回転体のふつりあいにより加振される動吸振器系* (第3報, 主系, 吸振器双方にクーロン摩擦を伴う場合)

白石 明 男^{*1}

Dynamic Vibration Absorber System Excited by a Rotating Imbalance (3rd Report, Effect of Coulomb Friction both in the Main System and in the Absorber)

Akio SHIRAISHI

Behavior of a dynamic vibration absorber system with combined viscous and Coulomb friction both in the main system and in the absorber is investigated. In this case, the main mass is excited by a rotating imbalance and the amplitude of the disturbing force varies as the square of its frequency. The solution of non-stop steady motion is deduced by means of the same boundary condition method as in the previous report. The numerical results of analytical solution coincide very well with those of digital simulation. A set of empirical formulae for calculating the optimum tuning and damping of the absorber, constructed by composing the formulae given in the previous reports and adding some correction terms, are presented.

Key Words: Vibration, Theory of Vibration, Dynamic Vibration Absorber, Viscous Damping, Coulomb Friction, Rotating Imbalance, Non-stop Vibration, Optimization

1. ま え が き

主系質量に, 回転体のふつりあいにより起因する力, すなわち, 振動数の二乗に比例する振幅をもつ加振力が働く動吸振器系については, Brock⁽¹⁾や池田⁽²⁾らの研究が知られている。しかし, これらの研究では, 實際上, 系の粘性減衰と共存する可能性の高いクーロン摩擦の影響については触れていない。

本研究はこの種の動吸振器系について, クーロン摩擦力が吸振効果に及ぼす影響を調べ, 最良調整値の計算式を導くことを主目的としたもので, 第1報⁽³⁾においては, クーロン摩擦力が吸振器側に作用する場合, 第2報⁽⁴⁾においてはこれが主系側に作用する場合を取扱った。

本報では, これらの系を一般化した場合, すなわち, 図1に示すように主系, 吸振器の双方にクーロン摩擦と粘性摩擦が共存する場合を取り上げた。

この系に対しては, クーロン摩擦力が主系, 吸振器のいずれか一方のみに偏在する系に対する前報までの解法は適用できない。このため, 著者らがさきに検討

した主系, 吸振器双方にクーロン摩擦力が作用し, 一定振幅の力で加振される場合⁽⁵⁾の解法にならって, 無停滯定常振動の解を導いた。また, この解による数値実験に基づき, 最良調整値の実用計算式を作った。

なお, 解析手法の妥当性を検証するため, いくつかの数値計算例を連続形シミュレーションの結果と比較した。

2. 主 な 記 号

m_1 : 主系質量

m_2 : 吸振器質量

k_1 : 主系ばね定数

図1 系の構成

* 昭和61年3月17日 東海支部第36期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和61年5月27日。

