部⁽²⁾は単一歯でのFEM解析を行い、歯底から基礎部までの長さ R と全歯だけ h の比 R/h が6.0よりも小さければ歯のたわみも小さくなると報告している。

本研究のG-5の場合は、 R を歯底からボス外周部までの長さと考えれば $R/h=1.77$ となる。したがって歯のたわみ量は小さくなったものであるが、これは4章でも述べたように歯の剛性が大きくなったとも考えることができる。実機的设计では $R/h=0.0$ のような軸付歯車も多く採用されている。いま述べた考察を考慮すれば、このような歯車では歯のたわみ計算に注意しなければならないものと考えられる。

図10は各種計算法による歯先荷重 (荷重作用点e) の場合のたわみ量である。G-5が最も小さく、G-2およびG-4のたわみ量は大きくなっている。G-5のたわみ量を1.0とすればG-2およびG-4は約12~14%大きく、 I_0 は石川の式⁽⁶⁾による値であるが、おおよそ2倍のたわみ量となっている。以上のことから実際の歯車の形状に近い解析モデルG-5の剛性に比べれば、他の計算方法の場合は剛性が小さくなったものと考えることができる。

5.2 2組かみあい状態での歯の変形 図11に2組かみあい状態での平面要素解析モデルと境界条件を示す。歯車対では一方の歯車は他の歯車へ動力を伝達しようとするれば、歯面の接触点で接触力が発生する。この力により歯車が変形した後も歯面は接触を保た

図9 立体要素と平面要素のたわみ, NASTRAN

ねばならない。そこで、かみあいを考慮した FEM 解析では解析モデルの境界条件を次のようにした。

(1) 接触力が発生する以前には、接触点を各歯車の要素の節点が共有する。

(2) 図 11 の座標軸 ξ - η において、接触点 P, Q で駆動・被動歯車の各節点は ξ 軸方向には自由に移動できる。 η 軸方向には両節点の移動量が同じになるようにして、解析上は両歯面は接触を保っている。

本論文では、田中ら⁽¹⁾が行っているように歯面の摩擦力は作用しないものとした。

図 11 に示す駆動・被動歯車の要素分割の方法は平面要素モデル G-4 と同一である。駆動歯車は歯元かみあい (荷重作用点 a) と外 1 組かみあい (点 d), 被動歯車は歯先かみあい (点 e) と内 1 組かみあい (点 b) でそれぞれ接触している場合を解析した。

実験用に用いた歯車対は JIS 0 級相当であることから、歯車対は幾何学的に正しく加工されていると考えられる。このことと、実機での動力の伝達状態を考慮して、ここでは歯面への荷重を駆動歯車のボス内周部に、次式で表せるようなトルクを作用させることによって与えた。

$$r \sum F_i = R_p \times P_n \times \cos \alpha_0 \quad (i=1 \sim 10)$$

ここで、 r はボス内周部半径、 F_i はボス内周部の節点に作用する円周力、 R_p は歯車のかみあいピッチ円半径、 P_n は荷重作用線方向の単位歯幅当たりの歯面法線力、 α_0 はかみあい圧力角である。

図 12 に変形結果の一例を示す。破線が変形前、実線は変形後である。

6. 荷重分担率

1 法線ピッチ離れた 2 枚の歯で接触している駆動・被動歯車について、各接触点が分担する歯面法線方向荷重の割合が荷重分担率 β である。

図 10 各種計算法と歯のたわみ, 歯先荷重

β は次式から求めることができる。

$$\beta_p(W_{p1} + W_{p2}) = \beta_q(W_{q1} + W_{q2}) \dots \dots \dots (2)$$

$$\beta_p + \beta_q = 1 \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 β_p は図 11 において接触点 P が歯面法線荷重を分担する割合であり、 β_q は同様に接触点 Q が分担する割合を示す。 W_{p1} と W_{q1} はそれぞれ駆動歯車の接触点 P と Q におけるたわみ量、 W_{p2} と W_{q2} は同様に被動歯車のたわみ量である。

