衝撃電磁力を受ける磁気浮上体の非線形過渡応答*

長 屋 幸 助^{*1}, 大 月 和 也^{*2}Nonlinear Transient Response of a Floating Body on Magnetic Supports
Subjected to an Electromagnetic Force

Kosuke NAGAYA and Kazuya OHTSUKI

This paper discusses a nonlinear transient response of a floating body supported by a magnetic force which is generated between two magnets of the same poles. In this system there are two kinds of nonlinearity, one of which is due to the restoring force between magnets and the other is due to the load which is a function of the displacement of the body. To treat these nonlinearities the restoring force is assumed to be a partly linear spring and the load is treated by the successive iteration method. This paper also considers the general transient load, and applies a combination method of the Fourier expansion and the Laplace transform method given by Nagaya. Numerical calculations have been carried out for one of the models. To verify the present analysis, experimental tests have also been performed for the same model treated in the numerical calculation.

Key Words: Dynamics of Machinery, Transient Response, Vibration, Magnet, Magnetic Support, Nonlinear

1. 緒 言

近年電磁気を用いた機器は、機械の自動化に伴い急速に発展してきている。これらのなかで希土類磁石を用い、同種の磁極が対向するように一直線上に並べた系は安定で極めて強い反発力が磁極間に作用し、磁気ばねとして良好に作用する。この系は従来から多く用いられてきた金属ばね等と比較して非接触であるため、弾性変形に伴う疲労がないこと、温度特性が優れ経年変化も小さく、かつばね定数を磁極間げき調整で容易に変化させ得る利点を有している。近年この系の原理を応用した磁気浮上物体は国鉄のリニアモーターカーをはじめ、多くの分野で用いられ、とくに磁気浮上系では摩擦が存在しないため、制御用のリニアガイド等にも使用されるようになった。したがってこの種の系に着目した研究も多く、山村・伊藤による磁気浮上用磁石の速度特性の解析⁽¹⁾、清水⁽²⁾⁽³⁾、狼⁽⁴⁾らによる磁気軸受の研究、倉掛ら⁽⁵⁾⁽⁶⁾、山川ら⁽⁷⁾、小島・山川ら^{(8)~(11)}による動吸振器の研究、吉沢ら⁽¹²⁾による磁気ガイドされる浮上物体の振動の研究などが発表されて

いる。しかしこれらの研究はいずれも定常振動問題に限って解析を行っており、非定常問題を取扱った研究は見受けられないように思われる。

磁気浮上系の復元力特性は強い非線形性を有し、かつ二つの磁石のみで浮上している場合は強い非対称性も有する。一方これらの系に作用する荷重は実際にはかなり複雑な時間関数で与えられる場合が多く、かつ外力が電磁力等の場合は入力の変位の二乗に反比例する関数となるので、系は復元力の非線形性と入力の非線形性の両方を併せ持ち、解析解を導出することは一般に困難となり、上述のようにこの種の系の解析は確立していない。本報はこれらの現状にかんがみ、非線形、非対称復元力を有する系に変位に従属する非線形非定常任意動荷重が作用する場合の非定常解を解析的に求める方法を提示する。解析ではまず非線形復元力を断片線形に近似し、部分線形の方程式の解を求める。この場合、入力関数が複雑な時間関数の場合は解析的に非定常解を求めることが困難となるが、長屋は^{(13)~(15)}フーリエ展開法とラプラス変換法を組合せて任意動荷重を取扱っている。本報ではこの方法に基づき、動荷重をフーリエ展開し、ラプラス変換法により初期条件を含む一般非定常解を求め、解析接続法を適用して全領域に適用できる非線形非定常解を誘導した。し

* 昭和62年4月3日 第64期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和61年7月8日。

^{*1} 正員、群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

^{*2} 准員、日産自動車(株) (〒329-06 栃木県河内郡上三川町)。

図 1 解析モデル

かし本報の場合，入力関数に変位に依存するので，さらに上記で得られた解を第一近似解として，以下逐次近似法を適用して非線形入力を処理し，完全解を導いた．以上で得られた解はもちろん近似解であり，その妥当性を検討する必要がある．そこで本報では非定常電磁力を受ける磁気浮上体を実際に製作し，実験を行い，理論値と実験値との比較照合を行った．