^{*1} 正員, 群馬工業高等専門学校 (〒371 前橋市鳥羽町580)。

- k_2 : 吸振器ばね定数
 c_1 : 主系の粘性減衰係数
 c_2 : 吸振器の粘性減衰係数
 F_1 : 主系のクーロン摩擦力の大きさ
 F_2 : 吸振器のクーロン摩擦力の大きさ
 ω : 加振力の角振動数
 $Q_0\omega^2$: 加振力の振幅 ($Q_0 = \text{const.}$)
 x_{st} : 静たわみ $= Q_0\Omega_n^2/k_1$
 t, τ : 時間
 Ω_n : 主系の固有角振動数 $= \sqrt{k_1/m_1}$
 ω_n : 吸振器の固有角振動数 $= \sqrt{k_2/m_2}$
 r : 主系クーロン摩擦力比 $= F_1/(Q_0\Omega_n^2)$
 R : 吸振器クーロン摩擦力比 $= F_2/(Q_0\Omega_n^2)$
 η : 加振振動数比 $= \omega/\Omega_n$
 h_1 : 主系減衰比 $= c_1/(2\sqrt{m_1k_1})$
 h_2 : 吸振器減衰比 $= c_2/(2\sqrt{m_2k_2})$
 μ : 質量比 $= m_2/m_1$
 f : 固有振動数比 $= \omega_n/\Omega_n$
 f_0^* : $R=0, r=0$ のときの f の最良調整値
 h_{20}^* : $R=0, r=0$ のときの h_2 の最良調整値
 f_r : $R=0, r \neq 0$ のときの f の最良調整値
 h_{2r} : $R=0, r \neq 0$ のときの h_2 の最良調整値
 f_R : $R \neq 0, r=0$ のときの f の最良調整値
 h_{2R} : $R \neq 0, r=0$ のときの h_2 の最良調整値
 f_c : f_r と f_R を組合せた f の調整値
 h_{2c} : h_{2r} と h_{2R} を組合せた h_2 の調整値
 f_{opt} : $R \neq 0, r \neq 0$ のときの f の最良調整値
 h_{2opt} : $R \neq 0, r \neq 0$ のときの h_2 の最良調整値
 x_1 : 主系質量の変位
 x_2 : 吸振器質量の変位
 y : 相対変位 $= x_1 - x_2$
 X_1 : 主系質量の変位 x_1 の正のピーク値
 V_{x1} : 主系変位倍率 $= X_1/x_{st}$
 $V_{x1 \max}$: 主系最大倍率 (V_{x1} の η に対する最大値)
 τ_c : $\dot{y}=0$ となる時刻

3. 運動方程式と解

図1の系の運動方程式は、 $\dot{x}_1 \neq 0, \dot{y} \neq 0$ のとき、次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_2 y + c_2 \dot{y} \\ + \text{sgn}(\dot{y}) F_2 + \text{sgn}(\dot{x}_1) F_1 \\ = Q_0 \omega^2 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 y - c_2 \dot{y} - \text{sgn}(\dot{y}) F_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

これらの運動方程式は、さきに報告した主系質量が一定振幅の力で加振される場合⁽⁵⁾の力の振幅 P_0 を

$Q_0\omega^2$ に置き換えたものにほかならない。したがって、図1の系の無停滯定常振動解は、既報⁽⁵⁾の解に、この置き換えを行うことによって、ただちに導くことができる。すなわち、主系質量の変位 x_1 が、正のピーク値 X_1 から負のピーク値 $-X_1$ に変化する半周期について、 τ を x_1 が正のピーク値をとる時刻を基準とした時間とすれば、 $0 \leq \tau \leq \tau_c$ について、

$$\left. \begin{aligned} y &= x_{st} R / (\mu f^2) + x_{st} Y \sin(\omega \tau - \varepsilon_1) \\ &\quad + e^{-a_1 \tau} (a_1 \cos \beta_1 \tau + a_2 \sin \beta_1 \tau) \\ &\quad + e^{-a_2 \tau} (a_3 \cos \beta_2 \tau + a_4 \sin \beta_2 \tau) \\ x_1 &= x_{st} r + x_{st} X \sin(\omega \tau - \varepsilon_2) \\ &\quad + e^{-a_1 \tau} \{ (b_1 a_1 + b_2 a_2) \cos \beta_1 \tau \\ &\quad + (b_1 a_2 - b_2 a_1) \sin \beta_1 \tau \} \\ &\quad + e^{-a_2 \tau} \{ (b_3 a_3 + b_4 a_4) \cos \beta_2 \tau \\ &\quad + (b_3 a_4 - b_4 a_3) \sin \beta_2 \tau \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$\tau_c \leq \tau \leq \pi/\omega$ について、

