宇宙における剛体多体システムの定式化*

山田 克彦^{*1}, 土屋 和雄^{*2}

Formulation of Rigid Multibody Systems in Space

Katsuhiko YAMADA and Kazuo TSUCHIYA

Equations of motion of a rigid multibody system whose base is free such as space structures are treated in this paper. First, we derive the equations of motion which denote the position of the center of mass of one body as generalized coordinates. These equations are easily applied to the base-fixed system as manipulators. Then, we derive the equations of motion which denote the position of the center of mass of the system as generalized coordinates. These equations are preferable for space structures because the orbital motion and the attitude motion are separated. The method of derivation is based on Kane's equations of motion. The method is suited not only for the tree configuration system, but also for the loop configuration system with cutting loops and using Lagrange's multipliers as constraint forces. The method has a high computation efficiency, and a computer simulation program is developed based on this method.

Key Words: Space Engineering, Formulation, Rigid Multibody System, Kane's Equations of Motion, Loop Configuration, Space Structure, Manipulator, Simulation

主 な 記 号

$\underline{k}$: ボディ k の内ボディ
 $\bar{k}$: ボディ k の内集合
 $\bar{k}$: ボディ k の外ボディ
 $\tilde{k}$: ボディ k の外集合
 N : システムのボディの数
 n : システムの自由度の数
 h_k : ボディ k 上でボディ $k, \underline{k}$ を結合するヒンジ
 C_k : ボディ k の質量中心
 T : 並進ヒンジの集合
 R : 回転ヒンジの集合
 r_k : h_k から C_k をさすベクトル
 d_k : h_k から C_k をさすベクトル
 e_i : 基準となる直交座標系 (慣性系) の各座標軸
 方向の単位ベクトル ($i=1, 2, 3$)
 z_k : ヒンジ h_k の運動方向の単位ベクトル
 q_k : ヒンジ h_k における変位置
 m_k : ボディ k の質量
 i_k : ボディ k の h_k まわりの慣性ダイアディック

$\bar{m}_k$: 外集合 $\tilde{k}$ の質量
 $\tilde{i}_k$: 外集合 $\tilde{k}$ の h_k まわりの慣性ダイアディック
 $\bar{r}_k$: h_k から外集合 $\tilde{k}$ の質量中心をさすベクトル
 p_k : ヒンジ h_k の位置ベクトル
 p_c : システム質量中心の位置ベクトル
 v_k : ヒンジ h_k の速度
 ω_k : ボディ k の角速度
 v_0 : メインボディの質量中心速度
 $= v_{01}e_1 + v_{02}e_2 + v_{03}e_3$
 ω_0 : メインボディの角速度
 $= \omega_{01}e_1 + \omega_{02}e_2 + \omega_{03}e_3$
 v_c : システムの質量中心速度
 $= v_{c1}e_1 + v_{c2}e_2 + v_{c3}e_3$
 u_i : 一般化速度 ($i=1, 2, \dots, n$)
 v_k^i : ヒンジ h_k における u_i の部分速度
 ω_k^i : ボディ k における u_i の部分角速度
 f_{gk} : ボディ k の質量中心に働く重力などの外力
 f_k : 並進ヒンジ部の制御力の大きさ (回転ヒンジ
 では $f_k=0$)
 f_k : ボディ k に働く作用力の和
 f_k^* : ボディ k の慣性力
 t_{gk} : ボディ k の質量中心まわりに働く外トルク
 t_k : 回転ヒンジ部の制御トルクの大きさ (並進ヒ

* 昭和62年3月13日 関西支部第62期定時総会講演会において講演, 原稿受付 昭和61年9月1日.

*¹ 正員, 三菱電機(株)中央研究所 (〒661 尼崎市塚口本町8-1-1).

*² 三菱電機(株)中央研究所.

ンジでは $t_k=0$)

t_k : ボディ k のヒジン h_k に働く作用トルク之和

t_k^* : ボディ k のヒジン h_k まわりの慣性トルク

1. ま え が き

多数の物体からなる複雑なシステムの運動方程式を導く試みは、人工衛星や宇宙ステーションなどの宇宙構造物⁽¹⁾や、マニピュレータなどの多節リンク機構において活発になされている。まず宇宙構造物においては Hooker ら⁽²⁾による先駆的な研究にはじまり、宇宙ステーションなどの大形人工衛星の具体化に対応して柔軟性^{(3)~(5)}やループ構造⁽³⁾⁽⁶⁾などの導入が行われている。これらの宇宙構造物に対する手法は主には応用性に重点をおいており、特に文献(3)では DISCOS という応用プログラムによって広範囲のシミュレーションが可能であるが、計算効率に関してはあまり考慮されておらず、プログラムの大きさからリアルタイムシミュレーションなどに適用することは困難である。またマニピュレータの研究では、主にベースが固定されたチェーン構造に関する効率的なモデリングアルゴリズムの検討がなされている^{(7)~(9)}。これらの研究ではベース固定やチェーン構造の性質を利用して運動方程式を導出しており、宇宙構造物に対する上記の研究とは逆に、その計算効率は高いが適用できる範囲は限られている。すなわち人工衛星のようにベースとなる物体が動く場合や、ループ機構を含む場合にこれらの手法を適用することはできない。本論文ではこれらの点をふまえて、ベースが固定された地上用のシステムにも、また宇宙構造物にも適用可能で、しかも計算効率の高いモデリングアルゴリズムを提案する。

一般に宇宙構造物では固定されたベースが存在しないために、メインボディを設定してそれを基準に式を展開する。このときシステムの並進運動に関して次の二つの定式化が考えられる。ひとつはメインボディの位置を一般化座標にとる場合で、メインボディを固定すれば地上用のシステムに適用することもできる。またひとつはシステム全体の質量中心の位置を一般化座標にとる場合で、軌道運動と姿勢運動が分離されるために、宇宙構造物では便利なが多い。

