低重力空間における球形容器内のスロッシング*

(第1報, 静的平衡時における液面形状)

内 海 雅 彦^{*1}, 近 藤 尚 夫^{*1}

Liquid Sloshing in a Spherical Container at Low-Gravity Environments (1st Report, Static Configuration of Liquid Surface)

Masahiko UTSUMI and Hisao KONDO

As a preliminary step of the analysis of the liquid sloshing in a spherical container at low-gravity environments, the static configuration of a liquid surface is determined by the equilibrium condition under surface tension and gravitational force. The differential equation governing the liquid surface equilibrium is derived by utilizing the principle of virtual work instead of direct use of Young-Laplace equation. Numerical procedure for solving the differential equation is presented and the influence of the Bond number on the numerical results is investigated.

Key Words: Vibration of Continuous System, Fluid Vibration, Liquid Sloshing, Low-Gravity, Surface Tension, Bond Number, Meniscus, Principle of Virtual Work

1. 緒 言

液体推進ロケットの運動制御, 安定性確保のために, 推進タンク内の液体自由表面の振動特性を把握することは重要な問題のひとつである⁽¹⁾. 液体の自由表面波には, 重力と表面張力とが関与する⁽²⁾. 地表では重力のみが支配的であるが, 宇宙空間では重力が低下するので, 地表では無視し得た表面張力効果が相対的に重要となり, 重力と表面張力の双方を考慮した液面揺動の解析が必要となる^{(1)(3)~(10)}. 表面張力を考慮すると, 液面の初期静止位置(外乱がない場合の静的平衡位置)は水平面から大きく離脱した曲面形状となる^{(1)(3)~(6)}. 以下この曲面をメニスカスと称する. 従来, 表面張力を考慮した液面揺動に関する研究として, 剛体軸対称容器内の液面揺動の固有振動数および調和加振応答の理論的^{(3)~(5)}および実験的研究⁽⁵⁾⁽⁶⁾, 液体-容器流体力学系の固有値解析^{(7)~(9)}, 見かけの重力加速度が急激に変動した場合の液面形状の過渡応答解析⁽¹⁰⁾が行われているが, これらのうちのいくつかはメニスカスを水平面によって近似している^{(7)~(10)}. またメニスカスの曲

面形状を考慮したもの^{(3)~(6)}でも, 極低重力空間において球形容器中のメニスカスが一部の領域で平面極座標の二価関数となる場合にもメニスカスの形状計算および振動解析を有効に行う方法は与えられていないようである. 本研究は, このような場合のメニスカスの振動解析を目的とし, 本報ではその初段階として, 重力と表面張力との平衡条件よりメニスカスの曲面形状を決定する.

メニスカス形状の決定に関しては, 過去に類似の問題として, 円管あるいは平行平板間を上昇した液面の形状が計算されている. 平行平板の場合には厳密解が求められており⁽¹¹⁾⁽¹²⁾, 円管の場合にはレーレー⁽¹³⁾により解析的に近似解が求められている. 彼は, 表面張力が重力に比して支配的な場合には, メニスカスが球形に近いことに基づいてこれを第一近似解とする逐次近似法を採用し, 重力の支配的な場合には, 解を基礎方程式の主要線形部分の解である零位の変形ベッセル関数で表す方法によっている. しかしながら, 本研究で取扱おうとする球形容器中の二価関数メニスカスを求める一般的方法としては適切ではない.

本論文では, 球形容器中のあらゆるメニスカス形状を表すのに便利な座標系を導入し, 数値計算によりメニスカス形状を求める. 従来より頻用されているヤン

* 昭和62年4月2日 第64期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和61年9月25日.

^{*1} 正員, 石川島播磨重工業(株)技術研究所 (〒135 東京都江東区豊洲3-1-15).

グ・ラプラスの平衡方程式を直接利用する代わりに、仮想仕事の原理により基礎方程式を導出する。特に、表面張力仕事に関与する仮想面積増分を液面の単位法線ベクトルを用いて計算する簡潔な方法を示す。

2. 理 論

2.1 解析モデルと座標系 図1に示すような半径 a の剛体球形容器中のメニスカスの振動解析を行う。従来の研究^{(3)~(5)}では、振動液面 F を平面極座標 (r, φ) を独立変数として次式によって表している。

$$z = z_F(r, \varphi, t) = z_M(r) + \eta(r, \varphi, t) \quad \cdots \cdots (1)$$

ここで、 $z_M(r)$ はメニスカスの軸対称液面 M を表す関数形、 $\eta(r, \varphi, t)$ は液面 F の静的平衡位置 M からの z 方向の微小振動変位である。しかし、式(1)による液面の表示方法では、下記の二点の問題が生ずる。

(1) 液面と容器壁面との交角は一般に零度に近い小さな値となるので⁽¹⁴⁾、液体がある一定量を越えると、図1のように式(1)が平面極座標の二価関数となる領域が生ずる。

