衝撃応答抑制機能を有する動吸振器に関する研究*

(第3報, 予見動作法の最適設計)

田 中 信 雄^{*1}, 菊 島 義 弘^{*1}

A Study on the Dynamic Damper with a Preview Action (3rd Report, Optimal Design of a Dynamic Damper with a Preview Action)

Nobuo TANAKA and Yoshihiro KIKUSHIMA

This paper deals with a method of designing a dynamic damper with the preview action proposed in the previous papers. It is the purpose of this paper to achieve an optimal design of the dynamic damper with the preview action, which is applied to a vibratory system with damping. First, in order to attain a systematic design of the dynamic damper system, a modern control theory is used, and two kinds of design equations are derived; one for optimal design parameters and the other for optimal preview action. Then, from the viewpoint of nonlinear programming, these equations are solved, presenting design charts of the dynamic damper with the preview action. Furthermore, a dominant factor of the control effect is investigated. Finally, the design procedure proposed in the present paper is applied to a conventional dynamic damper, and the control effect for the suppression of impact vibration is discussed.

Key Words: Shock, Vibration Control, Modern Control Theory, Dynamic Damper, Preview Action, Transient Vibration

1. 緒 言

第1報⁽¹⁾では, 受動形制振要素として広く用いられている動吸振器に, 予見動作機構を付加することにより, 衝撃応答抑制機能を持たせた新しい制振原理を提案した。また, 非減衰振動系を対象とし, 当該動吸振器による最大衝撃伝達力の抑制を目的として, 直感的な視点から最適調整条件と最適予見条件を明らかにした。ついで第2報⁽²⁾では, 本制振原理の実現化を図るとともに, 実験により制振効果を検証し, その有意性を立証した。

ところで, 実際の振動系においては必ず減衰が伴い, 減衰の有無により従来形の動吸振器の最適調整条件も異なることが知られている⁽³⁾。そこで, 本論文においては, 予見動作法による動吸振器の適用をより一般的なものとするために, 減衰振動系を対象とし, さらに前報⁽¹⁾で示した直感的な設計法に代えて, 系統的な最適設計法を明らかにすることを目的とする。減衰振動系を対象とする場合は, 従来形の動吸振器の設計法⁽³⁾にも見られるように, 最適設計条件式が解析的に

求まらないなど, その取扱いが煩雑となる。

そこで, 本論文においては, 系統的な設計法が期待できる現代制御理論を当該系の設計に適用することにする。そのためにはまず, 第1報⁽¹⁾と同様に衝撃応答を衝撃伝達力で代表させ, この二乗積分値を最小とする最適制御問題に定式化し, これより制御則に相当する最適調整条件ならびに最適予見条件を導出することから始める。次に, 最適条件式の解法に当たっては, これが非線形マトリックス方程式であることを考慮して, 数値計画法を適用することにする。さらに, 振動制御問題の設定から動吸振器の最適調整法および最適予見動作法の決定に至る一連の設計手順を図式化することにより, 設計遂行のための便宜を図るとともに, ここで示される設計手順に従って, 具体的な適用を試みる。最後に, 予見動作機能を持たない通常の動吸振器の設計に, 本論文で提案された設計手法を適用した場合と, 従来方法により最適調整した場合について, 衝撃応答抑制機能の観点より比較検討を行う。

主 な 記 号

M : 主振動系質量

C : 主振動系粘性係数

K : 主振動系ばね定数

* 昭和62年4月3日 第64期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和61年9月30日。

^{*1} 正員, 工業技術院機械技術研究所 (〒305 茨城県新治郡桜村並木1-2)。

M_d : 動吸振器質量
 C_d : 動吸振器粘性係数
 K_d : 動吸振器ばね定数
 ζ_t : 主振動系減衰比
 ζ_d : 動吸振器減衰比
 ω_t : 主振動系固有角振動数
 ω_d : 動吸振器固有角振動数
 f_{im} : 衝撃力
 f_t : 衝撃伝達力
 μ : 質量比
 x : 主振動系変位
 x_d : 動吸振器変位
 t_0 : 予見時間

度減衰振動系に取付けた場合の運動方程式は、次のように記述できる。

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) + C_d\{\dot{x}(t) - \dot{x}_d(t)\} + K_d\{x(t) - x_d(t)\} = f_{im}(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$M_d\ddot{x}_d(t) + C_d\{\dot{x}_d(t) - \dot{x}(t)\} + K_d\{x_d(t) - x(t)\} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