2. 理論解析

本報で対象とする磁気浮上体の解析モデルは図 1 に示されるようなもので，質量 M の磁極を有する可動物体（以下可動質量と称する）が固定磁石に対して同種の極が対向するように案内棒に取付けられ，磁石間に作用する反発力により可動質量が浮上している．この可動磁石に任意の時間関数によって表される動荷重が作用し，かつそれが可動質量の変位の関数である場合の非線形非定常問題を考える．この系をモデル化する場合，磁気ばね力は図 1 の一点鎖線のばねで置き換えられ，また摩擦等を含む減衰力を等価粘性減衰で考慮すると，一点鎖線のダンパを有する系として考えることができる．動荷重 $P'(x, t)$ は時間と座標の関数で

与えられるが，第一近似解を求める過程では，質量 M の静止位置における荷重 $P'(0, t) = P(t)$ を用いると便利である．いま磁石の復元力（反発力）と変位の関係が非線形であり，それを断片線形におきかえ（図 2 参照），磁気ばね定数を k ，等価粘性係数を c ，変位を x ，時間を t とすると，部分線形領域における系の運動方程式は次式のように表される．

$$M(d^2x/dt^2) + c(dx/dt) + kx = P(t) \quad \cdots \cdots (1)$$

式(1)にラプラス変換 $\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ を施すと，同次解 X_1 は次式のように求められる．

$$X_1 = e^{-\mu t} (C_1 \cos p\sqrt{1-\zeta^2}t + D \sin p\sqrt{1-\zeta^2}t) \quad \cdots \cdots (2)$$

ここに

$$p = \sqrt{k/M}, \quad \zeta = \mu/p, \quad 2\mu = c/M$$

であり， C および D は積分定数である．一方 $Q(t) = P(t)/M$ とおくと，特解は像関数表示で

$$\bar{X}_2 = \frac{\bar{Q}}{s^2 + 2\mu s + p^2} \quad \cdots \cdots (3)$$

ここで入力関数を複雑な時間関数と考え， $P(t)$ をフーリエ展開する．すなわち

$$P/M = Q_0 \sum_{m=0}^{\infty} (\varepsilon_m q_m \cos 2m\pi\gamma + q_m^* \sin 2m\pi\gamma) \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_m &= 1/2 \ (m=0), \quad \varepsilon_m = 1 \ (m \geq 1) \\ q_m &= 2 \int_0^1 \{P(\gamma)/P_0\} \cos 2m\pi\gamma d\gamma \\ q_m^* &= 2 \int_0^1 \{P(\gamma)/P_0\} \sin 2m\pi\gamma d\gamma \\ Q_0 &= P_0/M, \quad \gamma = t/T_0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (5)$$

であり， P_0 は荷重を無次元化するために導入した代表荷重， γ は無次元時間であり， T_0 は入力荷重のサンプル時間である．式(4)を式(3)に代入すると

$$\bar{X}_2 = \left[\frac{Q_0}{\{s - (-\mu + i\sqrt{p^2 - \mu^2})\} \{s - (-\mu - i\sqrt{p^2 - \mu^2})\}} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m q_m s + q_m^* (2m\pi/T_0)}{s^2 + (2m\pi/T_0)^2} \quad \cdots \cdots (6)$$

ここに $i = \sqrt{-1}$ である．式(6)より特異点の座標は $s = -\mu \pm i\sqrt{p^2 - \mu^2}$ ならびに $s = \pm i2m\pi/T_0$ の二つのグループに分れることがわかる．これらの特異点を用いて式(6)は留数定理によりラプラス逆変換される．任意時間 t における可動質量 x の一般解は同次解とこれらの留数の和で与えられ，無次元化して次式のように表される．

$$x = (\delta_0/\varepsilon) [e^{-\Lambda\zeta\gamma} \{C \cos(\Lambda\sqrt{1-\zeta^2}\gamma) + D \sin(\Lambda\sqrt{1-\zeta^2}\gamma)\} + \sum_{m=0}^{\infty} (X_m + X'_m)] \quad \cdots \cdots (7)$$