$$\left. \begin{aligned} y &= -x_{st} R / (\mu f^2) + x_{st} Y \sin(\omega \tau - \varepsilon_1) \\ &\quad + e^{-a_1 \tau} (a_1^* \cos \beta_1 \tau + a_2^* \sin \beta_1 \tau) \\ &\quad + e^{-a_2 \tau} (a_3^* \cos \beta_2 \tau + a_4^* \sin \beta_2 \tau) \\ x_1 &= x_{st} r + x_{st} X \sin(\omega \tau - \varepsilon_2) \\ &\quad + e^{-a_1 \tau} \{ (b_1 a_1^* + b_2 a_2^*) \cos \beta_1 \tau \\ &\quad + (b_1 a_2^* - b_2 a_1^*) \sin \beta_1 \tau \} \\ &\quad + e^{-a_2 \tau} \{ (b_3 a_3^* + b_4 a_4^*) \cos \beta_2 \tau \\ &\quad + (b_3 a_4^* - b_4 a_3^*) \sin \beta_2 \tau \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

また、上式の右辺に負号をつけ、 τ を $(\tau - \pi/\omega)$ におきかえたものが、ひきつづく半周期の解となる。

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X &= \eta^2 \sqrt{\frac{(f^2 - \eta^2)^2 + 4h_2^2 f^2 \eta^2}{D^2 + E^2}} \\ Y &= \frac{\eta^4}{\sqrt{D^2 + E^2}} \\ D &= (1 - \eta^2)(f^2 - \eta^2) - \mu f^2 \eta^2 - 4h_1 h_2 f \eta^2 \\ E &= 2h_1 \eta (f^2 - \eta^2) + 2h_2 f \eta (1 - \eta^2 - \mu \eta^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\dots\dots\dots (5)$$

これらの式中の、 $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, a_1^* \sim a_4^*, b_1 \sim b_4, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau_c$ は既報⁽⁵⁾に導いた諸式 (付録) から求まる。

これらの式から、任意の時刻における変位 x_1, y , 変位のピーク値 X_1 を求めることができ、さらに、主系変位の倍率 V_{x1} などを知ることができる。

式(2), (3)は、既報⁽⁵⁾に示したように

$$\left. \begin{aligned} 0 < \tau < \pi/\omega \text{ において } \dot{x}_1 < 0 \\ 0 < \tau < \tau_c \text{ において } \dot{y} < 0 \\ \tau_c < \tau < \pi/\omega \text{ において } \dot{y} > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

を満たす無停滯振動を前提として導いたものであるから、数値解が求まらないか、求まって式(6)が満たさ

れないときは、主系または吸振器質量のいずれか一方または両方が停滯振動をするものと考えられる。

図2は、無停滯振動の成立の可否を上述の考えかたに基づく数値計算によって吟味し、結果を η と R についてマップ表示した例である。図2中の0印は無停滯振動の成立を、*印は不成立を示している。

4. デジタルシミュレーション

以上の解法を検証するために、いくつかの例について式(2)、(3)による計算値を連続形シミュレーション(HITAC-DDS 3⁽⁶⁾)の結果と比較した。

図3は、この比較の一例で、 x_1/x_{st} , y/x_{st} を $0 < \tau < \pi/\omega$ の半周期について示したものである。

図3で実線は式(2)、(3)による計算値、丸印はシミュレーションの結果をそれぞれ示している。

この例のように、両者は良好に合致し解法の妥当性が検証された。

5. 最良調整値と吸振効果

ここでは、主系最大倍率 V_{x1max} が最小となるような f , h_2 の値を最良調整値とよぶ。

さきに報告⁽³⁾⁽⁴⁾したように、図1の系でクーロン摩擦力が作用しないとき、すなわち、 $R=0$, $r=0$ のときの最良調整値 f_0^* , h_{20}^* は、

$$\left. \begin{aligned} f_0^* &= \sqrt{1/(1+\mu)} + (-0.037 + 1.05\mu - 1.98\mu^2)h_1 + (1.87 - 2.7\mu + 0.129\mu^2)h_1^2 \\ h_{20}^* &= \sqrt{3\mu/\{4(2+\mu)\}} + (0.0871 + 1.4\mu + 0.943\mu^2)h_1 + (0.233 + 2.3\mu - 10.8\mu^2)h_1^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