式(1), (2)を統合して一つの状態方程式を作成すると次式を得る。

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{w}(t) + \mathbf{b}_w \cdot f_{im}(t) \dots\dots\dots (3)$$

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \dots\dots\dots (4)$$

さらに、伝達力 $f_t(t)$ は状態ベクトル $\mathbf{w}(t)$ を用いることにより

$$f_t(t) = \mathbf{c}_t' \mathbf{w}(t) \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $'$ は転置を表し、 $\mathbf{w}(t)$, 係数マトリックス $\mathbf{M}$, およびベクトル $\mathbf{b}_w, \mathbf{c}_t$ は次のように定義される。

2. 最適設計条件式の導出

2-1 最適設計問題の定式化 動吸振器を一自由

$$\mathbf{w}(t) = \text{col} \{x(t), \dot{x}(t), x_d(t), \dot{x}_d(t)\}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(K+K_d)/M & -(C+C_d)/M & K_d/M & C_d/M \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_d/M_d & C_d/M_d & -K_d/M_d & -C_d/M_d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_w = \text{col} (0, 1/M, 0, 0)$$

$$\mathbf{c}_t = \text{col} (K, C, 0, 0) \dots\dots\dots (6)$$

次に、時刻 $t=0$ において動吸振器の初期変位 $x_d(0)$ が解放され、さらに時刻 $t=t_0$ において衝撃力 $f_{im}(t)$ が主振動系に加わるものとする、初期ベクトル $\mathbf{w}_0$ および衝撃力 $f_{im}(t)$ は次のように記述される。

$$\mathbf{w}_0 = \text{col} \{0, 0, x_d(0), 0\}$$

$$f_{im}(t) = f_0 \delta(t - t_0) \dots\dots\dots (7)$$

さらに、式(3)の状態方程式は式(7)および推移マトリックス $\Phi(t)$ を用いることで次式のように解くことができる。

$$\mathbf{w}(t) = \begin{cases} \Phi(t) \mathbf{w}_0 & 0 \leq t < t_0 \\ \Phi(t) \mathbf{w}_0 + f_0 \Phi(t - t_0) \mathbf{b}_w & t \geq t_0 \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

ここで式(7)の δ はディラックの δ 関数を意味し、式(8)の $\Phi(t)$ は、次のように定義される。

$$\Phi(t) = \exp [\mathbf{M}t] \dots\dots\dots (9)$$

次に、系設計を定量的に進めるために、評価指数を定義する必要がある。そこで本論文では衝撃伝達力 f_t のパワーに相当する二乗積分値 f_{ip} を評価指数と置き、これを最小とする最適設計条件を導き出すものとする。まず、評価指数を次式のように定義する。

$$f_{ip} = \int_0^\infty f_t^2(t) dt \dots\dots\dots (10)$$

さらに、 f_{ip} は式(8)を用いて次のように展開される。

$$\begin{aligned} f_{ip} &= \int_0^{t_0} \bar{\mathbf{w}}_0' \Phi'(t) \mathbf{c}_t \mathbf{c}_t' \Phi(t) \mathbf{w}_0 dt + \int_{t_0}^\infty \{ \mathbf{w}_0' \Phi'(t) + f_0 \mathbf{b}_w' \Phi'(t - t_0) \} \mathbf{c}_t \mathbf{c}_t' \{ \Phi(t) \mathbf{w}_0 + f_0 \Phi(t - t_0) \mathbf{b}_w \} dt \\ &= \mathbf{w}_0' \mathbf{p} \mathbf{w}_0 + f_0 \mathbf{b}_w' \mathbf{p} \Phi(t_0) \mathbf{w}_0 + f_0 \mathbf{w}_0' \Phi'(t_0) \mathbf{p} \mathbf{b}_w + f_0^2 \mathbf{b}_w' \mathbf{p} \mathbf{b}_w = \text{tr} [\mathbf{p} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0'] + 2f_0 \text{tr} [\mathbf{p} \Phi(t_0) \mathbf{w}_0 \mathbf{b}_w'] + f_0^2 \text{tr} \\ &= \text{tr} [\mathbf{p} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0'] + 2f_0 \text{tr} [\mathbf{p} \Phi(t_0) \mathbf{w}_0 \mathbf{b}_w'] + f_0^2 \text{tr} [\mathbf{p} \mathbf{b}_w \mathbf{b}_w'] \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし、 tr はトレースを表し、マトリックス $\mathbf{p}$ は次のように定義される。

$$\mathbf{p} = \int_0^\infty \Phi'(t) \mathbf{c}_t \mathbf{c}_t' \Phi(t) dt = \int_{t_0}^\infty \Phi'(t - t_0) \mathbf{c}_t \mathbf{c}_t' \Phi(t - t_0) dt \dots\dots\dots (12)$$