(2) 液面振動変位が容器壁面において壁面方向に沿う適合性を満足しない。

そこで本研究では、下記のようなメニスカス M および振動液面 F の表示方法を導入する。

(1) 球形容器の頂点を原点 O とする球座標 (R, θ, φ) ($0 \leq \theta \leq \bar{\theta} < \pi/2$) を導入し、メニスカス曲面 M を θ を独立変数として次式によって表示する。

$$R = R_M(\theta) \quad \cdots \cdots (2)$$

(2) メニスカス曲面 M と容器壁面 W の交線 $(\theta = \bar{\theta})$ で球形容器に接する円すい面の頂点 O' を原点とする新たな球座標 (R', θ', φ) ($0 \leq \theta' \leq \bar{\theta}'$) を設定し、振動液面 F を次式によって表示する。

図1 球形容器と座標系

$$R' = R'_F(\theta', \varphi, t) = R'_M(\theta') + \zeta(\theta', \varphi, t) \quad \cdots \cdots (3)$$

このような表示方法により、メニスカス曲面 M は θ または θ' の、振動液面 F は θ' と φ との一価関数として表すことができ、また、 R' 方向の液面振動変位 ζ が容器壁面 $\theta' = \bar{\theta}'$ で壁面方向に沿うことがわかる。

以下、本論文では、式(2)中の $R_M(\theta)$ を決定する。

2.2 仮想仕事の原理 液体運動に関するハミルトンの原理を静的平衡状態に帰着させることにより、メニスカス形状 $R_M(\theta)$ に関する微分方程式導出の基礎となる仮想仕事の原理を導く。液体運動に関するハミルトンの原理は次式によって与えられる。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V (p_l - p_g) dV - \iint_F \sigma dF \right\} dt = 0 \quad \cdots (4)$$

ここで、 p_l, p_g は液体および気体の圧力、 σ は表面張力、 V は液体の占める空間を表す。 $\{ \}$ の中は液体運動のラグランジアンを与え、圧力変分に加え、体積変分 $\delta(dV)$ および面積変分 $\delta(dF)$ を考慮して変分計算を行えば、液体運動の基礎式が得られることを次報で示す。式(4)で p_g と σ によるポテンシャル項を除去すれば、液面圧力が零となる場合の変分原理⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾に帰着する。

メニスカスを求めるために静的平衡状態に着目すると、式(4)中の圧力 p_g, p_l は静圧で、 V は静止時の液体領域で、振動液面 F はメニスカスで置き換えられ、変分を受ける量は dV と dM となる。体積要素の変分 $\delta(dV)$ はメニスカスの仮想変位 δR_M によって消滅した液体空間 δV の体積素片に変換できる：

$$\delta(dV) = d(\delta V) = -\delta R_M \cos \gamma \cdot dM \quad \cdots \cdots (5)$$

ここで γ は、仮想変位 δR_M と液面 M の液体空間に対する内向き法線方向とのなす角である。以上に基づき、ハミルトンの原理(4)は、下記のような静圧と表面張力との平衡関係を支配する仮想仕事の原理に帰着する。

$$\delta W_p + \delta W_\sigma = 0 \quad \cdots \cdots (6)$$

ここで、

$$\delta W_p = \iint_M (p_l - p_g) \delta R_M \cos \gamma dM \quad \cdots \cdots (7)$$

$$\delta W_\sigma = \iint_M \sigma \delta(dM) \quad \cdots \cdots (8)$$

$\delta W_p, \delta W_\sigma$ はそれぞれ静圧、表面張力が仮想変位 δR_M に対してなす仮想仕事を表し、ともにメニスカス曲面 M ($0 \leq \theta \leq \bar{\theta}, 0 \leq \varphi < 2\pi$) 上での面積分によって表される。

2.3 基礎方程式 仮想仕事の原理式(6)に基づきメニスカス形状 $R_M(\theta)$ が満足すべき微分方程式を導出する。式(7)、(8)中の dM は微分幾何学的に求めることができるが(付録1参照)、ここでは、式(8)

中の微小面積要素の仮想増分 $\delta(dM)$ と液面 M の内向き単位法線ベクトル N の間に成り立つ次の関係式を利用する。

$$\delta(dM) = \text{div } N \delta R_M \cos \gamma dM \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(9)は下記のようにして証明される。まず、発散 $\text{div } N$ を積分形式で表現すれば、

$$\text{div } N = \lim_{D \rightarrow 0} \left[\frac{\oint_A N \cdot n dA}{D} \right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 D は N の定義点 P を含む任意の空間、 A は D を取り囲む閉曲面、 n は A の外向き単位法線ベクトルである。今、 D の極限として、点 P を含む面積要素 dM が M の法線方向の仮想変位 $\delta R_M \cos \gamma$ により $dM' = dM + \delta(dM)$ まで移動する間に通る空間をとる(図2参照)。すると、式(10)における面積分の被積分関数 $N \cdot n$ は、 dM では -1 、 dM' では 1 、 $A - dM - dM'$ では零(2次微小量として省略できる)であるから、式(10)は、

$$\text{div } N = \frac{dM' - dM}{dM \cdot \delta R_M \cos \gamma} = \frac{\delta(dM)}{dM \cdot \delta R_M \cos \gamma} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となり、式(9)が証明される。