ここに

$$\begin{aligned} X_m &= \frac{e^{-\Lambda\zeta\gamma}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{A_m^* \sin(\Lambda\sqrt{1-\zeta^2}\gamma) + B_m^* \cos(\Lambda\sqrt{1-\zeta^2}\gamma)}{(2\zeta^2 - 1 + 4m^2\pi^2/\Lambda^2)^2 + 4\zeta^2(1-\zeta^2)} \\ X'_m &= \left\{ \frac{1}{(1 - 4m^2\pi^2/\Lambda^2)^2 + (4\zeta m\pi/\Lambda)^2} \right\} [(4\varepsilon_m q_m \zeta m\pi/\Lambda + q_m^* (1 - 4m^2\pi^2/\Lambda^2)) \sin 2m\pi\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{ \varepsilon_m q_m (1 - 4m^2 \pi^2 / \Lambda^2) - q_m^* (4 \zeta m \pi / \Lambda) \} \cos 2m\pi\gamma] \\
A_m^* &= -\varepsilon_m q_m (2\zeta^2 - 1 + 4m^2 \pi^2 / \Lambda^2) \zeta - 2\zeta (1 - \zeta^2) \varepsilon_m q_m + q_m^* (2m\pi / \Lambda) (2\zeta^2 - 1 + 4m^2 \pi^2 / \Lambda^2) \\
B_m^* &= -2\varepsilon_m q_m \zeta^2 \sqrt{1 - \zeta^2} + (2\zeta^2 - 1 + 4m^2 \pi^2 / \Lambda^2) \sqrt{1 - \zeta^2} \varepsilon_m q_m + 2\zeta q_m^* \sqrt{1 - \zeta^2} (2m\pi / \Lambda) \\
\Lambda &= (p/p_0)(p_0 T_0), \quad \zeta = (\mu/p_0)(p_0/p), \quad \gamma = t/T_0, \quad \varepsilon = k/k_0, \quad p_0 = \sqrt{k_0/M}, \quad \delta_0 = P_0/k_0
\end{aligned}
\tag{8}$$

であり, k_0 は復元力曲線の基準となる部分のばね定数, δ_0 は静的変位である. 一方可動質量 M の速度 v は式(7)よりただちに求められ, 次式となる.

$$\begin{aligned}
v &= (\delta_0 p_0 / \sqrt{\varepsilon}) [e^{-\Lambda \gamma} \{ -\zeta \cos(\Lambda \sqrt{1 - \zeta^2} \gamma) + \sqrt{1 - \zeta^2} \sin(\Lambda \sqrt{1 - \zeta^2} \gamma) \} C \\
&+ \{ -\zeta \sin(\Lambda \sqrt{1 - \zeta^2} \gamma) + \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\Lambda \sqrt{1 - \zeta^2} \gamma) \} D] + \sum_{m=0}^{\infty} (V_m + V'_m) \tag{9}
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
V_m &= (e^{-\Lambda \gamma} / \sqrt{1 - \zeta^2}) \{ \{ -\zeta \sin(\Lambda \sqrt{1 - \zeta^2} \gamma) + \sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\Lambda \sqrt{1 - \zeta^2} \gamma) \} A_m^* \\
&- \{ \zeta \cos(\Lambda \sqrt{1 - \zeta^2} \gamma) + \sqrt{1 - \zeta^2} \sin(\Lambda \sqrt{1 - \zeta^2} \gamma) \} B_m^* \} / \{ (2\zeta^2 - 1 + 4m^2 \pi^2 / \Lambda^2)^2 + 4\zeta^2 (1 - \zeta^2) \} \\
V'_m &= \left\{ \frac{2m\pi/\Lambda}{(1 - 4m^2 \pi^2 / \Lambda^2)^2 + (4 \zeta m \pi / \Lambda)^2} \right\} \{ [4 \varepsilon_m q_m \zeta m \pi / \Lambda + q_m^* (1 - 4m^2 \pi^2 / \Lambda^2) \} \cos 2m\pi\gamma \\
&- \{ \varepsilon_m q_m (1 - 4m^2 \pi^2 / \Lambda^2) - q_m^* (4 \zeta m \pi / \Lambda) \} \sin 2m\pi\gamma \} \tag{10}
\end{aligned}$$