さらに、式(12)で定義されたマトリックス $\mathbf{p}$ は、次のマトリックス方程式を満足する。すなわち、

$$\mathbf{M}'\mathbf{p} + \mathbf{p}\mathbf{M} + \mathbf{c}_i\mathbf{c}_i' = 0 \quad (13)$$

次に、評価指数 f_{ip} を最小とする最適設計条件式を導出することになるが、本論文では動吸振器の質量 M_d はあらかじめ与えられるものと仮定し、最適調整条件 C_d, K_d および最適予見条件 $x_d(0), t_0$ を求める最適制御問題に定式化することとする。そのための作業として、まず係数マトリックス $\mathbf{M}$ を次のように展開する。

$$\mathbf{M} = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{G}\hat{\mathbf{C}} \quad (14)$$

ただし、

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,0 \\ -K/M & -C/M & 0,0 \\ 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/M_d \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = (K_d, C_d)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0,1,0 \\ 0 & -1,0,1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式(14)、(15)の展開式をみると明らかなように、最適調整条件に関する因子 K_d および C_d は、ゲインマトリックス $\mathbf{G}$ に集約され、形式上は出力フィードバックゲインを求める制御問題に置換されたことになる。そこで、最適設計条件のうち、まず最適調整条件式を導出することとする。

2.2 最適調整条件式の導出 式(11)で記述された f_{ip} をゲインマトリックス $\mathbf{G}$ の要素 $G_i (i=1,2)$ で偏微分すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ip}}{\partial G_i} = & \operatorname{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0' \right] + 2f_0 \operatorname{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} \Phi(t_0) \right. \\ & \times \mathbf{w}_0 \mathbf{b}_w' + \mathbf{p} \frac{\partial \Phi(t_0)}{\partial G_i} \mathbf{w}_0 \mathbf{b}_w' \left. \right] + f_0^2 \operatorname{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} \mathbf{b}_w \mathbf{b}_w' \right] \end{aligned} \quad (16)$$

同様に、式(13)のマトリックス方程式を G_i で偏微分すると

$$\hat{\mathbf{C}}' \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{p} + \mathbf{M}' \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} \mathbf{M} + \mathbf{p} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{C}} = 0 \quad (17)$$

ここで、 $\mathbf{e}_i$ は i 番めの要素が1である単位ベクトルを表す。式(17)は、さらに次式の積分方程式としても記述することができる。

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} = \int_0^\infty \Phi'(t) \{ \mathbf{p} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}}' \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{B}} \mathbf{p} \} \Phi(t) dt \quad (18)$$

次に式(18)を式(16)の右辺第1, 2, 4項に代入し整理すると、これらは次のようになる。まず第1項に関しては、

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0' \right] \\ &= \int_0^\infty \operatorname{tr} [\Phi'(t) \{ \mathbf{p} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}}' \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{B}} \mathbf{p} \} \\ & \quad \times \Phi(t) \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0'] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^\infty \operatorname{tr} [\hat{\mathbf{C}}' \mathbf{e}_i \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{p} \Phi(t) \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0' \Phi'(t)] dt \\ &= 2 \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{p} \int_0^\infty \Phi(t) \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0' \Phi'(t) dt \hat{\mathbf{C}}' \mathbf{e}_i \\ &= 2 \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{p} \mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{C}}' \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、マトリックス $\mathbf{L}_1$ は次式のように定義される。

$$\mathbf{L}_1 = \int_0^\infty \Phi(t) \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0' \Phi'(t) dt \quad (20)$$

式(20)で定義されたマトリックス $\mathbf{L}_1$ は、さらに次のマトリックス方程式を満足する。

$$\mathbf{M} \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1 \mathbf{M}' + \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_0' = 0 \quad (21)$$

同様に、第2項および第4項に関しても、次のように計算される。

$$2f_0 \operatorname{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} \Phi(t_0) \mathbf{w}_0 \mathbf{b}_w' \right] = 4f_0 \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{p} \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{C}}' \mathbf{e}_i \quad (22)$$

$$f_0^2 \operatorname{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial G_i} \mathbf{b}_w \mathbf{b}_w' \right] = 2f_0^2 \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{p} \mathbf{L}_3 \hat{\mathbf{C}}' \mathbf{e}_i \quad (23)$$