さて、式(9)を式(8)に代入し、変分 δR_M の任意性に留意すれば、仮想仕事の原理式(6)より液面 M 上で成立すべき方程式として次式が得られる。

$$p_g - p_l = \sigma \text{div } N \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)によって気圧、液圧、表面張力の間の平衡関係が与えられる。

次に、メニスカス液面 M の単位法線ベクトル N を計算する。曲面 M の方程式(2)を

$$f(R, \theta, \varphi) = R - R_M(\theta) = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

の形に表せば、 N の球座標 (R, θ, φ) 成分は

$$\begin{aligned} N &= \{N_R, N_\theta, N_\varphi\} \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial R}, \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{(1/R^2)^2 + (1/R^2)(\partial f / \partial \theta)^2} \right. \\ &\quad \left. + (1/R^2 \sin^2 \theta)(\partial f / \partial \varphi)^2 \right\}^{1/2} \\ &= \{R_M, -R_{M\theta}, 0\} / (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

によって求められる。式(12)の右辺を、式(14)を球座

図2 面積要素の変分 $\delta(dM)$ と単位法線ベクトル N

標表示された発散の定義式：

$$\begin{aligned} \text{div } N &= (1/R^2) \partial(R^2 N_R) / \partial R \\ &\quad + (1/R \sin \theta) \{ \partial(N_\theta \sin \theta) / \partial \theta + \partial N_\varphi / \partial \varphi \} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

に代入することにより計算すると、下記のようなになる。

$$\begin{aligned} p_g - p_l &= \sigma (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{-3/2} R_M^{-1} \\ &\quad \times [2R_M^3 + 3R_M R_{M\theta}^2 - R_{M\theta}^2 R_{M\theta\theta} \\ &\quad - R_{M\theta} (R_M^2 + R_{M\theta}^2) / \tan \theta] \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで、 $R_{M\theta} \equiv dR_M/d\theta$ 、 $R_{M\theta\theta} \equiv d^2 R_M/d\theta^2$ と簡略表記した。式(16)中の液体の静圧 p_l は、液体密度を ρ_f 、重力加速度を g として次式によって与えられる。

$$p_l = p_0 - \rho_f g \{ R_M(0) - R_M \cos \theta \} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 p_0 は $\theta=0$ での液圧である。一方、気体の密度は小さく無視し得るとして、気体の静圧 p_g は一定と仮定する。式(17)を式(16)に代入したものがメニスカス形状 $R_M(\theta)$ を決定する二階非線形常微分方程式である。数値解析の便宜上、この方程式を $R_{M\theta\theta}$ について解いた形に表すと、下記のようなになる。

$$\begin{aligned} R_{M\theta\theta} &= (2R_M^2 + 3R_{M\theta}^2) / R_M \\ &\quad - (R_{M\theta} / \tan \theta) \{ (R_M^2 + R_{M\theta}^2) / R_M^2 \} \\ &\quad - [p_g - p_0 + \rho_f g \{ R_M(0) - R_M \cos \theta \}] \\ &\quad \times (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{3/2} / (\sigma R_M) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

2.4 拘束条件 常微分方程式(18)を $0 \leq \theta \leq \bar{\theta}$ でルンゲ・クッタ・ギル法により前進計算するためには、初期値 $R_M(0)$ 、 $R_{M\theta}(0)$ と方程式中の圧力差 $p_g - p_0$ が知れていなくてはならない。このうち、 $R_{M\theta}(0)$ はメニスカスの軸対称性に基づき

$$R_{M\theta}(0) = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

であるが、 $R_M(0)$ と $p_g - p_0$ は未知である。これらを定めるために、下記の二つの拘束条件を設定する。

(1) 容器壁面と液面とが接触角と呼ばれるある角度 θ_c をなして交わる：

$$\left[\tan^{-1} \left(\frac{dr_M}{dz} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{dr_W}{dz} \right) \right]_{\theta=\bar{\theta}} = \theta_c \quad \dots\dots (20)$$

ここで、 $r_M(z)$ 、 $r_W(z)$ は、メニスカス曲面、容器壁面を z を独立変数としてそれぞれ $r = r_M(z)$ 、 $r = r_W(z)$ と表したときの関数形を表し、式中の微分は次式によって計算される。

$$\frac{dr_W}{dz} = \frac{d}{dz} \{ a^2 - (z-a)^2 \}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{dr_M}{dz} = \frac{dr/d\theta}{dz/d\theta} = \frac{R_{M\theta} \sin \theta + R_M \cos \theta}{-R_{M\theta} \cos \theta + R_M \sin \theta} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(22)の最後の等号では、次の幾何学的関係を用いた。

$$r = R_M(\theta) \sin \theta, z = 2a - R_M(\theta) \cos \theta \cdots \cdots (23)$$

(2) 液体の非圧縮性の仮定に基づき、液体の占める体積が与えられた一定値 V に等しい:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \int_{R_M(\theta)}^{2a \cos \theta} R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \pi \int_0^{\bar{\theta}} \{8a^3 \cos^3 \theta - R_M^3(\theta)\} \sin \theta d\theta = V \\ & \cdots \cdots \cdots (24) \end{aligned}$$