また、 $R \neq 0$, $r=0$ のときの最良調整値 f_R , f_{2R} および $R=0$, $r \neq 0$ のときの最良調整値 f_r , h_{2r} は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} f_R &= f_0^* \\ h_{2R} &= h_{20}^* + \gamma R \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

$$\gamma = \frac{-1.02\mu - 1.6h_1 - 0.009}{\mu + 0.138} \dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} f_r &= f_0^* + \{\gamma_1 + \gamma_2(r - 0.05)\}r \\ h_{2r} &= h_{20}^* - \gamma_3 r \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0.013 + 0.543\mu + 0.563\mu^2 \\ &\quad + (2.7 + 2.07\mu - 27.5\mu^2)h_1 \\ &\quad + (0.162 - 19.6\mu + 239\mu^2)h_1^2 \dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -0.095 + 3.16\mu - 2.77\mu^2 \\ &\quad + (-8.67 - 4.67\mu + 224\mu^2)h_1 \\ &\quad + (29.2 + 461\mu - 1664\mu^2)h_1^2 \dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= -0.58h_1^2 + 0.0923\mu h_1 \\ &\quad + 0.074\mu + 0.166h_1 + 0.0115 \dots\dots (13) \end{aligned}$$

図4~6は、これらの調整値を図1の $R \neq 0$, $r \neq 0$ の系に適用した場合の主系変位倍率 V_{x1} を例示したものである。なお、これらの図4~6の η の小さいところで曲線が描かれていない部分は、式(6)が満たされない停滯振動の領域である。図4~6で曲線①は f_0^* , h_{20}^* によって調整した場合、曲線②は f_r , h_{2r} によって調整した場合、さらに、曲線③は f_R , h_{2R} によって調整した場合を示している。

$\eta \backslash R$	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.12	0.14	0.16
0.6	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.65	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.7	0	*	*	*	*	*	*	*	*
0.75	0	*	*	*	*	*	*	*	*
0.8	0	0	*	*	*	*	*	*	*
0.85	0	0	*	*	*	*	*	*	*
0.9	0	0	0	*	*	*	*	*	*
0.95	0	0	0	0	*	*	*	*	*
1.0	0	0	0	0	0	*	*	*	*
1.05	0	0	0	0	0	*	*	*	*
1.1	0	0	0	0	0	0	*	*	*
1.15	0	0	0	0	0	0	*	*	*
1.2	0	0	0	0	0	0	*	*	*
1.25	0	0	0	0	0	0	0	*	*
1.3	0	0	0	0	0	0	0	*	*
1.35	0	0	0	0	0	0	0	0	*
1.4	0	0	0	0	0	0	0	0	*
1.45	0	0	0	0	0	0	0	0	*
1.5	0	0	0	0	0	0	0	0	*

図2 無停滯振動の成立範囲 ($\mu=0.1$, $h_1=0.2$, $h_2=0.2505$, $f=0.935$, $r=0.2$)

図3 デジタルシミュレーションとの比較

一般に、最良調整の状態での主系変位倍率曲線には、ほぼ同大の二つの極大値が現れる。

図4～6の曲線①, ②, ③には、いずれも、このような特徴が見られないことから、 $R \neq 0, r \neq 0$ の系については、式(7), (8), (10)のいずれとも異なる最良調整値が存在するものと考えられる。

式(8), 式(10)に示した f_R, h_{2R}, f_r, h_{2r} はそれぞれ f^*, h^* に R または r に関する補正項を加えた形になっている。ここでは、試みに、これらの補正項を組合せて、 $R \neq 0, r \neq 0$ に対する調整値を次のように設定してみた。

図4 主系倍率曲線の比較 (例1)

図5 主系倍率曲線の比較 (例2)

$$\left. \begin{aligned} f_c &\doteq f_r \\ h_{2c} &= h_{2r} + \gamma R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