本論文では、まずループ構造を含まないトリー形状の宇宙構造物に対してメインボディの位置を一般化座標にとって運動方程式を導出する。さらに比較的簡単な変換によって運動方程式をシステムの質量中心位置を一般化座標にとる場合に書き換える。こうして得られた2種類の方程式により、地上用のシステムにも、また宇宙構造物の軌道・姿勢運動にも対応することが

できる。さらにシステムにループ構造が含まれている場合にも、ループを適当な箇所切断し、切断部における拘束力を方程式中にとりこむことによって上記のアルゴリズムをそのまま使用できることを示す。方程式の導出には Kane の方程式⁽⁵⁾⁽¹⁰⁾を用いており、方程式の各項をある程度陽に表現しているので計算効率は高い。最後にこのアルゴリズムによる剛体多体システムのシミュレーションプログラムの適用例を示す。

2. ボディ間の関係の記述

本論文で対象とするのは図1に示すような多数の剛体(ボディ)がヒンジで結合されているトリー形状のシステムである。システムがループ構造を含む場合は適当な箇所でこれを切断し、トリー形状にして取扱う。ヒンジ自由度は並進または回転の一自由度とし、多自由度のヒンジの場合には複数のボディを組合せてこれを表現する。まずシステムで基準となるボディを設けてこれをメインボディとし、その番号を零とする。これ以外のボディにも1から $N-1$ まで順に番号をつけ、またメインボディ側にしか隣接するボディをもたないような端のボディをターミナルボディと呼ぶ。さらに次のように記号を定義する。

$\underline{k}$: ボディ k の内ボディ=メインボディ側でボディ k に隣接するボディ

$\underline{k}$: ボディ k の内集合 =メインボディとボディ k を含むその間に存在するボディの集合

$\bar{k}$: ボディ k の外ボディ =ターミナルボディ側でボディ k に隣接するボディの集合

$\bar{k}$: ボディ k の外集合 =ボディ k を含むボディ k のターミナルボディ側に存在するボディの集合

表1に図1のシステムでの上の各記号の値を示す。

またボディ k とボディ $\bar{k}$ を結合するヒンジをヒン

表1 図1のシステムにおける各記号の値

BODY No. i	0	1	2	3	4
$\underline{i}$	-	0	0	0	2
$\bar{i}$	0	0 1	0 2	0 3	0 2 4
$\bar{i}$	1 2 3	-	4	-	-
$\bar{i}$	0 1 2 3 4	1	2 4	3	4

図1 対象とするシステム

ジ h_k とし, h_0 はメインボディの質量中心にとる.

3. 定 式 化

3.1 運動方程式の一般形 ここでは運動方程式の定式化に Kane の方程式を用いる. Kane の方程式はニュートン・オイラー方程式のような内力を消去する過程を必要とせず, またラグランジュ関数のような関数を構成する必要もないので, 運動方程式が複雑化する場合には特に適した手法である. まずひとつの剛体の運動方程式を Kane の方程式で定式化する場合を考えよう⁽¹⁰⁾. 独立な座標成分として一般化速度 u_i ($i=1, 2, \dots, n$) をとる. u_i は剛体上のある点の速度成分や剛体の角速度成分が選ばれ, この場合自由度 $n=6$ である. ここではこの剛体をボディ k とし, ボディ k のヒンジ h_k を基準に運動方程式をたてる. 剛体のヒンジに着目するのはループ構造を含むようなシステムに拡張するのが容易なためである.

まずボディ k の角速度 ω_k , ヒンジ h_k の速度 v_k を一般化速度 u_i によって次のように分解する.

$$v_k = \sum_{i=1}^n v_k^i u_i + v_{kt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\omega_k = \sum_{i=1}^n \omega_k^i u_i + \omega_{kt} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで v_k^i を u_i のヒンジ h_k における部分速度 (partial velocity), ω_k^i を u_i のボディ k における部分角速度 (partial angular velocity) と呼ぶ. v_{kt} , ω_{kt} は一般化速度 u_i によらない時間依存項であるが, 通常は 0 となる. またボディ k に働く作用力を f_k , 作用トルクをヒンジ h_k まわりに換算して t_k とし, ボディ k の慣性力を f_k^* , 慣性トルクをヒンジ h_k まわりに換算して t_k^* とする. このとき Kane の方程式によれば, 一般化速度 u_i に対応するボディ k の運動方程式は次式となる.

$$f_k^* \cdot v_k^i + t_k^* \cdot \omega_k^i + f_k \cdot v_k^i + t_k \cdot \omega_k^i = 0$$

$$(\cdot \text{ は内積, } i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(3)がひとつの剛体に対する Kane の運動方程式であるが, システムが N 個のボディから構成されている場合でも, 各ボディについての和をとることによって運動方程式を得ることができる. すなわち N 個のボディからなるシステムでは一般化速度 u_i に対する運動方程式は次式となる.

$$\sum_{k=0}^{N-1} (f_k^* \cdot v_k^i + t_k^* \cdot \omega_k^i + f_k \cdot v_k^i + t_k \cdot \omega_k^i) = 0$$

$$(i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (4)$$

各ボディが一自由度のヒンジによって結合されているとき, システムの自由度の数 n は, メインボディの自由度 6 にそれ以外のボディの数を加えたものであり,

$$n=5+N \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる. 式(4)から質量マトリックスを得るために, まず f_k^* , t_k^* を v_k , ω_k を用いて表すと,

$$f_k^* = -m_k \{ \dot{v}_k + \dot{\omega}_k \times r_k + \omega_k \times (\omega_k \times r_k) \} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$t_k^* = -\{ i_k \cdot \dot{\omega}_k + \omega_k \times (i_k \cdot \omega_k) + r_k \times m_k \dot{v}_k \} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで $\dot{v}_k$, $\dot{\omega}_k$ は式(1), (2)から次式となる.

$$\dot{v}_k = \sum_{i=1}^n v_k^i \dot{u}_i + a_k \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\dot{\omega}_k = \sum_{i=1}^n \omega_k^i \dot{u}_i + \alpha_k \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし a_k , α_k は次式で表される量である.

$$a_k = \sum_{i=1}^n \dot{v}_k^i u_i, \quad \alpha_k = \sum_{i=1}^n \dot{\omega}_k^i u_i \quad \dots\dots\dots (10)$$