2・5 数値計算方法 上記の拘束条件を満足する方程式(18)の解を得るためには、接触角条件式(20)に対しては圧力差 $p_g - p_0$ を、体積条件式(24)に対しては初期値 $R_M(0)$ を調整する二重の反復計算ループを必要とする。具体的計算手順は下記のとおりである。

(1) $R_M(0)$ を任意の値に固定し、 $p_g - p_0$ の値を変動させて、方程式(18)を $0 \leq \theta \leq \bar{\theta}$ で前進計算して得られる解が接触角条件式(20)を満足する $p_g - p_0$ の値を捜す。

(2) $R_M(0)$ の値を変動させて、各 $R_M(0)$ の値に対し(1)と同順の手順を繰返すことにより、体積条件式(24)も満足するような $R_M(0)$ の値を見出す。

さて、微分方程式(18)を数値解析する際、右辺第2項中の $R_{M0}/\tan \theta$ は、式(19)より初期 $\theta=0$ において $0/0$ の不定形となるので注意を要する。以下に、この不定形極限を有限値として評価し得ることを示しておく。 $\theta=0$ の近傍ではメニスカスを r を独立変数とした形 $z=z_M(r)$ によって表すことができ、 $z_M(r)$ に関する微分方程式は式(12)の右辺を円筒座標 (r, φ, z) により表現することによって次式となる。

$$\begin{aligned} & (1/r)(d/dr)\{rz'_M(1+z_M'^2)^{-1/2}\} - (\rho_f g/\sigma)z_M \\ &= \{p_g - p_0 - \rho_f g z_M(0)\}/\sigma \cdots \cdots (25) \end{aligned}$$

$\theta=0$ すなわち $r=0$ の近傍では $z'_M(r)$ は小さいので、式(25)中の $z_M'^2$ を省略した次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & z'_M + (1/r)z'_M - (\rho_f g/\sigma)z_M \\ &= \{p_g - p_0 - \rho_f g z_M(0)\}/\sigma \cdots \cdots (26) \end{aligned}$$

式(26)の解は、零位の第1種変形ベッセル関数 I_0 を用いて下記のように表される。

$$\begin{aligned} & z_M(r) = (p_g - p_0)\{I_0(\sqrt{\rho_f g/\sigma} \cdot r) - 1\}/(\rho_f g) \\ & + z_M(0) \cdots \cdots (27) \end{aligned}$$

$R_{M0}/\tan \theta$ を式(23)を用いて $z_M(r)$ で表し、式(27)を代入する。変形ベッセル関数の級数展開式⁽¹⁷⁾を用いて $r \rightarrow 0$ に対する極限を計算すると次式が得られ、微分方程式(18)の右辺の不定形の初期値が確定する。

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{R_{M0}}{\tan \theta} = R_M(0) \left\{ 1 - \frac{p_g - p_0}{2\sigma} R_M(0) \right\} \\ & \cdots \cdots \cdots (28) \end{aligned}$$

2・6 平衡方程式の検証 上記の理論に基づいて

数値計算を行う前に、本研究で導出した平衡方程式(12)あるいは式(16)が、従来頻用されているヤング・ラプラス方程式と等価であることを検証し、さらにその等価性に関する数学的理論について説明しておく。また、仮想仕事の原理(6)の代わりに直接釣合い法によっても式(16)が導かれることを示しておく。

2・6・1 ヤング・ラプラス方程式との等価性 ヤング・ラプラス方程式は次のように書ける。

$$p_g - p_l = \sigma(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \cdots \cdots (29)$$

ここで、 R_1^{-1}, R_2^{-1} はメニスカス曲面 M の主曲率で、曲率の中心が気体側にある場合を正と定める。曲面 M の軸対称性に基づき、その主曲率方向は明らかに子午線方向 (θ 方向) および経線方向 (φ 方向) である。 θ 方向の曲率 R_1^{-1} は母線に沿って測った微小長さ ds に対する傾斜角 $\Theta = \tan^{-1}(dz/dr)$ の変化 $d\Theta$ の割合に等しい。また、 φ 方向の曲率中心は明らかに z 軸上にある。以上により、主曲率 R_1^{-1}, R_2^{-1} は次式によって計算される。

$$\begin{aligned} & R_1^{-1} = d\Theta/ds = (d\Theta/d\theta) \cdot (d\theta/ds) \\ & R_2^{-1} = \sin \Theta/r \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} R_1^{-1} = d\Theta/ds = (d\Theta/d\theta) \cdot (d\theta/ds) \\ R_2^{-1} = \sin \Theta/r \end{aligned}} \right\} \cdots \cdots (30)$$