図4～6の曲線④はこの f_c, h_{2c} によって調整した場合の倍率を示したものである。

図5, 6にみられるように、多くの場合、この調整によって、主系変位倍率曲線の二つの極大値はほぼ同大となる。したがって、 f_c, h_{2c} を実用上の最良調整値とみなしてよい場合も多い。しかし、図4の曲線④のように二つの極大値に差が現れる場合も見られることから、 f_c, h_{2c} は $R \neq 0, r \neq 0$ に対する最良調整値として、必ずしも一般性をもっていないことがわかる。

このため、ここでは、 $\mu=0.1 \sim 0.3, h_1=0 \sim 0.2, R \leq 0.1, r \leq 0.2$ の実用範囲について、 $R \neq 0, r \neq 0$ に対する最良調整値として、数値実験の結果から、あらためて次式を導いた。

$$\left. \begin{aligned} f_{\text{opt}} &= f_c = f_r \\ h_{2\text{opt}} &= h_{2c} + (V_{p2} - V_{p1}) / [\delta_0(\delta_1 r R \\ &\quad + \delta_2 R + \delta_3 r + \delta_4)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= 1 + h_1(h_1 - 0.2)(31.4 + 30\mu) \\ \delta_1 &= -1031 \times h_1 \mu + 296.9 h_1 \\ &\quad + 200\mu - 65 \\ \delta_2 &= 74.97 h_1 \mu - 189.4 h_1 \\ &\quad - 119.4 \mu + 76.44 \\ \delta_3 &= -101.9 h_1 \mu + 57.8 h_1 \\ &\quad + 22.5 \mu - 16.05 \\ \delta_4 &= 148.3 \mu h_1 - 66.99 h_1 \\ &\quad - 30.46 \mu + 15.2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

図6 主系倍率曲線の比較 (例3)

ここに, V_{p1} , V_{p2} は f_c , h_{2c} によって調整した場合の主系変位倍率の二つの極大値で $\eta_{p1} < \eta_{p2}$ である. なお, 實際上, $r=0$ または $R=0$ においては, 式(15)は, それぞれ式(8)または式(10)と一致する.

図4の曲線⑤は式(15)によって調整した場合の倍率である. この例のように, 一般に, 式(15)により, 図1の動吸振器系の倍率曲線の二つの極大値をほぼ同大とし, $V_{x1 \max}$ を小さくおさえる近似的な最良調整が可能となる.

6. あとがき

本研究では, 振動数二乗比例形の交番力で調和的に加振される動吸振器系において, 主系, 吸振器双方に

粘性, クーロン両摩擦が共存する場合をとりあげて解析し最良調整の実際的な方法を検討した.

その内容を要約すれば

(1) 主系が一定振幅の力で加振される場合の解にならって無停滯振動の解を導いた.

(2) この解による数値計算結果とディジタルシミュレーションの結果とが合致することを確認することにより, 解法の妥当性を検証した.

(3) 最良調整値については, さきに報告した, 主系または吸振器のいずれか一方にクーロン摩擦力が偏在する場合の計算式を組合せたうえ, これに補正項を加える形の実用式を作った.

付 録

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は次の関係から定まる.

$$\lambda_{1,2} = -\alpha_1 \pm \beta_1 i, \quad \lambda_{3,4} = -\alpha_2 \pm \beta_2 i, \quad i = \sqrt{-1} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし, $\lambda_{1,2}, \lambda_{3,4}$ は次の四次方程式の根とする.