式(7)および式(9)で示される解は部分線形領域で成立するが, そこから外れたところでは当然解は変化する. しかし非線形復元力特性を図2のような $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{OD}$, および $\overline{DE}$ のような部分に分解して考えると, 部分的には線形近似が成立し, 点 A, B, O および D で解を解析接続することにより解の一般形が得られる. この場合, 浮上物体の解は本来上記の A, B, O および D で次の系に切り変わるわけであるが, 本報の場合は非定常であるので, このときの時間をあらかじめ求めておくことは手間のかかることである. そこで本報では時間軸を小さくきざみ, 各時刻における変位を計算し, それにより浮上体がどの領域にあるかを判定しながら順次次の応答を計算し, 全体の時刻歴応答を決定する. このとき浮上体は上記五つの部分線形系のどこかに位置しており, 同じ部分線形系にあれば $j-1$ の系と j の系は等しい. しかし $j-1$ と j が二つの部分線形系にまたがる場合は, $j-1$ のばね定数と j のばね定数は異なる. いま $j-1$ から j に移り変わる瞬間の時刻を $t = t_j (\gamma = \gamma_j)$ とすれば, $j-1$ の系の変位, 速度と j の系の変位, 速度は時刻 $t_j (\gamma = \gamma_j)$ において等しくなければならない. したがって添字 $j-1, j$ を付すと, 解析接続の条件式は

$$(x_{j-1})_{\gamma=\gamma_j} = (x_j)_{\gamma=\gamma_j}, \quad (v_{j-1})_{\gamma=\gamma_j} = (v_j)_{\gamma=\gamma_j} \tag{11}$$

式(7), (9)を式(11)に代入すると, 定数 C_j, D_j が決定される. すなわち

$$\begin{aligned}
C_j &= [E \{ -\zeta_j \sin(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) + \sqrt{1 - \zeta_j^2} \cos(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) \} - F \sin(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j)] / \Delta \\
D_j &= [F \cos(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) + E \{ \zeta_j \cos(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) + \sqrt{1 - \zeta_j^2} \sin(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) \}] / \Delta \tag{12}
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\Delta &= \cos(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) \{ -\zeta_j \sin(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) + \sqrt{1 - \zeta_j^2} \cos(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) \} \\
&+ \sin(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) \{ \zeta_j \cos(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) + \sqrt{1 - \zeta_j^2} \sin(\Lambda_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \gamma_j) \} \\
E &= (\varepsilon_j / \varepsilon_{j-1}) \exp \{ (\Lambda_j \zeta_j - \Lambda_{j-1} \zeta_{j-1}) \gamma_j \} \{ C_{j-1} \cos(\Lambda_{j-1} \sqrt{1 - \zeta_{j-1}^2} \gamma_j) + D_{j-1} \sin(\Lambda_{j-1} \sqrt{1 - \zeta_{j-1}^2} \gamma_j) \} \\
&+ \exp(\Lambda_j \zeta_j \gamma_j) \sum_{m=0}^{\infty} \{ (\varepsilon_j / \varepsilon_{j-1}) (X_{m,j-1} + X'_{m,j-1}) - (X_{m,j} + X'_{m,j}) \} \\
F &= \sqrt{\varepsilon_j / \varepsilon_{j-1}} \exp \{ (\Lambda_j \zeta_j - \Lambda_{j-1} \zeta_{j-1}) \gamma_j \} [-\{ \zeta_{j-1} \cos(\Lambda_{j-1} \sqrt{1 - \zeta_{j-1}^2} \gamma_j) + \sqrt{1 - \zeta_{j-1}^2} \sin(\Lambda_{j-1} \sqrt{1 - \zeta_{j-1}^2} \gamma_j) \} C_{j-1} \\
&+ \{ -\zeta_{j-1} \sin(\Lambda_{j-1} \sqrt{1 - \zeta_{j-1}^2} \gamma_j) + \sqrt{1 - \zeta_{j-1}^2} \cos(\Lambda_{j-1} \sqrt{1 - \zeta_{j-1}^2} \gamma_j) \} D_{j-1}] \\
&+ \exp(\Lambda_j \zeta_j \gamma_j) \sum_{m=0}^{\infty} \{ \sqrt{\varepsilon_j / \varepsilon_{j-1}} (V_{m,j-1} + V'_{m,j-1}) - (V_{m,j} + V'_{m,j}) \} \tag{13}
\end{aligned}$$

上式で $\gamma=0(t=0)$ においては C_j, D_j は零となるので, 時間を小さくきざみ, 得られた変位がばねのどの系に属するかを判定しながら C_{j-1}, D_{j-1} を求め, その値を次の C_j, D_j に代入することにより, 順次係数が決定され, 式(7)より時刻歴応答が求められる.