式(30)の右辺の各因数は、

$$\begin{aligned} & \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{dz}{dr} \right) \right\} \\ &= \frac{d}{d\theta} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{dz/d\theta}{dr/d\theta} \right) \right\} \\ & \frac{d\theta}{ds} = \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\ & \sin \Theta = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\theta} \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 \right\}^{-1/2} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{dz}{dr} \right) \right\} \\ \frac{d\theta}{ds} = \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 \right\}^{-1/2} \\ \sin \Theta = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\theta} \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2 \right\}^{-1/2} \end{aligned}} \right\} \cdots \cdots (31)$$

と変形した後、式(23)より求められる $dr/d\theta, dz/d\theta$ を代入することにより計算される。以上のようにして求めた主曲率 R_1^{-1}, R_2^{-1} を式(29)に代入した結果は、式(16)となる。したがって、本研究で導いた平衡方程式(12)または式(16)とヤング・ラプラス方程式(29)の等価性が確かめられた。なお、式(29)の右辺に現れる2主曲率の和 $R_1^{-1} + R_2^{-1}$ は、平均曲率と呼ばれ、微分幾何学の公式⁽¹⁸⁾によっても計算できる(付録2参照)。

式(12)と式(29)とが一致することは、曲面の平均曲率が単位法線ベクトルの発散に等しいという数学理論に立脚している:

$$R_1^{-1} + R_2^{-1} = \text{div } N \cdots \cdots (32)$$

この関係式は、単位ベクトル系の微分公式⁽¹⁹⁾を援用することによって一般的に証明される(付録3参照)。

2・6・2 直接釣合い法による平衡方程式の導出

式(16)を直接釣合い法によって導出するために、 r と $r+dr$ の間にある軸対称な微小液面要素(母線方向

長さ ds) に関する z 方向の力の平衡を考えると,

$$(p_g - p_l) \frac{d}{ds} (\pi r^2) ds = \frac{d}{ds} \left(\sigma \cdot 2\pi r \frac{dz}{ds} \right) ds$$

すなわち,

$$(p_g - p_l) r \frac{dr}{ds} = \sigma \left(\frac{dr}{ds} \frac{dz}{ds} + r \frac{d^2 z}{ds^2} \right) \quad (33)$$

となる。式(23)を用いて、式(33)を $R_M(\theta)$ に関する微分方程式に変換すると、方程式(16)が導かれる。

3. 数値計算例

2章で述べた理論に基づいて数値計算を行う。微分方程式(18)を球形容器の半径 a で無次元化されたメニスカス形状 $R'_M(\theta) = R_M(\theta)/a$ に関する方程式に変換すると、下記ようになる。

$$\begin{aligned} R'_{M\theta\theta} &= (2R'_M + 3R'^2_{M\theta})/R'_M \\ &\quad - (R'_{M\theta}/\tan \theta) \{ (R'^2_M + R'^2_{M\theta})/R'^2_M \} \\ &\quad - \left[\frac{a(p_g - p_l)}{\sigma} + B_0 \{ R'_M(0) - R'_M \cos \theta \} \right] \\ &\quad \times (R'^2_M + R'^2_{M\theta})^{3/2}/R'_M \quad (34) \end{aligned}$$

ここで B_0 は、重力と表面張力の相対比を表す無次元数で、ボンド数と呼ばれ、次式によって定義される。

図3 球形容器内のメニスカス形状

図4 各ボンド数 B_0 に対する容器半径 a と重力加速度 g の関係

$$B_0 = \rho_f g a^2 / \sigma \quad (35)$$

方程式(34)中の未定パラメータ $a(p_g - p_l)/\sigma$ および $R'_M(0)$ は、それぞれ接触角条件式(20)と体積条件式(24)によって定められるので、結局式(34)の解は、定められた接触角および体積条件のもとではボンド数 B_0 のみに依存する。

図3にメニスカス形状の数値計算例を示す。本計算例では、接触角 $\theta_c = 5^\circ$ とした⁽⁴⁾。また、体積 V は、地上重力場でメニスカスが水平面となった場合の深さ h によって定め、 $h = 0.8a$ および $h = 1.2a$ の場合について計算を行った。メニスカス形状は、ボンド数 B_0 が大きい場合には、ほとんどの領域で水平面となり、 B_0 が小さい場合には球形に近くなることがわかる。 $B_0 = 0$ のもとでは、メニスカスは球面の一部となる。

図4は、与えられたボンド数 B_0 の値に対する容器半径 a と重力加速度 g の関係を水 ($\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 0.0725 \text{ N/m}$) の場合について示したもので、ある半径 a に対して重力加速度がどの程度低下すれば所定のボンド数 B_0 が実現するかを見るのに便利である。

メニスカスと容器壁との交点が、容器壁が鉛直となる $z = a$ の近傍にある場合には、本解析の結果は円筒容器内のメニスカス形状とほとんど一致する。図5は、このような場合の球形容器内メニスカスを求めた一例で、文献(1)の389ページに載せられている円筒容器内メニスカスの写真と比較した結果、図示する限りで完全に一致した。