ただし、マトリックス $\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3$ は次式を満足する。

$$\mathbf{M} \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_2 \mathbf{M}' + \Phi(t_0) \mathbf{w}_0 \mathbf{b}_w' = 0 \quad (24)$$

$$\mathbf{M} \mathbf{L}_3 + \mathbf{L}_3 \mathbf{M}' + \mathbf{b}_w \mathbf{b}_w' = 0 \quad (25)$$

次に、式(16)の右辺第3項の計算に移る前に、推移マトリックス $\Phi(t_0)$ の計算方法について記すことにする。ここでは簡単のために、マトリックス $\mathbf{M}$ の固有値 $\lambda_i (i=1 \sim 4)$ はすべて相異なると仮定すると、 $\Phi(t_0)$ は次のように展開できる。

$$\Phi(t_0) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{M}^2 + \alpha_3 \mathbf{M}^3 \quad (26)$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は単位マトリックスを表す。また、係数 $\alpha_i (i=0 \sim 3)$ はシルベスターの補間公式⁽⁴⁾を用い、次の連立一次方程式を解くことにより求めることができる。

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp[\lambda_1 t_0] \\ \exp[\lambda_2 t_0] \\ \exp[\lambda_3 t_0] \\ \exp[\lambda_4 t_0] \end{bmatrix} \quad (27)$$

したがって、式(26)で記述される $\Phi(t_0)$ を式(24)に代入すれば、このマトリックス方程式を解くことができる。なお、固有値が重根を持つ場合もシルベスターの補間公式を用いて同様に解くことができる。

式(26)を式(16)の右辺第3項に代入し、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 & 2f_0 \operatorname{tr} \left[p \frac{\partial \Phi(t_0)}{\partial G_i} w_0 b'_w \right] \\
 &= 2f_0 [\hat{B}'(\alpha_1 I + \alpha_2 M' + \alpha_3 M'^2) Q \hat{C}' \\
 &+ \hat{B}'\{\alpha_2 Q M' + \alpha_3 (M' Q M' + Q M'^2)\} \hat{C}'] e_i \\
 &\dots\dots\dots (28)
 \end{aligned}$$

ただし

$$Q = p b_w w'_0 \dots\dots\dots (29)$$

そこで、式(19)、(22)、(23)、(28)を式(16)に代入し整理することで次式が得られ、これを零とすることで最適調整条件式が求められる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{ip}}{\partial G} &= 2\hat{B}' p L_1 \hat{C}' + 2f_0 \hat{B}' \{2p L_2 + (\alpha_1 I + \alpha_2 M' \\
 &+ \alpha_3 M'^2) Q + \alpha_2 Q M' + \alpha_3 (M' Q M' + Q M'^2)\} \hat{C}' \\
 &+ 2f_0^2 \hat{B}' p L_3 \hat{C}' \dots\dots\dots (30)
 \end{aligned}$$

2.3 最適予見条件式の導出 本節では、動吸振器の予見動作を支配する因子 $x_d(0)$ および t_0 に関する最適予見条件式を導出する。まず、式(7)における初期ベクトル w_0 は、単位ベクトル e_3 を導入することにより、次式のように表すことができる。

$$w_0 = x_d(0) e_3 \dots\dots\dots (31)$$

式(31)を式(11)に代入すると、評価指数 f_{ip} は $x_d(0)$ の陽な関数として次のように記述することができる。

$$\begin{aligned}
 f_{ip} &= x_d^2(0) \operatorname{tr} [p e_3 e'_3] + 2f_0 \cdot x_d(0) \operatorname{tr} [p \Phi(t_0) \\
 &\times e_3 b'_w] + f_0^2 \cdot \operatorname{tr} [p b_w b'_w] \dots\dots\dots (32)
 \end{aligned}$$

式(32)を $x_d(0)$ で偏微分すると、次式に示す必要条件が求まる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{ip}}{\partial x_d(0)} &= 2x_d(0) \operatorname{tr} [p e_3 e'_3] \\
 &+ 2f_0 \cdot \operatorname{tr} [p \Phi(t_0) e_3 b'_w] \dots\dots\dots (33)
 \end{aligned}$$