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + 2\{(1+\mu)h_2\omega_n + h_1\Omega_n\}\lambda^3 + \{\omega_n^2(\mu+1) + \Omega_n^2 + 4h_1h_2\omega_n\Omega_n\}\lambda^2 \\ &+ 2\omega_n\Omega_n(h_1\omega_n + h_2\Omega_n)\lambda + \omega_n^2\Omega_n^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

また, $b_1 \sim b_4$ は,

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 1 + \omega_n \{(\omega_n - 2h_2\alpha_1)(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - 4\alpha_1\beta_1^2 h_2\} / (\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2 \\ b_2 &= 2\omega_n \{\beta_1 h_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) + \alpha_1\beta_1(\omega_n - 2h_2\alpha_1)\} / (\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2 \\ b_3 &= 1 + \omega_n \{(\omega_n - 2h_2\alpha_2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2) - 4\alpha_2\beta_2^2 h_2\} / (\alpha_2^2 + \beta_2^2)^2 \\ b_4 &= 2\omega_n \{\beta_2 h_2(\alpha_2^2 - \beta_2^2) + \alpha_2\beta_2(\omega_n - 2h_2\alpha_2)\} / (\alpha_2^2 + \beta_2^2)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

さらに, $a_1 \sim a_4, a_1^* \sim a_4^*, \varepsilon_1, \varepsilon_2, X_1, \tau_c$ は次の諸式から求まる.

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \\ H_5 & H_6 & H_7 & H_8 & H_9 & H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ -\alpha_1 & \beta_1 & -\alpha_2 & \beta_2 & J_5 & J_6 & J_7 & J_8 \\ J_9 & J_{10} & J_{11} & J_{12} & -J_9 & -J_{10} & -J_{11} & -J_{12} \\ J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} & -J_{13} & -J_{14} & -J_{15} & -J_{16} \\ H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & -H_{13} & -H_{14} & -H_{15} & -H_{16} \\ H_{17} & H_{18} & H_{19} & H_{20} & -H_{17} & -H_{18} & -H_{19} & -H_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \\ a_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_{st}r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2x_{st}R/(\mu f^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= [(x_{st}X)^2 - (x_{st}r/\omega)^2 \{2\beta_1(b_1A_2 - b_2A_1) - 2\alpha_1(b_1A_1 + b_2A_2) + 2\beta_2(b_3A_4 - b_4A_3) \\ &- 2\alpha_2(b_3A_3 + b_4A_4)\}^2]^{1/2} + x_{st}r(1 + 2b_1A_1 + 2b_2A_2 + 2b_3A_3 + 2b_4A_4) \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$[x_{st}r\{1 + 2(b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 + b_4A_4)\} - X_1]/(2x_{st}rS) - \tan \varepsilon_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$[\varepsilon_1 + \cos^{-1}\{-(a_1J_{13} + a_2J_{14} + a_3J_{15} + a_4J_{16})/(x_{st}Y\omega)\}]/(\omega\tau_c) - 1 = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 - \tan^{-1}\{2fh_2\eta/(\eta^2 - f^2)\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= e^{-a_1\pi/\omega} \cos \theta_1 \\ J_2 &= e^{-a_1\pi/\omega} \sin \theta_1 \\ J_3 &= e^{-a_2\pi/\omega} \cos \theta_2 \\ J_4 &= e^{-a_2\pi/\omega} \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} J_5 &= e^{-\alpha_1 \pi / \omega} (-\alpha_1 \cos \theta_1 - \beta_1 \sin \theta_1) \\ J_6 &= e^{-\alpha_1 \pi / \omega} (-\alpha_1 \sin \theta_1 + \beta_1 \cos \theta_1) \\ J_7 &= e^{-\alpha_2 \pi / \omega} (-\alpha_2 \cos \theta_2 - \beta_2 \sin \theta_2) \\ J_8 &= e^{-\alpha_2 \pi / \omega} (-\alpha_2 \sin \theta_2 + \beta_2 \cos \theta_2) \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