なお式(8), (9)において時間依存項 v_{kt} , ω_{kt} はともに 0 とおいた. 式(6)~(9)を式(4)に代入して整理すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^n \{ \omega_k^i \cdot i_k \cdot \omega_k^j + m_k v_k^i \cdot v_k^j \\ & + m_k r_k \cdot (v_k^i \times \omega_k^j + v_k^j \times \omega_k^i) \} \dot{u}_j \\ & - \sum_{k=0}^{N-1} (f_k^* \cdot v_k^i + t_k^* \cdot \omega_k^i + f_k \cdot v_k^i + t_k \cdot \omega_k^i) = 0 \\ & (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし,

$$f_k^* = -m_k \{ a_k + \alpha_k \times r_k + \omega_k \times (\omega_k \times r_k) \} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$t_k^* = -\{ i_k \cdot \alpha_k + \omega_k \times (i_k \cdot \omega_k) + r_k \times m_k a_k \} \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(11)が運動方程式の一般形であり, システムの質量マトリックス M と, 一般化速度 u_i からなるベクトル $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ (記号 T は転置) を用いれば, 式(11)をまとめて次の形で表すことができる.

$$M\dot{u} + g = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

上式で g は作用力と遠心力, コリオリの力からなるベクトルである. 式(11)よりマトリックス M の i 行 j 列成分 M_{ij} とベクトル g の第 i 成分 g_i は次式となる.

$$\begin{aligned} M_{ij} = & \sum_{k=0}^{N-1} \{ \omega_k^i \cdot i_k \cdot \omega_k^j + m_k v_k^i \cdot v_k^j \\ & + m_k r_k \cdot (v_k^i \times \omega_k^j + v_k^j \times \omega_k^i) \} \\ & (i, j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_i = & - \sum_{k=0}^{N-1} (f_k^* \cdot v_k^i + t_k^* \cdot \omega_k^i + f_k \cdot v_k^i + t_k \cdot \omega_k^i) \\ & (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

3.2 節以降では, メインボディの質量中心速度あるいはシステムの質量中心速度を一般化速度にとる場合について, M_{ij} と g_i をさらに簡略化する.

3.2 メインボディの質量中心速度を一般化速度にとる場合

3.2.1 一般化速度と部分速度, 部分角速度 ここではシステムの一般化速度として, メインボディの質量中心速度の3成分 (v_{01}, v_{02}, v_{03}), メインボディの角速度の3成分 ($\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$) および各ヒンジにおける並進または回転速度の ($N-1$) 個の成分 ($\dot{q}_j$) をとる場合について考察する. もしも地上用のシステムのようにベースが固定されている場合は, ベースをメインボディとみなしてメインボディの自由度を無視すれば, システムの運動方程式をベース固定の場合に変換することができる.

さて式(1), (2)から, この場合のある一般化速度 u_i に対する部分速度 v_k^i と部分角速度 ω_k^i は次のようになる. ただし簡単のために u_i がヒンジ速度に対応するとき, u_i はヒンジ $h_i (l=i-6)$ の速度 $\dot{q}_l$ にとるものとする.

$$(i) \quad u_i = v_{0j} (j=1, 2, 3) \text{ のとき} \\ v_k^i = e_j, \omega_k^i = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$(ii) \quad u_i = \omega_{0j} (j=1, 2, 3) \text{ のとき} \\ v_k^i = e_j \times (p_k - p_0), \omega_k^i = e_j \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$(iii) \quad u_i = \dot{q}_l (h_i \in T, l=i-6) \text{ のとき} \\ \begin{cases} k \in \bar{l}: v_k^i = z_l, \omega_k^i = 0 \\ k \notin \bar{l}: v_k^i = 0, \omega_k^i = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$(iv) \quad u_i = \dot{q}_l (h_i \in R, l=i-6) \text{ のとき} \\ \begin{cases} k \in \bar{l}: v_k^i = z_l \times (p_k - p_l), \omega_k^i = z_l \\ k \notin \bar{l}: v_k^i = 0, \omega_k^i = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

3.2.2 運動方程式の各項の形 いま u_i を成分とする一般化速度ベクトル u を次式で定義する.

$$u = (v_{01} \ v_{02} \ v_{03} \ \omega_{01} \ \omega_{02} \ \omega_{03} \ \dots \ \dot{q}_1 \dots)^T \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで i とあるのは u の i 番目の成分を意味し, $i > 6$ であれば $\dot{q}_l (l=i-6)$ とする. このとき質量マトリックス M とベクトル g も u に対応して次のように分割することができる.

$$M = \begin{matrix} & \overset{3}{\left[\begin{array}{cc} A & B^T \\ B & C \end{array} \right]} & \overset{3}{\left[\begin{array}{c} D^T \\ E \end{array} \right]} & \overset{N-1}{\left[\begin{array}{c} F \end{array} \right]} \\ \overset{3}{\left[\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right]} & \end{matrix}, g = \begin{matrix} \overset{3}{\left[\begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right]} \\ \overset{N-1}{\left[\begin{array}{c} Z \end{array} \right]} \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (22)$$

M が上のように対称となることは式(15)よりわかる.

式(17)~(20)を式(15), (16)に代入すれば式(22)の各成分が得られるが, ここではまずヒンジ速度に対応する F, Z の部分について求めよう. 式(19), (20)を式(15)に代入すれば F の i 行 j 列成分 F_{ij} は, ヒンジ

h_i, h_j が並進, 回転それぞれの場合にしたがって次のようになる.