荷重分担率の定義から β は式 (3) と式 (4) から求めることもできる。

$$\beta_p = F_p / (F_p + F_q) \dots \dots \dots (4)$$

ここで、 F_p と F_q はそれぞれ点 P と Q における節点反力である。

図 13 は式 (2) ~ (4) を用いて求めた荷重分担率 β を百分率で表したものである。薄塗り部分が β_p であり、白抜きは β_q である。(F) は節点反力を用いて式 (3) と (4) から、(W) は図 12 のたわみ量から、 I_s は

図 11 かみあいを考慮した要素分割, NASTRAN

図 12 かみあいを考慮した歯の変形, NASTRAN

図 13 荷重分担率

石川の式⁽⁶⁾から、求めた β である。その他の場合は単一歯の歯のたわみ曲線と式(1)~(3)を用いて求めた β である。頂げき係数 $c_{k1}/c_{k2}=0.35/0.35$ の場合には立体要素モデルの G-5、節点反力 G-6(F) および石川の式による β_p はいずれもほぼ同じ 40% である。一方、歯のたわみ量から求めた G-6(W)、G-2 の場合は $\beta_p=42\%$ となりわずかに大きくなっている。 c_k の組合せが異なっても、節点反力(F)と石川の式による β_p は似た値を示し、たわみ量(W)から求めた β_p はやや大きい。

以上のように β については歯幅やボス部の影響を考慮しなくてもほぼ同じような値が得られることがわかる。5・1節でも述べたように石川の式⁽⁶⁾による歯のたわみ量はかなり大きい、これは単に歯の剛性が小さくなったと考えるだけで、荷重分担率の推算には極めて有効である。このようなことから、何らかの方法[たとえば、文献(2)、(5)、(6)など]で単一歯のたわみ量を求めることができるならば、 β は実用上ほぼ有効な精度内で計算できることがわかる。

7. 結 言

実機の形状寸法に近い歯車諸元を持った平歯車を対象とし、平歯車の変形を調べるために FEM 解析を行った。解析はまず、プログラムの計算精度を歯元応力の実測値から推定した。つぎに、単一歯の歯の変形およびかみあいを考慮した歯の変形挙動を解析した。以下、本研究で得られた主な成果をまとめれば次のようになる。

(1) 歯元応力の実測値と比較すれば、立体要素と平面要素および三角形要素モデルでは計算精度にそれほど大きな差はない。

(2) 歯車にボス部があれば剛性が大きくなり、歯元応力は大きくなるが歯の変形は小さくなる。

(3) 荷重分担率 β によらず歯車の頂げき係数 C_k の影響は少ない。

(4) 単一歯での歯のたわみ量が既知ならば、 β を実用上ほぼ妥当な精度で計算できる。

終わりに、本研究着手への機会を与えてくださった東覚里志、稲田斉の両氏に感謝の意を表す。また本研究を行うにあたりご教示を受けた吉岡純夫、福永時雄、遠田治正の各氏に深く感謝する。

本研究の数値計算は、NASTRAN については(株)三菱総合研究所の IBM 3081 を利用し、STAP は三菱電機(株)の MELCOM 7000 で実施した。

文 献

- (1) 田中・小比田, 機論, 51-461, C(昭 60), 133.
- (2) 戸部・ほか 2 名, 機論, 39-327(昭 48), 3473.
- (3) 日高・ほか 3 名, 機論, 43-368(昭 52), 1510.
- (4) 佐山・ほか 3 名, 機論, 49-448, C(昭 58), 2197.
- (5) 寺内・永村, 機論, 46-402, C(昭 55), 160.
- (6) 石川, 東京工業大学学報, 3-2(昭 32), 251.
- (7) 本田・Conway, J. C., 機論, 45-392, C(昭 54), 494.