以上の解析は浮上体に作用する荷重が任意動荷重としているが, 荷重そのものは浮上体の変位に依存しないとし

図 2 磁気ばね特性

ている。しかし電磁力等のように荷重が浮上体変位の関数となる場合も実際にはしばしば見受けられるところである。このような場合は、まず原点を基線とした荷重 $P(t)$ による解〔式(7)〕を第一近似解とし、求められた変位を荷重 $P(x, t)$ に代入し、式(7)より第二近似解を求める。次に第二近似解から順次第3次、第4次、…と解が収束するまで計算を進めると、実用上必要な精度の結果が得られる(数値計算例参照)。

3. 数値計算例および実験

本報では、理論解と実験結果を比較照合することにより、本解の妥当性を検証することを目的の一つとしているので、数値計算に用いる諸量は試作した実験装置(図3参照)に基づいて決定した。

3.1 反発力特性の実測 可動質量に静的な荷重 F を作用させた場合の荷重と変位 x の関係を実測したところ図2中の○印で示すデータを得た。これより反発力(復元力)はいわゆる漸硬ばね特性を有することがわかる。計算に際しては、図中のO, A, B, C, DおよびEの各点によって五つの断片に分割し、それぞれの区間では線形のばね特性を有するものと考え、図中の実線で示すようなばね特性を仮定した。各区間のばね定数は次に示すとおりである。

O-A 間	$k_0=1.96$ (N/cm)
A-B 間	$k_1=2.62$ (N/cm)
B-C 間	$k_2=3.14$ (N/cm)
O-D 間	$k'_1=1.67$ (N/cm)
D-E 間	$k'_2=0.98$ (N/cm)

なお図中の破線は、比較のために全体を単一の線形ばねと考えたばね特性(ばね定数 $k=1.96$ N/cm)であ

図 3 実験装置概略図

 図 4 電磁石の吸引力の係数 ν と空げき D の関係

る。

3.2 粘性減衰係数の測定 等価粘性減衰係数は可動質量を自由振動させ、その振動波形より対数減衰率を求めて決定した。得られた粘性減衰係数の値は $c=5.527 \times 10^{-3}$ (N·s/cm) である。

3.3 電磁石の吸引力特性 本報で試作した装置では図3に示すように、電磁石に種々の時間関数で表される電流を流し、その吸引力で可動磁石と連動する鉄片を吸引することにより、可動部に動荷重を作用させる方法を用いている。この場合、一般に電磁石の吸引力 P (N) は次式で求められることが知られている。

$$P = \frac{1}{2} N^2 I^2 \frac{\mu S}{D^2} \dots\dots\dots (14)$$

ここに N は電磁石のコイルの巻数(回)、 I は電流(A)、 μ は空気の透磁率($4\pi \times 10^{-7}$ Wb/AT·m)、 S は磁極断面積であり、 D は空げきの長さ〔磁石と吸引鉄板の間の距離(m)〕である。しかし実際には漏れ磁束、吸引鉄片の飽和などの影響により、空げきの変化に対して上式は厳密には成立しないことがわかった。そこで空げき D の値によって決定される係数 ν を仮定し、これを考慮に入れた次式により吸引力を求めることにした。すなわち、

$$P = \frac{1}{2} N^2 I^2 \frac{\mu S}{D^2} \nu \dots\dots\dots (15)$$

なお ν の値は実測の結果図4の○印で示す値が得ら

れた。これをもとに ν を $D(m)$ の2次関数と仮定し、次式の実験式を用いることとした。

$$\nu = -12.090D^2 + 326.2D - 0.329 \dots \dots \dots (16)$$

この場合、上式によって得られる理論的な ν の値は図4の実線で示されるようなもので、実験値をほぼ正確に近似しているといえる。もちろん式(16)は本実験にのみ適用できる実験式で、他の場合はその係数が異なるものと思われる。したがって ν については各場合について実験的に決定する必要がある。