$j \in \bar{i}$ のとき

$$F_{ij} = \begin{cases} \hat{m}_i z_i \cdot z_j : h_i, h_j \in T \\ \hat{m}_i z_j \cdot \{(\hat{r}_i + p_i - p_j) \times z_i\} : h_i \in T, h_j \in R \\ \hat{m}_i z_j \cdot (z_i \times \hat{r}_i) : h_i \in R, h_j \in T \\ z_i \cdot [\hat{i}_i + \hat{m}_i \{(p_i - p_j) \cdot \hat{r}_i U \\ - (p_i - p_j) \hat{r}_i\}] \cdot z_j : h_i, h_j \in R \end{cases}$$

$j \in \bar{i}$ のとき $F_{ij} = F_{ji}$

上記以外のとき $F_{ij} = 0$

$$(i, j=1, 2, \dots, N-1) \quad \dots\dots\dots (23)$$

ただし式(23)において

$$\hat{m}_i = \sum_{k \in \bar{i}} m_k \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\hat{r}_i = \frac{1}{\hat{m}_i} \sum_{k \in \bar{i}} m_k (p_k - p_i + r_k) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\hat{i}_i = \sum_{k \in \bar{i}} [i_k + m_k \{(p_k - p_i + 2r_k) \cdot (p_k - p_i) U \\ - (p_k - p_i)(p_k - p_i) - r_k(p_k - p_i) - (p_k - p_i)r_k\}] \quad \dots\dots\dots (26)$$

であり, $\hat{m}_i, \hat{r}_i, \hat{i}_i$ はそれぞれ外集合 $\bar{i}$ の質量, ヒンジ h_i から外集合 $\bar{i}$ の質量中心をさすベクトル, 外集合 $\bar{i}$ のヒンジ h_i まわりの慣性ダイアディックを意味している. また U は単位ダイアディックである.

一方 Z の第 i 成分 Z_i の値は式(16)から得られるが式(16)の作用力 f_k , 作用トルク t_k を, ボディ k の質量中心 C_k に働く外力 f_{0k} , 外トルク t_{0k} と, ヒンジ h_k に働く制御力 $f_k z_k$, 制御トルク $t_k z_k$ に分離すれば次のようになる.

$$Z_i = \begin{cases} -(\hat{f}_{0i}^* \cdot z_i + \hat{f}_{gi}^* \cdot z_i + f_i) : h_i \in T \\ -(\hat{t}_{0i}^* \cdot z_i + \hat{t}_{gi}^* \cdot z_i + t_i) : h_i \in R \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここでヒンジに働く力, トルクは内力, 内トルクであることから f_i, t_i だけが残る. また,

$$\hat{f}_{0i}^* = \sum_{k \in \bar{i}} f_{0k}^* \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\hat{t}_{0i}^* = \sum_{k \in \bar{i}} \{t_{0k}^* + (p_k - p_i) \times f_{0k}^*\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\hat{f}_{gi}^* = \sum_{k \in \bar{i}} f_{gk} \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\hat{t}_{gi}^* = \sum_{k \in \bar{i}} \{t_{gk} + (p_k - p_i + r_k) \times f_{gk}\} \quad \dots\dots\dots (31)$$

もしも地上用のシステムのようにベースが固定されていれば、システムの運動方程式は

$$F\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (32)$$

となり、式(23)、(27)から求めることができる。

さて、式(22)のうち F, Z 以外の部分についても各ヒンジをメインボディの質量中心に置き換えれば同様に求めることができる。その結果を以下に記す。

$$A_{ij} = \tilde{m}_0 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (33)$$

$$B_{ij} = \tilde{m}_0 \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{e}_i \times \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (34)$$

$$C_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \hat{\mathbf{i}}_0 \cdot \mathbf{e}_j \quad (35)$$

$$D_{ij} = \begin{cases} \tilde{m}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{z}_i & : h_i \in T \\ \tilde{m}_i \mathbf{e}_j \cdot (\mathbf{z}_i \times \hat{\mathbf{r}}_i) & : h_i \in R \end{cases} \quad (36)$$

$$E_{ij} = \begin{cases} \tilde{m}_i \mathbf{e}_j \cdot \{(\hat{\mathbf{r}}_i + \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) \times \mathbf{z}_i\} & : h_i \in T \\ \mathbf{z}_i \cdot [\hat{\mathbf{i}}_i + \tilde{m}_i \{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) \cdot \hat{\mathbf{r}}_i U \\ - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0) \hat{\mathbf{r}}_i\}] \cdot \mathbf{e}_j & : h_i \in R \end{cases} \quad (37)$$

$$X_i = -(\hat{\mathbf{f}}_{00}^* + \hat{\mathbf{f}}_{g0}) \cdot \mathbf{e}_i \quad (38)$$

$$Y_i = -(\hat{\mathbf{t}}_{00}^* + \hat{\mathbf{t}}_{g0}) \cdot \mathbf{e}_i \quad (39)$$

ただし上式における添字の範囲は、 A, B, C, X, Y では $i, j = 1, 2, 3$ であり、 D, E では $i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, 3$ である。

3.3 システムの質量中心速度を一般化速度にとる場合

3.3.1 一般化速度と部分速度、部分角速度 人工衛星などではその姿勢運動だけが問題になることが多い。ところが3.2節で導いた運動方程式ではメインボディの並進運動と回転運動が干渉しているので、姿勢運動だけを対象にする場合には不便である。そこで本節ではシステム全体の質量中心の速度を一般化速度にとって並進運動と回転運動を分離することを考える。

システム全体の質量中心の位置ベクトル $\mathbf{p}_c$ は

$$\mathbf{p}_c = \frac{1}{\tilde{m}_0} \sum_{k=0}^{N-1} m_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{r}_k) \quad (40)$$

となるから上式を慣性系において微分すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{p}}_c &= \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \hat{\mathbf{r}}_0 + \sum_{h_i \in T} \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{m}_0} \mathbf{z}_i \dot{q}_i \\ &+ \sum_{h_i \in R} \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{m}_0} (\mathbf{z}_i \times \hat{\mathbf{r}}_i) \dot{q}_i \end{aligned} \quad (41)$$

3.2節では $\mathbf{v}_0$ の各成分を一般化速度にとったが、ここではそれを $\mathbf{v}_c$ の各成分とする。このとき一般化速度 u_i に対する部分速度 $\mathbf{v}_k^i$ と部分角速度 $\boldsymbol{\omega}_k^i$ は3.2節の結果から次のようになる。ただし3.2節同様 u_i がヒンジ速度のときは $u_i = \dot{q}_i (l=i-6)$ とする。