4. 結 言

低重力下における表面張力効果を算入した球形容器内の液面揺動解析の初段階として、液面の静的平衡時の曲面形状(メニスカス)を求め、下記の結論を得た。

(1) メニスカスが平面極座標の二価関数となる場合にも、メニスカスおよび振動液面の合理的表示が行えるような座標系を導入した。

(2) 液体運動の一般変分原理を静的平衡状態に帰着させることによって得られた仮想仕事の原理に基づき、メニスカス形状を支配する微分方程式を導出した。

(3) (2)の微分方程式の導出に際して、従来頻用

図5 鉛直壁と交わるメニスカス形状 ($B_0 = 45$)

されたヤング・ラプラス方程式の直接利用の代わりに、表面張力仮想仕事に関与する面積要素の変分を液面の単位法線ベクトルの発散量に関係付ける解法により、従来に比してより簡潔な解析法を示した。

(4) 種々の重力レベルでのメニスカス形状の数値計算結果を、重力と表面張力の相対比を表す無次元数(ボンド数)によって整理し、一部の結果を過去の文献と比較して両者の一致を確認した。

メニスカス曲面を平衡位置とした液面揺動の解析が今後の課題である。

付録1 式(7),(8)の微分幾何学的計算

曲面 M 上の任意点 $P(\theta, \varphi)$ の位置ベクトル $\mathbf{X}$ を x, y, z 方向の単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて

$$\mathbf{X}(\theta, \varphi) = iR_M(\theta) \sin \theta \cos \varphi + jR_M(\theta) \sin \theta \sin \varphi + kR_M(\theta) \cos \theta \quad \cdots (36)$$

と表し、曲面 M 上の曲線座標 θ, φ に関する接線ベクトルを

$$\mathbf{X}_i = \partial \mathbf{X} / \partial u^i \quad (i=1, 2; u^1 = \theta, u^2 = \varphi) \quad \cdots (37)$$

によって表せば、 dM と γ は次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} dM &= |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| d\theta d\varphi \\ \cos \gamma &= \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} / |\mathbf{X}| \end{aligned} \right\} \quad \cdots (38)$$

式(38)の第2式中の曲面 M の単位法線ベクトル $\mathbf{N}$ は、

$$\mathbf{N} = -(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2) / |\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2| \quad \cdots (39)$$

によって求められる。式(36), (37), (39)を用いて式(38)を計算すれば下記のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} dM &= R_M (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{1/2} \sin \theta d\theta d\varphi \\ \cos \gamma &= R_M (R_M^2 + R_{M\theta}^2)^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad \cdots (40)$$

ここで $R_{M\theta} \equiv dR_M/d\theta$ である。式(40)を式(7), (8)に代入し、 R_M に関する変分を実行する。式(8)では θ に関して部分積分を行い、式(6)に基づき曲面 M において成立する関係に着目すると、式(16)が導出される。

付録2 平均曲率の微分幾何学的計算

式(29)の右辺に現れる平均曲率は、総和規約に従うテンソル形式により次式によって与えられる⁽¹⁸⁾。

$$R_1^{-1} + R_2^{-1} = g^{ij} H_{ij} \quad \cdots (41)$$

ここで、 g^{ij} は次式で定義される計量テンソル g_{ij} :

$$g_{ij} = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j \quad (i, j=1, 2) \quad \cdots (42)$$

を (i, j) 成分にもつ行列の逆行列の (i, j) 要素であり、 H_{ij} は次式によって与えられる。

$$H_{ij} = -(\partial \mathbf{X}_i / \partial u^j) \cdot \mathbf{N} \quad (i, j=1, 2) \quad \cdots (43)$$

式(37), (39)で求めた $\mathbf{X}_i, \mathbf{N}$ を用いて式(41)の平均曲率を計算すれば、式(29)と式(16)の一致が確認できる。

付録3 式(32)の証明

空間内に直交曲線座標系 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を設定し、 $\alpha_3 = \text{const.}$ によって表される曲面 S を考える。 α_1, α_2 は曲面 S の主曲率方向に向いているとする。 α_i はすべて長さの次元を有し、 $d\alpha_i$ は α_i 曲線に沿った線素の長さとする。単位ベクトル系の微分公式⁽¹⁹⁾により、 S の単位法線ベクトル $\mathbf{N}$ の主曲率方向の微分は、 α_i 方向の主曲率を $R_i^{-1} (i=1, 2)$, 単位接線ベクトルを $\mathbf{t}_i$ として、次式によって与えられる。

$$\partial \mathbf{N} / \partial \alpha_1 = \mathbf{t}_1 / R_1, \quad \partial \mathbf{N} / \partial \alpha_2 = \mathbf{t}_2 / R_2 \quad \cdots (44)$$

これらの2式にそれぞれ $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ を内積し辺々加えると、

$$R_1^{-1} + R_2^{-1} = (\partial \mathbf{N} / \partial \alpha_1) \cdot \mathbf{t}_1 + (\partial \mathbf{N} / \partial \alpha_2) \cdot \mathbf{t}_2 \quad \cdots (45)$$

α_i 方向の方向余弦を $(\lambda_i, \mu_i, \nu_i) (i=1 \sim 3)$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}_i &= (\lambda_i, \mu_i, \nu_i) \quad (i=1, 2) \\ \mathbf{N} &= (\lambda_3, \mu_3, \nu_3) \end{aligned} \right\} \quad \cdots (46)$$