3・4 逐次近似法 任意動荷重 $P'(x, t)$ は電流 $I(t)$ から式(15)を用いて求められることは前述のとおりであるが、可動部に振動変位が生ずると、式(15)中の D が時間とともに変化することになる。この影響を考慮して次に示す繰返し計算による逐次近似法を用いて応答を決定する。まず静止状態における空げきの長さ D_0 を用いて電流 $I(t)$ による動荷重 $P(t) [= P'(0, t)]$ を求め、これによる変位 $x(t)$ を計算する。次に $D = D_0 - x(t)$ とおいて再び $P'(x, t)$ および $x(t)$ を求める。この計算を繰返しすることにより、逐次真の値に収束する。なお本実験では2回の繰返し、すなわち3回の計算によってほぼ収束することが確かめられたので、以下の計算はすべて3回までの繰返しとした。

3・5 数値計算結果ならびに実験結果 本報で用いた実験装置の概要は図3に示されるようなもので、マイクロコンピュータ(Z-80 CPU)で任意電流波形を作り、D/Aコンバータより出力される電流をパワーアンプで増幅し、その出力を外部抵抗 R を介して電磁石に印加し、その吸引力により可動磁石と連動する鉄板を吸引する。可動部の変位は摺動棒の上部に取付けたアルミ板の変位を非接触変位計によって検出し、ペン書きオシロに記録した。同時に外部抵抗 R の両端の電圧をペン書きオシロに記録し、その値と抵抗値から電磁石に流れる電流を算出した。この場合、実験装置の諸元は表1に示すとおりであり、式(7)、(8)の代表荷重および基準ばね定数はどのような値を用いても良いが、ここでは便宜上 $P_0=1(N)$ 、 $k_0=1.96(N/cm)$ (図2のDA間のばね定数)にとり、サンプル時間 T_0 は図5～図11の理論曲線の時間軸の長さとした。数値計算および実験に際して、任意時間関数として、半周期正弦波、台形波および三角波の三種の入力波形

表 1 実験装置の諸元

可動部の重量	w	4.606	(N)
電磁石のコイルの巻き数	N	380	(回)
電磁石の磁極断面積	S	3.142×10^{-4}	(m^2)
空気の透磁率	μ	$4\pi \times 10^{-7}$	(Wb/ATm)

を仮定し、それぞれの周期を変化させて応答を調べてみた。以下これら三種の場合の数値計算結果ならびに実験結果を合わせて示す。

図5は最大電流0.984(A)、半周期0.38(s)となる半周期正弦波電流を電磁石に入力した場合の応答である。図5(a)の実線は数値計算により求められた応答振幅を時間を横軸にとって示す。図5(b)は実験によりペン書きオシロに記録された入力電流と応答振幅である。また図5(a)中の破線は線形理論、すなわち図2の破線で示した線形ばね特性を用い、繰返し計算による入力振幅の修正も行わない場合に得られる理論応答曲線である。これよりこの種の問題を線形問題として取扱うと、かなりの誤差が生じることがわかる。しかし復元力の非線形性を考慮し、非線形非定常入力とした本解の結果(図5の実線)は最大振幅、周期ともにほぼ実験値と一致している。一方減衰特性は理論値がかなり小さい。この原因の一つとして、実験装置のスライド部のクーロン摩擦減衰を等価粘性減衰におきかえたことがまず考えられる。さらに数値計算で与えた等価粘性減衰係数($C=5.527 \times 10^{-3} N \cdot s/cm$)は、電磁石作動前の系の自由振動波形より得られたものであるが、本実験では変化の激しい電流を電磁石のコイルに流しているため、磁石の運動と相まって磁束が変化し、相当大きな磁気減衰が新たに作用したものと思われる。

図 5 半周期正弦入力による応答
半周期: 0.38 (s), —: Nonlinear, $C=5.527 \times 10^{-3} (N \cdot s/cm)$
-----: Nonlinear, $C=1.965 \times 10^{-2} (N \cdot s/cm)$
.....: Linear, $C=5.527 \times 10^{-3} (N \cdot s/cm)$