(i) $u_i = v_{c_j} (j=1, 2, 3)$ のとき

$$\mathbf{v}_k^i = \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\omega}_k^i = \mathbf{0} \quad (42)$$

(ii) $u_i = \omega_{0j} (j=1, 2, 3)$ のとき

$$\mathbf{v}_k^i = \mathbf{e}_j \times (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0 - \hat{\mathbf{r}}_0), \boldsymbol{\omega}_k^i = \mathbf{e}_j \quad (43)$$

(iii) $u_i = \dot{q}_l (h_l \in T, l=i-6)$ のとき

$$\begin{cases} k \in \tilde{l} : \mathbf{v}_k^i = (1 - \frac{\tilde{m}_l}{\tilde{m}_0}) \mathbf{z}_l, \boldsymbol{\omega}_k^i = \mathbf{0} \\ k \notin \tilde{l} : \mathbf{v}_k^i = -\frac{\tilde{m}_l}{\tilde{m}_0} \mathbf{z}_l, \boldsymbol{\omega}_k^i = \mathbf{0} \end{cases} \quad (44)$$

(iv) $u_i = \dot{q}_l (h_l \in R, l=i-6)$ のとき

$$\begin{cases} k \in \tilde{l} : \mathbf{v}_k^i = \mathbf{z}_l \times (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_l - \frac{\tilde{m}_l}{\tilde{m}_0} \hat{\mathbf{r}}_l), \boldsymbol{\omega}_k^i = \mathbf{z}_l \\ k \notin \tilde{l} : \mathbf{v}_k^i = -\frac{\tilde{m}_l}{\tilde{m}_0} \mathbf{z}_l \times \hat{\mathbf{r}}_l, \boldsymbol{\omega}_k^i = \mathbf{0} \end{cases} \quad (45)$$

3.3.2 運動方程式の各項の形 一般化速度ベクトル $\mathbf{u}$ を式(21)に対応して次のようにおく。

$$\mathbf{u} = (v_{c1} \ v_{c2} \ v_{c3} \ \omega_{01} \ \omega_{02} \ \omega_{03} \ \dots \ \dot{q}_1 \ \dots)^T \quad (46)$$

式(21)同様 $i > 6$ であれば $\mathbf{u}$ の第 i 成分は $\dot{q}_l (l=i-6)$ とする。このとき質量マトリックス M とベクトル $\mathbf{g}$ は式(22)の形で分解することができる。式(22)の各成分の値は式(42)~(45)を式(15)、(16)に代入すれば求めることができ、結果を整理すると次のようになる。

$$A_{ij} = \tilde{m}_0 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (47)$$

$$B_{ij} = 0 \quad (48)$$

$$C_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \{\hat{\mathbf{i}}_0 - \tilde{m}_0 (\hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}}_0 U - \hat{\mathbf{r}}_0 \hat{\mathbf{r}}_0)\} \cdot \mathbf{e}_j \quad (49)$$

$$D_{ij} = 0 \quad (50)$$

$$E_{ij} = E_{ij}^* + \tilde{m}_0 \mathbf{v}_0^{i+6} \cdot (\mathbf{e}_j \times \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (51)$$

$$F_{ij} = F_{ij}^* - \tilde{m}_0 \mathbf{v}_0^{i+6} \cdot \mathbf{v}_0^{j+6} \quad (52)$$

$$X_i = -\hat{\mathbf{f}}_{g0} \cdot \mathbf{e}_i \quad (53)$$

$$Y_i = -(\hat{\mathbf{t}}_{00}^* + \hat{\mathbf{t}}_{g0} - \hat{\mathbf{r}}_0 \times \hat{\mathbf{f}}_{g0}) \cdot \mathbf{e}_i \quad (54)$$

$$Z_i = \begin{cases} -(\hat{\mathbf{f}}_{0i}^* + \hat{\mathbf{f}}_{gi} - \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{m}_0} \hat{\mathbf{f}}_{g0}) \cdot \mathbf{z}_i - f_i & : h_i \in T \\ -(\hat{\mathbf{t}}_{0i}^* + \hat{\mathbf{t}}_{gi} - \frac{\tilde{m}_i}{\tilde{m}_0} \hat{\mathbf{r}}_i \times \hat{\mathbf{f}}_{g0}) \cdot \mathbf{z}_i - t_i & : h_i \in R \end{cases} \quad (55)$$

上式における添字の範囲は、 A, B, C, X, Y では $i, j = 1, 2, 3, D, E$ では $i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, 3, F, Z$ では $i, j = 1, 2, \dots, N-1$ である。また上式において $\mathbf{v}_0^{i+6}$ は一般化速度 $u_{i+6} (= \dot{q}_i)$ のメインボディ質量中心における部分速度であり、

$$\mathbf{v}_0^{i+6} = \begin{cases} -\frac{\tilde{m}_i}{\tilde{m}_0} \mathbf{z}_i & : h_i \in T \\ -\frac{\tilde{m}_i}{\tilde{m}_0} \mathbf{z}_i \times \hat{\mathbf{r}}_i & : h_i \in R \end{cases} \quad (56)$$

となる。また E_{ij}^*, F_{ij}^* はそれぞれ3.2節の式(37)、

(23)における値であり、3・2節の質量マトリックスにわずかな変更を加えることでこの場合の質量マトリックスを得ることができる。なお、式(38)と式(53)を比べれば式(53)には慣性力項 $\hat{f}_{00}^*$ が含まれていない。実際、 $\hat{f}_{00}^*$ を式(10)、(12)から書き換えると、

$$\hat{f}_{00}^* = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{N-1} m_k \{ \dot{v}_k^j + \dot{\omega}_k^j \times r_k + \omega_k^j \times (\omega_k^j \times r_k) \} u_j \quad \dots\dots\dots (57)$$