次に、 t_0 に関する必要条件を導出する。式(11)において、 t_0 の関数は $\Phi(t_0)$ のみであることから、式(11)を t_0 に関して偏微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{ip}}{\partial t_0} &= 2f_0 \cdot \operatorname{tr} \left[p \frac{\partial \Phi(t_0)}{\partial t_0} w_0 b'_w \right] \\
 &= 2f_0 \cdot \operatorname{tr} [p M \Phi(t_0) w_0 b'_w] \dots\dots\dots (34)
 \end{aligned}$$

式(33)、(34)を零と置くことにより最適予見条件式を得る。

3. 予見動作法の最適設計

本章では、2章で導出した最適調整条件式および最適予見条件式をもとに動吸振器の設計定数を求め、これを無次元化した設計図表に表すことで、予見動作法の最適設計問題が容易に解けるようにする。なお、最適設計条件式の具体的な解法に当たっては、これらが非線形マトリックス方程式であることを考慮して、非線形計画法の立場から、式(11)の評価指数 f_{ip} および式(30)のこう配ベクトルと式(33)、(34)で表されるこ

う配を用いて Powell 法⁽⁵⁾により最適解を探索するものとする。また、主振動系の減衰比 ζ_i および質量比 μ としては、現実的な値を考えて、 ζ_i は 0.005~0.3、 μ は 0.05~0.2 の範囲内で設計定数を算出するものとする。

図1は ζ_i と制振効果の関係を示している。ここで、 $\bar{f}_{ip}$ および $\bar{f}_{i\max}$ は、次式のように f_{ip} および衝撃伝達力 f_i の最大値 $f_{i\max}$ を無次元化したものである。

$$\bar{f}_{ip} = f_{ip} / (f_0^2 \cdot \omega_i) \dots\dots\dots (35)$$

$$\bar{f}_{i\max} = f_{i\max} / (f_0 \cdot \omega_i) \dots\dots\dots (36)$$

まず、 $\bar{f}_{ip}$ と ζ_i の関係から見ると、 ζ_i の増大とともに $\bar{f}_{ip}$ はわずかながら減少を続け、 $\zeta_i=0.08$ で最小値 0.281 となっている。 ζ_i がさらに増えると、 $\bar{f}_{ip}$ は逆に悪化し、0.1 を過ぎるとその傾向は顕著となる。一方、 $\bar{f}_{i\max}$ は ζ_i が 0.005 から 0.3 の範囲では、 ζ_i の増加に対して単調減少していることがわかる。ここで特筆すべきは $\bar{f}_{ip}$ および $\bar{f}_{i\max}$ は質量比 μ の値には無関係に定まり、 ζ_i のみで決定されている点にある。従来の動吸振器の設計においては、 μ がその効果を支配する重要な因子であったのに対し、予見動作法においては、 μ が 0.05~0.2 の範囲で計算した限りでは、制振効果は μ の値には関わりなく、 ζ_i の値のみで定まっている。このことは、著者の一人がサーボダンパに関する論文⁽⁶⁾の中で、 μ はサーボダンパの制振機能には関与しない点を指摘しているが、予見動作法による動吸振器の設計においても、同じような特徴が得られている。図1には、参考までに、動吸振器非動作状態における、換言すれば弾性支持法を適用した場合の $\bar{f}_{ip}$ ⁽⁷⁾ を載せてある。この場合、 ζ_i の増大とともに $\bar{f}_{ip}$ は著しく低下するが、 $\zeta_i=0.5$ で最小となり、1.0 より小さくなることはない。

図2、3は最適調整条件を ζ_i に対して図示したものである。ここで、動吸振器の固有角振動数 ω_d は、次式のように無次元化している。

図1 主振動系減衰比に対する制振効果

$$\bar{\omega}_d = \omega_d / \omega_t \dots\dots\dots (37)$$

まず、図2における ζ_d と ζ_t の関係をみると、 ζ_t が0.05程度までは ζ_d の ζ_t に対する変化は緩慢であるが、 ζ_t が0.05を過ぎ、とりわけ0.1以上となると、 ζ_d は大きく変化し急速に減少しているのがわかる。また、 μ を大きくすると、同じ ζ_t に対して ζ_d の値は小さくなる。一方、 $\bar{\omega}_d$ に関しては、 ζ_t がほぼ0.1まではほとんど一定値を保っているが、その後は ζ_d と同様に急激に変化する。また、 μ を増すと、 $\bar{\omega}_d$ は減少する。