る⁽¹⁶⁾。そこでこれらのことを考慮し、等価粘性減衰係数を $C=1.965 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$ と補正してみると、図中の一点鎖線の応答が得られた。この場合は理論値と実験値はかなりよく一致している。したがって以下の計算では本解の非線形理論を用い、上記二つの減衰係数についての結果を示し、実験値との比較検討を行う。図6は最大電流0.984(A)、半周期0.75(s)の半周期正弦波電流を電磁石に印加した場合の応答である。この場合も実線と一点鎖線はそれぞれ図5の場合と同様に求められたものである。また図7は最大電流

図6 半周期正弦波入力による応答
半周期: 0.75 (s), —: $C=5.527 \times 10^{-3} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$
— —: $C=1.965 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$

図8 台形波入力による応答
半周期: 0.38 (s), —: $C=5.527 \times 10^{-3} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$
— —: $C=1.965 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$

1.281 (A)、半周期0.19 (s) の半周期正弦波電流による応答を示し、図8および図9は、それぞれ半周期0.38 (s) および0.19 (s) の台形波電流に対する応答である。電流の最大値はいずれも1.0 (A) である。一方図10および図11は、それぞれ周期0.38 (s)、0.19 (s) の三角波電流に対する応答を同様に示したものである。この場合、最大電流は1.133 (A) であ

図7 半周期正弦波入力による応答
半周期: 0.19 (s), —: $C=5.527 \times 10^{-3} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$
— —: $C=1.965 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$

図9 台形波入力による応答
半周期: 0.19 (s), —: $C=5.527 \times 10^{-3} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$
— —: $C=1.965 \times 10^{-2} (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm})$

図 10 三角波入力による応答
半周期: 0.38 (s), —: $C=5.527 \times 10^{-3}$ (N·s/cm)
----: $C=1.965 \times 10^{-2}$ (N·s/cm)

る。これらの結果より、いずれの場合も応答の初期の振幅の極大値および応答の周期について、理論値（実線）と実験値はよく一致することが認められる。一方減衰特性については、電磁石による磁気減衰力の影響がかなり大きく、これを考慮しない計算値（実線）は実験値とかなり異なる。しかしこの影響を考慮した計算値（一点鎖線）は実験値とほぼ一致している。

以上より系の減衰を正しく評価すれば、本理論は変位に従属する任意動荷重、例えば衝撃電磁力を受ける磁気浮上系の問題の解析に十分適用できることが明らかにされたものと思われる。

4. 結 言

振動体の変位に依存し、かつ任意時間関数で与えられる動荷重を受ける磁気浮上体の非線形非定常応答問題に関して磁気反発力の非線形性および非対称性を考慮して理論的に解析した。さらに実験をも行い、両結果の比較照合により本解の妥当性を検討した。その結果を要約すると以下のとおりである。

(1) 本解法により得られた応答は、減衰の評価を正しく行えば、振動数、振幅ともに実験値とほぼ一致することが確認された。また同一周期の入力電流の場合、その波形の違いが応答に及ぼす影響についても、

(a) Theory

(b) Experiment

図 11 三角波入力による応答
半周期: 0.19 (s), —: $C=5.527 \times 10^{-3}$ (N·s/cm)
----: $C=1.965 \times 10^{-2}$ (N·s/cm)