となって、上式に式(42)～(45)を代入して計算すれば $\hat{f}_{00}^*$ が 0 となることがわかる。

さてこの場合は B, D とも零であり、 X にも慣性力項が含まれていないので、システム質量中心の並進運動とその他の運動は完全に分離されている。さらにボディ k に働く外力として重力だけを考え、重力 f_{gk} が重力の加速度ベクトル g_r によって

$$f_{gk} = m_k g_r \quad \dots\dots\dots (58)$$

と近似できる場合には、式(54)、(55)に重力の影響はあられず方程式はさらに簡単化する。

4. ループ構造のある場合

本章ではシステムにループ構造の含まれる場合について考察する。システムにループ構造が含まれてもヒンジ部でループを切断して考えれば3章までの議論をそのまま適用することができる。ただしループ切断時には切断箇所における未知の拘束力を作用力と同等に扱う必要があるため、これらの拘束力が未定乗数の形で運動方程式中にとりこまれることになる。また切断部における既知の制御力も外力と等価にみなされる。

いま図2のようにシステムがループを含む構造で、ボディ k 上のヒンジ点 a とボディ l 上のヒンジ点 b が本来同一点であり、この間を切断したとしよう。点 a において拘束されている方向のベクトルを並進方向で x_{kp} 、回転方向で y_{kp} とし、これらはいずれもボディ k に固定されているものとする。また点 a で働く拘束力、拘束トルクの大きさを x_{kp}, y_{kp} に対応させて f_{cp}, t_{cp} とする。 p は拘束されている方向の数だけ存在するが、これを並進方向で t 、回転方向で r とする (0

図2 ループの切断

$\leq t, r \leq 3$)。簡単のために切断箇所を1箇所だけとすると、この場合の一般化速度 u_i に対応する運動方程式は次式で表される。

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{u}_j + g_i - \sum_{p=1}^t (f_{cp} x_{kp} \cdot v_a^i - f_{cp} x_{kp} \cdot v_b^i) - \sum_{p=1}^r (t_{cp} y_{kp} \cdot \omega_k^i - t_{cp} y_{kp} \cdot \omega_l^i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (59)$$

式(59)で M_{ij}, g_i は未知の拘束力を無視して運動方程式を導出した場合の質量マトリックス M とベクトル g の成分で、式(15)、(16)で与えられる。また v_a^i, v_b^i は u_i の点 a, b における部分速度であり、システムをトリー構造とみなすので両者は異なった値をとる。

一方、点 a の速度 v_a と点 b の速度 v_b の、拘束されている方向の成分は等しいので次式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n v_a^i u_i \cdot x_{kp} = \sum_{i=1}^n v_b^i u_i \cdot x_{kp} \quad (p=1, \dots, t) \quad \dots\dots\dots (60)$$

同様に角速度 ω_k と ω_l の拘束されている方向の成分が等しいことから次式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^n \omega_k^i u_i \cdot y_{kp} = \sum_{i=1}^n \omega_l^i u_i \cdot y_{kp} \quad (p=1, \dots, r) \quad \dots\dots\dots (61)$$

式(59)は行列形式で次のように表せる。

$$M \dot{u} + g + H f_c = 0 \quad \dots\dots\dots (62)$$

ただし

$$H = - \begin{bmatrix} \dots x_{kp} \cdot (v_a^1 - v_b^1) \cdot \dots y_{kp} \cdot (\omega_k^1 - \omega_l^1) \cdot \dots \\ \vdots \\ \dots x_{kp} \cdot (v_a^n - v_b^n) \cdot \dots y_{kp} \cdot (\omega_k^n - \omega_l^n) \cdot \dots \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (63)$$

$$f_c = [\dots f_{cp} \dots t_{cp} \dots]^T \quad \dots\dots\dots (64)$$

であり、 H は $n \times (t+r)$ 行列、 f_c は $(t+r)$ 次のベクトルである。

同様に式(60)、(61)は行列形式で次式となる。

$$H^T u = 0 \quad \dots\dots\dots (65)$$

式(62)、(65)は拘束力 f_c をラグランジュの未定乗数とする拘束付きの運動方程式である。式(65)の時間微分と式(62)から拘束力を求めると次式となる。

$$f_c = (H^T M^{-1} H)^{-1} (\dot{H}^T u - H^T M^{-1} g) \quad \dots\dots\dots (66)$$

これを式(62)に代入すれば $\dot{u}$ が得られる。式(66)では $\dot{H}^T u$ が必要となるが、これは式(60)、(61)から

$$\dot{H}^T u = [\dots \{a_a - a_b + (v_a - v_b) \times \omega_k\} \cdot x_{kp} \cdot \dots \{(\alpha_k - \alpha_l - \omega_l \times \omega_k) \cdot y_{kp}\} \cdot \dots]^T \quad \dots\dots\dots (67)$$

となる。上式で a_a, α_k などは式(10)で定義される量である。以上のようにシステムがループ構造を含んでも、ループを切断し式(62)や式(65)を用いることによって、トリー形状のシステムのアルゴリズムをそのまま

用いることができる。このことは3・2, 3・3節の双方の定式化に対して成り立つ。

5. 運動方程式の計算

5.1 隣接するボディ間の関係

5.1.1 内ボディとの関係 4章までの運動方程式において、方程式の各項を数値的に求めるためには方程式中に含まれる $v_i, a_i, \omega_i, \alpha_i, \hat{m}_i, \hat{r}_i, \hat{i}_i, \hat{f}_{0i}^*, \hat{t}_{0i}^*, \hat{f}_{gi}, \hat{t}_{gi}$ などの量を計算する必要がある。この計算を効率的に行うためには、文献(8)のように、あるボディのこれらの量を隣接するボディから求め、この過程を漸化的に繰返す方法が有効である。このとき、これらの量の定義から明らかなように $v_i, a_i, \omega_i, \alpha_i$ は内ボディの側から、またそれ以外の量は外ボディの側から求めてゆくことができる。