次に最適予見条件を図4, 5に示す。ここで無次元化された $\bar{t}_0$ と $\bar{x}_d(0)$ は、次式のように定義される。

$$\bar{t}_0 = t_0 \cdot \omega_t \dots\dots\dots (38)$$

$$\bar{x}_d(0) = Kx_d(0) / (f_0 \cdot \omega_t) \dots\dots\dots (39)$$

まず、 $\bar{t}_0$ と ζ_t の関係を見ると、 ζ_t が0.1以下の場合、 $\bar{t}_0$ はほぼ一定の値をとり、 μ を大きくすると $\bar{t}_0$ も大きくなる。しかしながら ζ_t が0.1を超えると、 $\bar{t}_0$ は ζ_t に対して直線的に変化するようになる。次に $\bar{x}_d(0)$ に関しては、これまでのケースとは傾向が異なり、 ζ_t が0.15付近で最大となっている。また、 ζ_t が0.1以下の場合にはこれまでと同様に、ほぼ一定の値を呈している。 $\bar{x}_d(0)$ と μ はほぼ反比例の関係にあり、 μ を2倍にすると $\bar{x}_d(0)$ は約1/2となっている。したがって、

制振効果 $\bar{f}_{ip}$ は μ には依存されることなく決定されるが、 μ を小さくすればその分を $\bar{x}_d(0)$ が補完し、制振効果を維持しているといえる。したがって、 μ の値をどのように決定するかという問題に対しては、図5を利用することにより、実際に許容しうる初期変位量 $x(0)$ から μ を決定するのも一方法である。 μ が定めれば、図2~4を用いて残りの最適設計値 ζ_d, ω_d, t_0 を求めることができる。以上に述べた設計手順を図式化したのが図6である。

4. 数値計算例

4.1 予見動作法の最適設計例 本節では、具体

表1 設計諸元

M kg	C kN·S/m	K MN/m	M _d kg	f ₀ N·S
400	2.51~25.13	39.48	40	127.324

表2 ζ_t に対する最適設計値および制振効果

ζ_t	f_{ip} kN ² ·S	ζ_d	$\omega_d/2\pi$ Hz	$\bar{x}_d(0)$ cm	t_0 mS
0.01	1.47	0.330	49.86	0.723	9.97
0.05	1.44	0.326	49.87	0.734	9.93
0.10	1.43	0.320	49.89	0.742	9.87

図2 最適調整条件図 (ζ_t に対する ζ_d)

図4 最適予見条件図 (ζ_t に対する $\bar{t}_0$)

図3 最適調整条件図 (ζ_t に対する $\bar{\omega}_d$)

図5 最適予見条件図 (ζ_t に対する $\bar{x}_d(0)$)

的な数値例をもとに、前章までに提示した設計手順に従い、予見動作法の適用を試みる。まず表1には、設計諸元が示されており、 ζ_t に関しては0.01~0.1の範囲を対象としている。表2にはこの値に基づいて最適調整値と最適予見条件値を求めた結果が載せられている。ここで、衝撃力の力積 f_0 を127.324 N・sとしているが、これは例えば最大値が100 kN、作用時間が2 msのハーフサインパルスに相当する衝撃力が系に作用すると考えればよい。表2に示す条件のもとで決定される衝撃伝達力の時刻歴応答を示すと図7となる。

ところで、池田ら⁽³⁾は減衰振動系を対象とした動吸振器の最適調整法のための実用式を提示しているが、図7には比較のために、本手法にのっとり設計された動吸振器による衝撃伝達力の抑制効果も合わせて載せている。例えば、主振動系の減衰比 ζ_t が0.01の場合、動吸振器非動作時（弾性支持法に相当）における衝撃伝達力は、最大値 f_{tmax} が39.4 kNで、かつ残留振動も著しいが、従来形の動吸振器を適用することで減衰能は改善され、残留振動も大幅に抑制されている。しかしながら、 f_{tmax} は37.6 kNと依然大きく、動吸振器非動作時のわずか4.6%しか改善されていない。また、 f_{tp} はこの場合20.4 kN²・sとなり、動吸振器非動

作時の16.0%にまで抑制されている。

予見動作法の効果を見ると、従来形の動吸振器ではほとんど抑制することができなかった f_{tmax} を、動吸振器非動作時の約40%に当たる15.89 kNにまで抑制することができ、残留振動もほとんど消滅している。また、 f_{tp} に関して見れば、弾性支持法を適用した場合の1.15%にまで抑制され、これは従来形の動吸振器を適用した場合より、さらに13.9倍も改善されていることになる。