式(46)を式(45)に代入し、

$$\begin{aligned} \partial \lambda_3 / \partial \alpha_1 &= \lambda_1 (\partial \lambda_3 / \partial x) + \mu_1 (\partial \lambda_3 / \partial y) \\ &+ \nu_1 (\partial \lambda_3 / \partial z) \quad \cdots (47) \end{aligned}$$

などの関係を考慮すれば、

$$\begin{aligned} R_1^{-1} + R_2^{-1} &= (\partial \lambda_3 / \partial x) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\ &+ (\partial \mu_3 / \partial y) (\mu_1^2 + \mu_2^2) + (\partial \nu_3 / \partial z) (\nu_1^2 + \nu_2^2) \\ &+ (\partial \lambda_3 / \partial y + \partial \mu_3 / \partial x) (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2) \\ &+ (\partial \lambda_3 / \partial z + \partial \nu_3 / \partial x) (\nu_1 \lambda_1 + \nu_2 \lambda_2) \\ &+ (\partial \mu_3 / \partial z + \partial \nu_3 / \partial y) (\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2) \quad \cdots (48) \end{aligned}$$

さらに、式(46)の方向余弦の間に成り立つ

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 - \lambda_3^2, \quad \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 = -\lambda_3 \mu_3 \quad \cdots (49)$$

等の関係を用いて変形を進めれば最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} R_1^{-1} + R_2^{-1} &= \partial \lambda_3 / \partial x + \partial \mu_3 / \partial y + \partial \nu_3 / \partial z \\ &- (1/2) (\partial / \partial \alpha_3) (\lambda_3^2 + \mu_3^2 + \nu_3^2) \\ &= \text{div } \mathbf{N} \quad \cdots (50) \end{aligned}$$

したがって式(32)が証明された。

式(41)とテンソル形式で書かれた曲線座標系 $u^i (i=1 \sim 3)$ における3基底ベクトル $\mathbf{e}_i$ の微分公式⁽²⁰⁾ :

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k \quad \cdots (51)$$

を援用すれば、下記のような証明も可能である。ここで、 $\partial_i \equiv \partial / \partial u^i$ と表記されており、 Γ_{ji}^k は次式で定義さ

れるクリストッフェルの3添字記号である。

$$\Gamma_{ji}^k = (1/2)g^{kl}(-\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} + \partial_l g_{ji}) \cdots \cdots (52)$$

ここで,

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j \cdots \cdots (53)$$

であり, $[g^{ij}]$ は行列 $[g_{ij}]$ の逆行列である。今, $e_1 = X_1$, $e_2 = X_2$, $e_3 = -N$ とおいて, $X_i \cdot N = 0 (i=1,2), |N|=1$ に留意すると, 式(51)より,

$$\partial_j X_i = \Gamma_{ji}^k X_k + (1/2)(\partial_3 g_{ij})N \quad (j=1,2) \cdots \cdots (54)$$

式(54)に N を内積して式(43)の H_{ij} を g_{ij} で表し, これを式(41)に代入すると

$$R_1^{-1} + R_2^{-1} = -(1/2)g^{ij}\partial_3 g_{ij} \cdots \cdots (55)$$

一方, 行列 $[g_{ij}]$ の行列式 g を法線方向 u^3 で微分し, $[g_{ij}]$ の要素 g_{ij} の余因数が gg^{ij} であることに注意すれば,

$$\partial_3 g = (\partial_3 g_{ij})gg^{ij} \cdots \cdots (56)$$

式(55)は式(56)の右辺を $-2g$ で除したものであるから,

$$R_1^{-1} + R_2^{-1} = -\frac{1}{2g}\partial_3 g = -\partial_3 \log \sqrt{g} = \frac{-1}{\sqrt{g}}\partial_3 \sqrt{g} \cdots \cdots (57)$$

と変形できる。一方, 斜交曲線座標で表されたベクトル場 N の発散は, N の u^i 成分を N^i として

$$\text{div } N = (1/\sqrt{g})\partial_i(\sqrt{g}N^i) \cdots \cdots (58)$$

によって与えられる。 $(N^1, N^2, N^3) = (0, 0, -1)$ であることから, 式(57)と式(58)との一致が確かめられ, 式(32)が証明される。