まず内ボディとの関係では、ボディ i のヒンジ h_i が並進の場合と回転の場合で次のようになる。

(i) $h_i \in T$ のとき

$$v_i = v_i + \omega_i \times d_i + \dot{q}_i z_i \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$a_i = a_i + \alpha_i \times d_i + 2\dot{q}_i \omega_i \times z_i + \omega_i \times (\omega_i \times d_i) \quad \dots\dots\dots (69)$$

$$\omega_i = \omega_i \quad \dots\dots\dots (70)$$

$$\alpha_i = \alpha_i \quad \dots\dots\dots (71)$$

(ii) $h_i \in R$ のとき

$$v_i = v_i + \omega_i \times d_i \quad \dots\dots\dots (72)$$

$$a_i = a_i + \alpha_i \times d_i + \omega_i \times (\omega_i \times d_i) \quad \dots\dots\dots (73)$$

$$\omega_i = \omega_i + \dot{q}_i z_i \quad \dots\dots\dots (74)$$

$$\alpha_i = \alpha_i + \dot{q}_i \omega_i \times z_i \quad \dots\dots\dots (75)$$

上式はメインボディから各ボディの諸量を漸化的に求める関係になっているので、メインボディに関する $v_0, a_0, \omega_0, \alpha_0$ の量は初期値として与える必要がある。 ω_0, α_0 については、 ω_0 の各成分を一般化速度 $u_4 \sim u_6$ にとっているために次式となる。

$$\omega_0 = (u_4 \ u_5 \ u_6)^T, \alpha_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (76)$$

一方 v_0, a_0 については、一般化速度 $u_1 \sim u_3$ としてメインボディの質量中心速度 v_0 をとる場合とシステムの質量中心速度 v_c をとる場合で異なる。前者では

$$v_0 = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T, \alpha_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (77)$$

ととればよく、後者では式(41)から次のようになる。

$$v_0 = v_c - \omega_0 \times \hat{r}_0 - \sum_{h_i \in T} \frac{\hat{m}_i}{\hat{m}_0} z_i \dot{q}_i - \sum_{h_i \in R} \frac{\hat{m}_i}{\hat{m}_0} (z_i \times \hat{r}_i) \dot{q}_i \quad \dots\dots\dots (78)$$

$$\alpha_0 = -\omega_0 \times \dot{\hat{r}}_0 - \sum_{h_i \in T} \frac{\hat{m}_i}{\hat{m}_0} (\omega_i \times z_i) \dot{q}_i$$

$$- \sum_{h_i \in R} \frac{\hat{m}_i}{\hat{m}_0} \{(\omega_i \times z_i) \times \hat{r}_i + z_i \times \dot{\hat{r}}_i\} \dot{q}_i \quad \dots\dots\dots (79)$$

5.1.2 外ボディとの関係 $\hat{m}_i, \hat{r}_i$ などの諸量はその定義式、式(24)～(26)および式(28)～(31)から明らかなように外ボディから求めてゆくことができる。その関係式は次のとおりである。

$$\hat{m}_i = m_i + \sum_{k \in \bar{i}} \hat{m}_k \quad \dots\dots\dots (80)$$

$$\hat{r}_i = \frac{1}{\hat{m}_i} \{m_i r_i + \sum_{k \in \bar{i}} \hat{m}_k (d_k + \hat{r}_k)\} \quad \dots\dots\dots (81)$$

$$\hat{i}_i = i_i + \sum_{k \in \bar{i}} [\hat{i}_k + \hat{m}_k \{(d_k + 2\hat{r}_k) \cdot d_k U - d_k d_k - \hat{r}_k d_k - d_k \hat{r}_k\}] \quad \dots\dots\dots (82)$$

$$\hat{f}_{0i}^* = f_{0i}^* + \sum_{k \in \bar{i}} \hat{f}_{0k}^* \quad \dots\dots\dots (83)$$

$$\hat{t}_{0i}^* = t_{0i}^* + \sum_{k \in \bar{i}} (\hat{t}_{0k}^* + d_k \times \hat{f}_{0k}^*) \quad \dots\dots\dots (84)$$

$$\hat{f}_{gi} = f_{gi} + \sum_{k \in \bar{i}} \hat{f}_{gk} \quad \dots\dots\dots (85)$$

$$\hat{t}_{gi} = t_{gi} + r_i \times f_{gi} + \sum_{k \in \bar{i}} (\hat{t}_{gk} + d_k \times \hat{f}_{gk}) \quad \dots\dots\dots (86)$$

もしもボディ i がターミナルボディであれば $\hat{m}_i, \hat{r}_i, \hat{i}_i, \hat{f}_{0i}^*, \hat{t}_{0i}^*, \hat{f}_{gi}, \hat{t}_{gi}$ としてそれぞれ $m_i, r_i, i_i, f_{0i}^*, t_{0i}^*, f_{gi}, t_{gi} + r_i \times f_{gi}$ を用いる。

5.2 計算の手順 以上により剛体多体システムの運動方程式が得られる。運動方程式を解くまでの手順は以下に示すとおりである。

(i) 式(68)～(75)を用いてボディ i に関する $v_i, a_i, \omega_i, \alpha_i$ などをメインボディから順に求める。ただしシステムの質量中心速度を一般化速度にとる場合は、 v_0, a_0 を仮に0とおく。

(ii) 式(80)～(82)を用いてボディ i に関する $\hat{m}_i, \hat{r}_i, \hat{i}_i$ などをターミナルボディから順に求める。

(iii) システムの質量中心速度を一般化速度にとる

図3 マニピュレータをもつ人工衛星

図4 シミュレーション結果

場合は式(78), (79)により(i)の v_i, a_i を補正する。

(iv) 式(83)~(86)を用いてボディ i に関する $\hat{f}_{0i}, \hat{f}_{gi}, \hat{t}_{gi}$ などをターミナルボディから順に求める。

(v) メインボディの質量中心速度を一般化速度にとる場合は式(23), (27), (33)~(39)を, システムの質量中心速度を一般化速度にとる場合は式(47)~(55)を用いて, 運動方程式の各項を求める。