理論値と実験値に同様の傾向が確認された。

(2) この種の系では強度の非線形性と非対称性を有するため、簡便な線形理論によってその現象を正しく解明できないことが明らかにされた。

(3) 衝撃電磁力を受ける場合、電磁石が磁気浮上系から相当離れていない限り、それにより新たに発生する磁気減衰力の影響を無視できないことがわかった。

文 献

- (1) 山村・伊藤, 電気学会論文誌, B, 95-4 (昭50), 209.
- (2) 清水・谷口, 機械の研究, 22-12 (昭45), 1620.
- (3) 清水・谷口, 機論, 36-290 (昭45), 1656.
- (4) 狼, 高精度, 9-1 (昭54), 23.
- (5) 倉掛・原, 機論, 45-399, C(昭54), 1217.
- (6) 倉掛・ほか2名, 機論, 46-411, C (昭55), 1376.
- (7) 山川・ほか2名, 機論, 42-364 (昭51), 3815.
- (8) 小島, 精密機械, 44-5 (昭53), 609.
- (9) 小島・山川, 精密機械, 45-3 (昭54), 305.
- (10) 小島・山川, 精密機械, 47-5 (昭56), 568.
- (11) 小島・ほか3名, 精密機械, 48-7 (昭57), 853.
- (12) 吉沢・ほか2名, 機論, 51-465, C (昭60), 904.
- (13) Nagaya, K., ASCE J. Waterway, Port, Coastal & Ocean Eng., 111-2 (1985), 337.
- (14) Nagaya, K., J. Sound Vib., 99-3 (1985), 361.
- (15) Nagaya, K. and Hai, Y., J. Sound Vib., 103-1 (1985), 119.
- (16) Nagaya, K., ほか3名, IEEE Trans. on Magnetics, MAG-20, No. 6 (1984), 2136.

討 論

〔質問〕 吉沢正紹・藪野浩司

〔慶応義塾大学理工学部〕

(1) 減衰の影響を、式(1)で $C(dx/dx)$ と置く代わりに、 $C(dx/dt|dx/dt|)$ あるいは $\pm F$ (クーロン摩擦) と置き、これを式(1)の右辺つまり外力項として取扱うことは可能か。

(2) 変位計算を行う場合の時間刻みと、系が $j-1$ から j に移り変わる時刻 t_j を求める場合の時間きざみは、同程度でよいのか。

(3) 「近似解の妥当性の検討」とは、解法上の近似の検討なのか、それとも式(1)が実験事実をどの程度説明しうるかを検討したものなのか。

〔回答〕 (1) ご指摘の問題も速度二乗形の減衰力、摩擦力などを断片線形に近似すれば、原理的には本報と同様にして取扱えるものと考えられる。

(2) 本報では非線形復元力を断片線形に近似して変位を正確に求め、物体がどの位置にあるかを時間刻みを小さくして探索する方法をとっている。したがって変位計算と t_j を求める計算を同時に行っているので、時間刻みは同じにしてある。もちろんご指摘のようにあらかじめ t_j を求めて変位計算を行う場合は、変位計算の刻みをかなり粗くすることができると思われる。

(3) 本報の場合は復元力と外力の両方に非線形性を有する系のため、厳密解を得ることは一般に困難である。本手法はこの種の非線形系の一般解法でもないのに、解法上ならびにモデル化の両方の妥当性を検証する必要がある。しかしこれらを理論的に検討することは上記のような理由から困難だったので、実験により確認した。

〔質問〕 本江 明 [(株)東芝総合研究所]

(1) 粘性減衰係数の値 C に振幅依存性はなかつ

たか。

(2) 式(14)の補正を式(15)でなされているが、すべて静的実験である。動的实验による補正の必要性はないか。

(3) 1722 ページで「時間軸を小さく刻み……」とあるが、 $(j-1)$ から j に移り変わる瞬間の時刻は、線形補間をされているか。また時間刻みはどれくらいか。

〔回答〕 (1) 一般に磁気減衰力は振幅が小さく、かつ磁束が一定の場合はほぼ一定とみなすことができる。しかし本報のように外力として新たに加わる電磁力が相当大きく、それが時間、振幅とともに変化する場合はご指摘のように減衰係数 C にも振幅依存性があるものと考えられる。ただこれを理論的あるいは実験的に決定することが困難だったので、 C を一定と仮定して計算した。もちろん理論式のなかに C の変化を取り込むことは容易で、ばねと同様にして C を断片線形近似し、逐時 C を変化させることにより、本報の結果よりただちに C の非線形性を含む数値結果を得ることができる。

(2) ご指摘のように質点の動きが速くなると、逆起電力などによる磁束変化が起こり、本報の吸引力の実験式の誤差は大きくなるものと思われる。しかし本報の数値例で取扱った程度の速度の範囲では静的実験でも実用上の精度は得られるものと考えられる。

(3) 本報では $j-1$ の終値と j の始値を解析接続しており、解は連続的に変わるように解析されているが、ただばね定数に振幅依存性があるので、振幅を常時監視し、それに相当するばね定数を選ぶようにした。したがって時間に関する線形補間は行っていないが、振幅を監視するための時間刻みについては、変位の波形に応じてサンプル時間を 100~300 分割したものとした。