前報⁽¹⁾においては最適性の基準を衝撃応答の第1波と第2波の値を等しくすることに置いたが、本論文では衝撃伝達力の二乗積分値 f_{tp} を最小とするように最適設計条件を求めているので、結果的には衝撃伝達力の第1波の値のほうが第2波より大きく現れている。しかしながら、第1波と第2波の値の差は、 ζ_t が大きくなるに従い縮まる傾向があり、図には示されていないが、 ζ_t が0.3近傍で両者の値は一致し、さらに ζ_t が増え、逆に第2波の値のほうが大きくなる。

4.2 質量比 μ に関する考察 次に、予見動作法の特徴の一つであるところの、質量比は制振効果に影響を及ぼさないという点について、数値例を用いて検証することにする。具体的な仕様としては、主振動系

図6 予見動作法の設計フロー線図

図7 衝撃伝達力抑制効果

 図8 μ を変化した場合の衝撃伝達力抑制効果

表 3 $\zeta_t=0.1, \mu=0.05\sim0.2$ に対する最適設計値と制振効果

μ	f_{tp} $\text{kN}^2\cdot\text{s}$	f_{tmax} kN	ζ_d	$\omega_d/2\pi$ Hz	$x_d(0)$ cm	t_0 ms
0.05	1.43	15.0	0.321	50.13	1.444	9.84
0.10	1.43	15.0	0.320	49.89	0.742	9.87
0.20	1.43	15.0	0.313	49.12	0.388	9.98

図 9 最適調整された系の力伝達率

図 10 μ を変化した場合の衝撃伝達力 f_t の分力

減衰比 ζ_t を 0.1 とし, μ を 0.05~0.2 まで変化させた場合を取り上げる. 表 3 はこの場合の最適設計値を示し, この条件下で衝撃伝達力を求めると図 8 となる. いずれの場合も f_{tp} は $1.43 \text{ kN}^2\cdot\text{s}$ になることは図 1 から知ることができるが, 図で見る限り衝撃伝達力波形もほとんど一致していることがわかる. また, 動吸振器非動作時に 35.2 kN あった f_{tmax} は, いずれの場合も 15.0 kN にまで抑制されている.

図 9 は表 3 に示された最適調整値を適用した場合の力伝達率を示している. 従来形の動吸振器⁽³⁾を適用した場合は共振ピークが二分され, かつそのレベルは等しい. しかしながら, 予見動作法では従来形の動吸振器の最適減衰比 ζ_d より, かなり高めに与えられているため, 共振ピークは二分されてはおらず, ピーク値は $\mu=0.1$ の場合を例にとると, 3.5 dB ほど高く現れている.

ところで, μ が異なれば当然系の固有値も異なり, 図 9 に示されているように力伝達率も変化する. しかしながら, この力伝達率を経由して発生する衝撃伝達

図 11 制振力 f_d と制振伝達力 f_{td} 図 12 μ を変化した場合の制振力

力 f_t は, 図 8 を見ても明らかのように, 相違が認められないほどよく一致している. そこで, 次にその理由を考察する. 図 10 は μ が 0.05 と 0.2 の場合の, 衝撃力 f_{im} による衝撃伝達力 f_{tim} および初期変位 $x_d(0)$ の解放によって得られる制振伝達力 f_{td} の波形を示している. これらの形状をみると, μ が 0.05 と 0.2 とでは明らかに異なっており, f_t の要素である f_{tim} と f_{td} には固有値の変化が反映していることがわかる. しかしながら, 図で明らかのように f_{tim} の 1.5 波以後と f_{td} の 2 波以後はほとんど一致した波形が現れているため, それらがちょうど相殺され, 結果的には予見動作法に特有な第 1 波が主として残ることになる. この第 1 波は $x_d(0)$ を解放した際に生じ, f_{tim} の抑制には用いられることなく, そのまま f_t に現れており, これが f_t を支配する結果となっている. この第 1 波は, 当然系の固有値の変化に応じて異なってしかるべきであるが, 図から見てわかるように, μ の変化に対しても相違は認められないほどよく一致している. そこで次に, この点に関して考察を加える.