$$\left. \begin{aligned} J_9 &= e^{-\alpha_1 \tau_c} \cos \beta_1 \tau_c \\ J_{10} &= e^{-\alpha_1 \tau_c} \sin \beta_1 \tau_c \\ J_{11} &= e^{-\alpha_2 \tau_c} \cos \beta_2 \tau_c \\ J_{12} &= e^{-\alpha_2 \tau_c} \sin \beta_2 \tau_c \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{13} &= e^{-\alpha_1 \tau_c} (-\alpha_1 \cos \beta_1 \tau_c - \beta_1 \sin \beta_1 \tau_c) \\ J_{14} &= e^{-\alpha_1 \tau_c} (-\alpha_1 \sin \beta_1 \tau_c + \beta_1 \cos \beta_1 \tau_c) \\ J_{15} &= e^{-\alpha_2 \tau_c} (-\alpha_2 \cos \beta_2 \tau_c - \beta_2 \sin \beta_2 \tau_c) \\ J_{16} &= e^{-\alpha_2 \tau_c} (-\alpha_2 \sin \beta_2 \tau_c + \beta_2 \cos \beta_2 \tau_c) \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= b_1 J_1 - b_2 J_2, & H_2 &= b_2 J_1 + b_1 J_2 \\ H_3 &= b_3 J_3 - b_4 J_4, & H_4 &= b_4 J_3 + b_3 J_4 \\ H_5 &= -\alpha_1 b_1 - \beta_1 b_2, & H_6 &= -\alpha_1 b_2 + \beta_1 b_1 \\ H_7 &= -\alpha_2 b_3 - \beta_2 b_4, & H_8 &= -\alpha_2 b_4 + \beta_2 b_3 \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} H_9 &= b_1 J_5 - b_2 J_6, & H_{10} &= b_2 J_5 + b_1 J_6 \\ H_{11} &= b_3 J_7 - b_4 J_8, & H_{12} &= b_4 J_7 + b_3 J_8 \\ H_{13} &= b_1 J_9 - b_2 J_{10}, & H_{14} &= b_2 J_9 + b_1 J_{10} \\ H_{15} &= b_3 J_{11} - b_4 J_{12}, & H_{16} &= b_4 J_{11} + b_3 J_{12} \\ H_{17} &= b_1 J_{13} - b_2 J_{14}, & H_{18} &= b_2 J_{13} + b_1 J_{14} \\ H_{19} &= b_3 J_{15} - b_4 J_{16}, & H_{20} &= b_4 J_{15} + b_3 J_{16} \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

$$\begin{aligned} S &= \alpha_1 (b_1 A_1 + b_2 A_2) - \beta_1 (b_1 A_2 - b_2 A_1) \\ &\quad + \alpha_2 (b_3 A_3 + b_4 A_4) - \beta_2 (b_3 A_4 - b_4 A_3) \end{aligned} \dots (31)$$

$$\theta_1 = \beta_1 \pi / \omega, \quad \theta_2 = \beta_2 \pi / \omega \dots (32)$$

$$A_j = a_j / (2x_{st} r), \quad (j=1, 2, 3, 4) \dots (33)$$

なお、式(21)の X_1 について、正の実数解がただ一つだけ定まるためには、次式が成立しなければならない。

$$\begin{aligned} r \leq X\omega [& (1 + 2b_1 A_1 + 2b_2 A_2 + 2b_3 A_3 \\ & + 2b_4 A_4)^2 + \{2\beta_1 (b_1 A_2 - b_2 A_1) \\ & - 2\alpha_1 (b_1 A_1 + b_2 A_2) + 2\beta_2 (b_3 A_4 - b_4 A_3) \\ & - 2\alpha_2 (b_3 A_3 + b_4 A_4)\}^2]^{-1/2} \dots (34) \end{aligned}$$

文 献

- (1) Brock, J. E., *Trans. ASME*, **61**-1 (1949).
- (2) 池田・五百井, 機論, **43**-369, (昭52), 1707.
- (3) 白石・山川, 機論, **50**-457, C (昭59), 1715.
- (4) 白石・山川, 機論, **51**-471, C (昭60), 3022.
- (5) 白石・山川, 機論, **50**-453, C (昭59), 819.
- (6) HITAC 連続型シミュレーションプログラム DDS 3 言語形式マニュアル, (昭53), 日立製作所.