(vi) システムにループ構造のある場合は式(66)を用いてループ切断部の拘束力を求める。

(vii) 一般化速度ベクトルの微分 $\dot{u}$ を求める。

5.3 計算例 以上のアルゴリズムによりループ構造を含む剛体多体システムのシミュレーションプログラムを作成した。ここでは図3に示すような四自由度のマニピュレータをもつ人工衛星にこのプログラムを適用した例を示す。図3の状態ヒンジ角 $q_1 \sim q_4$ は零であるとし, $q_1 = \pi/2, q_2 = q_4 = -\pi/2, q_3 = \pi$ [rad]の初期状態から各ヒンジトルク t_i を下式で与えてシミュレーションを行う。

$$t_i = -k_i q_i - d_i \dot{q}_i (i=1 \sim 4) \dots\dots\dots (87)$$

ここで k_i, d_i は定数であり, 表2に示すパラメータ値で計算した例を図4に示す。図4はメインボディの質量中心とシステムの質量中心の x 方向の移動であり外力が働かないのでシステムの質量中心は動かない。この結果は3.2, 3.3節のいずれの定式化の場合でも当然等しくなる。

表2 主なシミュレーションパラメータの値

BODY No. i	0	1	2	3	4
Mass [kg]	200	10	50	40	30
Length [m]	-	0.1	1	1	0.3
k_i [Nm/rad]	-	10	10	10	1
d_i [Nm/rad/s]	-	5	2	2	5

6. ま と め

本論文では剛体多体システムの運動方程式をKaneの方程式から導き, メインボディの質量中心速度あるいはシステムの質量中心速度を一般化速度とする2とおりの場合に方程式を具体的に示した。このアルゴリズムは宇宙構造物の軌道・姿勢運動にも, ベース固定の地上用のシステムにも適用でき, またシステムにループ構造のある場合にもループを切断して対応することができる。得られた方程式は各項をある程度陽に表現しており, また各項の計算に隣接するボディ間の関係を利用しているので効率がよい。したがってリアルタイムシミュレーションのような高速シミュレーションに適した手法と考えられる。最後に種々討論をしていただいた航空宇宙技術研究所の狼室長をはじめとする宇宙グループの方々に感謝する。

文 献

- (1) 狼・ほか5名, 航空宇宙技術研究所特別資料, NAL SP-4 (昭60)。
- (2) Hooker, W. W. and Margulies, G., *J. Astronaut. Sci.*, 12-4 (1965), 123.
- (3) Bodley, C. S., ほか3名, *NASA Tech. Paper*, 1219 (1978)。
- (4) Ho, J. Y. L. and Herber, D. R., *J. Guid. Control Dyn.*, 8-3 (1985), 374.
- (5) Singh, R. P., ほか2名, *J. Guid. Control Dyn.*, 8-5 (1985), 584.
- (6) 狼・ほか4名, 第29回宇宙科学技術連合講演会前刷集, (昭60), 456.
- (7) Vukobratovic, M. and Potkonjak, V., *Mech. Mach. Theory*, 14 (1979), 179.
- (8) Walker, M. W. and Orin, D. E., *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 104-3 (1982), 205.
- (9) Wang, L. T. and Ravani, B., *IEEE J. Robot. Autom.*, 1-3 (1985), 124.
- (10) Kane, T. R., Likins, P. W., and Levinson, D. A., *Spacecraft Dynamics*, (1983), 247. McGraw-Hill.

討 論

〔質問〕 宮崎文夫〔大阪大学基礎工学部〕

ケインの方程式を用い、剛体多体システムのダイナミクスのモデリングアルゴリズムを一般的な形で導かれている点、実用的にも価値ある研究と思われる。ところで、まえがきに「マニプレータの研究で提案されてきたシミュレーションの方法は、ベースが動く場合やループ機構を含む場合には適用できない」とあるが、これは言い過ぎではないか。現に、ループ機構を含む場合については、貴論文と同様の手法を含めていくつかの方法がすでに提案されている。また、ベースが動く場合のシミュレーションも、仮想リンクを付加するなどしてベース固定のアルゴリズムで十分実行できるように思われる。

また、ケインの方程式による定式化が計算効率の点ですぐれていると言われているが、演算量の具体的評価はできないか。

〔回答〕 まずマニプレータの定式化手法をベースが動く場合やループ機構を含む場合に適用することについて述べる。最初にベースが自由に動く場合、仮想リンクを付加してベースの運動を表現すると、結果的にオイラー角でベースの姿勢運動を表すことになると思われる。ところがオイラー角には特異点が存在するためにこのような表現法はシミュレーションに適したものではない。著者らは剛体の姿勢運動をヒンジ角によって表現することには無理があると考えており、この点ケインの方程式では剛体の角速度とヒンジ角速度を一般化速度として同列に扱うので便利であると考えている。さらにシステムの軌道運動と姿勢運動を分離

して扱うような場合には、単なるマニプレータの定式化の拡張では取扱うことができない。一方ループ機構の場合、機構的にループを含ませるためには、マニプレータをチェーン構造ではなく、最低限枝分れのあるトリー構造として扱う必要がある。その意味でチェーン構造としてマニプレータを扱うアルゴリズムではループ機構を含ませることはできない。しかしチェーン構造のマニプレータでもハンドが壁面などに接触する場合にはループを構成し、この場合の取扱いは確かに可能である。この点誤解を生じやすい記述であったことをおわびしたい。

また演算数については、一概には述べられないが、ここでは最も簡単なチェーン構造のマニプレータの運動方程式を導く際の乗除算の演算数を示して参考に供したいと思う。まず n 回転自由度のマニプレータでベース固定の場合、プログラム上の乗除算数は、

$$13.5n^2 + 230.5n - 51 (n=6 \text{ で } 1818) \dots\dots\dots (i)$$

となる。これは文献(8)に示されている乗除算数より2割ほど多い(方程式導出のみの比較)。この差は主にプログラムをはん用化させたことによるものと思われる。またベースが自由に動く場合の乗除算数は、さらに

$$32n + 160 (n=6 \text{ で } 352) \dots\dots\dots (ii)$$

だけ多くなる。これは仮想リンクでベースの運動を表現する場合よりはるかに少ない。また、これらの演算数は、文献(3)、(6)などに示される、よりはん用的なアルゴリズムと比較してかなり少なくなっている(演算時間などによる推定)。