文 献

- (1) Abramson, H. N. 編, NASA SP, 106 (1966).
- (2) Lamb, H., *Hydrodynamics*, (1945), Dover.
- (3) Yeh, C. K., *J. Appl. Mech.*, 34 (1967), 23.
- (4) Chu, W. H., *J. Appl. Mech.*, 37 (1970), 828.
- (5) Dodge, F. T. and Garza, L. R., *J. Appl. Mech.*, 34 (1967), 555.
- (6) Dodge, F. T. and Garza, L. R., *J. Spacecraft and Rocket*, 7 (1970), 204.
- (7) Bauer, H. F. and Siekmann, J., *Ing. Arch.*, 40 (1971), 266.
- (8) Siekmann, J. and Chang, S. C., *Ing. Arch.*, 37 (1968), 99.
- (9) Bauer, H. F. and Siekmann, J., *ZAMM*, 49 (1969), 577.
- (10) Tong, P., *AIAA J.*, 5 (1967), 1842.
- (11) ランダウ=リフシッツ(竹内均訳), 流体力学 1, (昭55), 第7章, 東京図書.
- (12) 小野, 表面張力, (昭55), 48, 共立出版.
- (13) Rayleigh, L., *Proc. Roy. Soc. (London)*, (1915), 184.
- (14) Neu, J. T. and Good, R. J., *AIAA J.*, 1 (1963), 814.
- (15) 坂田・ほか2名, 機論, 49-442, C (昭58), 963.
- (16) Seliger, R. L. and Whitham, G. B., *Proc. Roy. Soc. (London)*, Ser. A, 305 (1968), 1.
- (17) 寺沢, 数学概論, (昭60), 489, 岩波.
- (18) 矢野, 幾何学, (昭32), 92, 岩波講座現代応用数学.
- (19) 川股, シェル構造解析 (昭49), 131, 培風館.
- (20) 文献(18)の67ページ.

討 論

〔質問〕 小 松 敬 治〔航空宇宙技術研究所〕

(1) 貴論文の座標系で一般の軸対称容器内のメニスカスの計算が可能か。

(2) 接触角 $\theta_c = 0^\circ$ の場合, 数値計算上困難に陥るようなことはないか。

〔回答〕 2・1節で導入した球座標 $O-R\theta\varphi$ は, 球形容器に限らず, 一般の軸対称容器におけるメニスカス形状 $R=R_M(\theta)$ の計算に適用できる。付図1に, 種々の容器形状に対する球座標の取り方を示す。メニスカスが下に凸の場合には, 球座標の原点 O は, 液体の体積から考えて明らかに液面の上側にくる位置にとる。すなわち, 表面張力を無視して水平液面となったときに深さ h となるだけの体積の液体が入れられているとすると, 球座標の原点 O の z 座標 z_0 は, $z_0 > h$ を満たす必要がある。円すい容器, 円筒容器では z_0 に上限はない。だ円体容器では, 原点 O を容器の頂上より上にとるとメニスカス $R=R_M(\theta)$ が θ の二価関数となる恐れが生ずるので(付図2参照), 球座標の原点

付図1 種々の軸対称容器におけるメニスカス

付図2 メニスカス $R=R_M(\theta)$ が二価関数となる場合

付図 3 球形容器内のメニスカス形状
($B_0=1$, $h=1.2a$, $\theta_c=0$)

O を容器の頂上にとればよい。

球形容器以外の場合には、式(21)中の $r_w(z)$ と、式(24)中の R 積分の上限 $2a \cos \theta$ (容器壁面の R 座標を θ で表したもの) を各種容器形状を考慮した関数形に変更することにより、本論文と同じ計算方法でメニスカス形状 $R=R_M(\theta)$ を決定することが可能である。

(2) ご指摘のように、2・5 節で述べた計算手順により接触角 θ_c が 0° の場合の解を得ることは困難であ

り、 $\theta_c=0.2^\circ$ 程度が限界のようである。これは、式(18)を $\theta=0$ から前進積分し、解 $R=R_M(\theta)$ と容器の交線で接触角条件(20)を満たそうとする際に、 $\theta_c \rightarrow 0$ に伴い解が容器と交わるか否かの判定が困難となることに起因する。このような問題を回避するためには、接触角条件(20)を $\theta=\bar{\theta}$ における初期条件の一つとして、式(18)を後退積分すればよい。具体的計算方法は以下のとおりである。

(i) 液圧 p_l を接触位置 $\theta=\bar{\theta}$ における液圧 p_c を用いて、 $p_l=p_c+\rho_f g\{R_M \cos \theta-R_M(\bar{\theta}) \cos \bar{\theta}\}$ と表し、式(16)に用いると、 $R_M(\theta)$ に関する微分方程式として次式を得る。

$$R_{M\theta\theta}=(2R_M^2+3R_{M\theta}^2)/R_M-(R_{M\theta}/\tan \theta) \\ \times \{(R_M^2+R_{M\theta}^2)/R_M^2\} \\ -[p_g-p_c-\rho_f g\{R_M \cos \theta-R_M(\bar{\theta}) \cos \bar{\theta}\}] \\ \times (R_M^2+R_{M\theta}^2)^{3/2}/(\sigma R_M) \cdots \cdots (i)$$

(ii) 任意に固定した接触位置と接触角条件(20)より定まる $R_M(\bar{\theta})$, $R_{M\theta}(\bar{\theta})$ を初期条件として式(i)を後退積分した解が、式(19)を満たすような式(i)中の p_g-p_c の値を捜す。

(iii) 接触位置を変動させて(ii)の計算を繰返すことにより、体積条件式(24)も満たす接触位置を見いだす。

上記の計算手順によって求めた接触角条件 $\theta_c=0$ を満足するメニスカスの一例を付図3に示す。