図 11 は $x_d(0)$ を解放した場合に K_d と C_d を通じて主振動系の質量 M に伝搬される制振力 f_d と, f_d の伝

図 13 本設計法と従来手法による動吸振器の最適調整値と制振効果

達力である制振伝達力 f_{td} を示している。図にはさらに主振動系の質量を無限大と仮定した場合に得られる f_d が破線で描かれている。これら二つの f_d は 0~5.4 ms の間は合致しているが、それ以後は主振動系の振動特性に影響され両者の波形は相違してくる。逆にいえば、0~5.4 ms の期間は、 f_d は主振動系の影響を受けず、独立して主振動系に作用しているといえる。したがって、この期間における伝達力は主振動系の特性と制振力により支配され、その固有周期 20 ms の 1/4 に当たる 5 ms の時点で最大値が生成されることになる。また、図 12 を見ても明らかなように、 μ が 0.05 と 0.2 の場合の制振力 f_d は、0~5.4 ms の範囲においてほとんど相違が認められないことから、第 1 波の形状は μ の値にかかわらず、ほとんど一致することになる。

4.3 衝撃応答抑制を考慮した動吸振器の設計
 本節では、動吸振器に予見動作法を持たせることなく、最適調整のみで達成できる衝撃応答抑制効果を明らかにする。最適条件式の解法に当たっては、次式の制約条件を付加することで、これまでと同様に求めることができる。

$$t_0=0, x_d(0)=0 \quad \dots\dots\dots (40)$$

図 13 は、主振動系減衰比 ζ_d が 0.1 の場合を例にとり、従来形の動吸振器¹³⁾および本方式で得られる、最適調整値および制振効果を μ に対して示している。 ζ_d に関しては全体的に従来形のほうが本方式の場合より大きく現れており、例えば μ が 0.1 の場合、20%程度従来形のほうが大きい。一方、 $\bar{\omega}_d$ に関しては、本方式の方が従来形よりも大きく、その傾向は μ の増大とともに顕著となる。しかしながら、 $\bar{f}_{tp}$ に関しては、本方式のほうが従来形より多少優る程度で、その差はわずか 2%程度にすぎない。したがって、従来形の動

 図 14 衝撃伝達力抑制効果 ($\zeta_t=0.1, \mu=0.1$)

吸振器は定常振動の抑制を目的として設計されてはいるが、衝撃応答抑制効果の観点からしても、最適に近い設計定数となっていることがわかる。図 14 は、 ζ_t が 0.1、 μ が 0.1 の場合の衝撃伝達力を示しており、波形で見ても両者の間に大きな相違は認められない。

5. 結 言

予見動作法による動吸振方式を、減衰振動系の衝撃応答抑制問題に適用し、現代制御理論を適用することにより、当該系の最適設計法を明らかにした。本論文で得られた成果を要約すると、次のようになる。

(1) 減衰振動系を対象として、予見動作法による動吸振器の最適調整条件式と最適予見条件式を現代制御理論を用いて導出した。

(2) 予見動作法の最適設計値が系統的に求まるように設計図表を提示するとともに、そこで示された設計手順に従い、数値設計例をもとに具体的な適用を行った。例えば ζ_t が 0.01 の場合、動吸振器非動作時と比較して、 f_{tp} は 1.15%、 f_{tmax} は 40% にまで抑制され、 f_{tp} に関しては従来形の動吸振器を適用した場合より 13.9 倍、 f_{tmax} に関しては 13.1 倍も改善されることが明らかにされた。

(3) 従来形の動吸振器の設計においては、質量比 μ は制振効果を支配する重要な因子であるが、予見動作法においては、制振効果は質量比 μ には関わりなく、主振動系減衰比 ζ_d によって定まることが明らかにされた。

(4) 質量比 μ と動吸振器の最適初期変位量 $x_d(0)$ は、ほぼ反比例の関係にあることが示された。

(5) 主振動系の減衰比 ζ_d が 0.1 以下の場合、最適調整値および最適予見条件値はほぼ一定とみなせるが、 ζ_d が 0.1 を超えるとそれらは大きく変動し、 ζ_d に対する調整が必要であることが示された。

(6) 従来形の最適調整された動吸振器を衝撃応答抑制の観点から考察したところ、最適に近い制振効果が得られていることが判明した。

文 献

- (1) 田中・菊島, 機論, 52-484, C (昭61), 3175.
(2) 田中・菊島, 機論, 53-487, C (昭62), 650.
(3) 池田・五百井, 機論, 43-369 (昭52), 1707.
(4) Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems*,
(1967), 257, CcGraw-Hill.
(5) 今野, 非線形計画法, (昭53), 206, 日科技連出版社.
(6) 田中・ほか4名, 機論, 43-366 (昭52), 550.
(7) 田中・菊島, 機論, 52-476, C (昭61), 1297.
-