非白色性励振を受ける非線形系の応答に対する 初通過確率および閾値通過回数の確率分布*

矢ヶ崎 一幸*¹, 木村 康 治*², 坂 田 勝*²

First Passage Probability and Probability Distribution of Level Crossings for A Nonlinear System to Nonwhite Excitation

Kazuyuki YAGASAKI, Koji KIMURA, Masaru SAKATA

The level crossing problem is discussed for a multi-dimensional nonlinear system subjected to an amplitude modulated nonwhite random excitation. The first passage probability and the probability distribution of the level crossings are approximately represented by a few low order factorial moments of crossings, which are calculated by using the equivalent linearization technique and assuming the Gaussian probability distribution of the response process. The dependence of occurrence of the level crossing upon the number of events is taken into consideration. Numerical results are compared with the corresponding digital simulation results for a single degree of freedom system with bilinear hysteresis excited by noise with an exponentially decaying harmonic correlation function.

Key Words : Theory of Vibration, Random Vibration, Reliability, Level Crossing, First Passage Probability, Nonlinear System, Bilinear Hysteresis, Nonwhite Excitation

1. 緒 言

不規則励振を受ける機械・構造物系の安全性を維持するために、系の応答の初通過確率や閾値通過回数の確率分布を求めるなどして信頼性を定量的に評価することは重要な課題である。また、現実の機械・構造物系は、破壊が起こるような大きな外力が作用するとき、非線形挙動を顕著に示すので、信頼性解析に際して系の非線形性を考慮する必要があると考えられる。

従来の閾値通過問題に関する研究の多くは、白色性励振を受ける線形系を対象とするものであり^{(1)~(5)}、非白色性励振を受ける場合や非線形系の場合を対象とした研究は比較的少ない。白色性入力を受ける非線形系に対して、Roberts は、応答のエネルギー包絡のマルコフ性に着目し、対応する拡散方程式をランダム・ウォーク・モデルにより数値解析して初通過確率を求める方法を提案した⁽⁶⁾⁽⁷⁾。最近、この手法は、拡散方程式を有限要素近似で数値解析する方法⁽⁸⁾に改善さ

れている。また、応答の確率密度を部分的正規密度関数で近似し、閾値通過の独立性に基づくポアソン近似手法を用いて初通過確率が求められている⁽⁹⁾。一方、地震動などの現実の外部入力のように時間相関を有する非白色性入力を受ける非線形系に対しては、応答のガウス性を仮定し、ポアソン近似手法により初通過確率が求められている⁽¹⁰⁾程度である。

著者らは、既報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾において、閾値通過回数の階乗モーメントを用いて初通過確率および閾値通過の確率分布を近似的に求める手法を提案し、白色性励振および非白色性励振を受ける線形系の応答に適用して、その有効性を明らかにした。本手法の特徴は、閾値通過の独立性や応答のマルコフ性を仮定していない点にある。

そこで、本論文では、既報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾の解析手法を、振幅変調非白色性励振を受ける多次元の非線形系の応答の場合に、等価線形化法⁽¹³⁾を援用することによって拡張・適用し、初通過確率および閾値通過回数の確率分布を求める。具体的な計算例として、双線形ヒステリシス特性を有する1自由度系を取りあげ、計算結果をデジタル・シミュレーションの結果と比較・検討して、本手法の有効性を明らかにする。

* 昭和62年8月20日 第65期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和62年1月30日。

*¹ 正員、東京工業大学大学院 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

*² 正員、東京工業大学工学部。

2. 解析モデル

次の微分方程式によって支配される k 次元非線形系を考える。

$$\dot{y} = g(y) + f(t) \quad (1)$$

ここで、 $\dot{\cdot}$ は時間 t に関する微分を表す。 y は k 次元状態変数、 $g(y)$ は k 次元非線形関数ベクトルで、簡単のため、次のような対称性を有するものを考える。

$$g(-y) = -g(y) \quad (2)$$

初期時刻 $t = 0$ で系は静止しているものとする。また、 $f(t)$ は k 次元不規則励振力ベクトルで、次のように表されるものと仮定する。

$$f(t) = D(t) \cdot n(t) \quad (3)$$

$$E[n(t)] = 0, E[n(t) \cdot n^T(t+\tau)] = R(\tau) \quad (4)$$

ここで、 $D(t)$ は $k \times m$ 次元確定包絡関数行列、 $n(t)$ は平均値ゼロ、自己相関関数行列 $R(\tau)$ をもつ m 次元ガウス性定常雑音ベクトルである。 T は転置演算を表す。

入力 $f(t)$ の平均値がゼロであるから、系の対称性より、応答 $y(t)$ の平均値もゼロとなる。

$$E[y(t)] = 0 \quad (5)$$

本報告では、文献(12)と同様に、応答 $y(t)$ の1つの成分 $x(t)$ に関する初通過確率および閾値通過回数の確率分布を求める。閾値レベルの形としては、片側および両側の閾値レベルの場合を考える(図1を参照)。

1) 片側閾値レベル

$$x = u (> 0) \quad (6a)$$

2) 両側閾値レベル

$$x = u \quad (6b)$$

応答 $x(t)$ が区間 $(0, T]$ で閾値を安全側から危険側へ通過する回数を $N(T)$ によって表す。たとえば、図1に示す応答 $x(t)$ の場合、片側閾値レベル(式(6a))に対しては $N(T) = 2$ 、両側閾値レベル(式(6b))に対しては $N(T) = 3$ となる。

確率変数 $N(T)$ の確率関数を

$$P_n(T) = P\{N(T) = n\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

とおく。また、過程 $x(t)$ の初通過確率を $P_f(T)$ とする。片側閾値レベルに対しては、

$$P_f(T) = P\left\{\max_{0 \leq t \leq T} x(t) \geq u\right\} \quad (8a)$$

両側閾値レベルに対しては、

$$P_f(T) = P\left\{\max_{0 \leq t \leq T} |x(t)| \geq u\right\} \quad (8b)$$

となる。

3. 解析

既報⁽¹¹⁾で提案した近似手法を用いて初通過確率お

び閾値通過回数の確率分布を求める際、応答 $x(t)$ およびその導関数 $\dot{x}(t)$ の有限次元の確率密度関数が必要となる。しかし、非白色性励振を受ける非線形系に対して、応答の確率密度関数を求めることは非常に困難である。そこで、本論文では、等価線形化法を用いて応答の自己相関関数を算定し、 $x(t)$ および $\dot{x}(t)$ の有限次元の確率密度を正規密度関数として近似的に求める。

3.1 等価線形化法 式(1)に等価線形化⁽¹³⁾を施すと、次式が得られる。

$$\dot{y} = A_e(t) y + f(t) \quad (9)$$

ここで、 $A_e(t)$ は等価線形係数行列であり、式(1)と式(9)のあいだの自乗平均誤差を最小にするように定められる。

$$E\{[g(y) - A_e(t) y]^T [g(y) - A_e(t) y]\} : \text{minimum} \quad (10)$$

式(10)より、次式が得られる。

$$A_e(t) = E[g(y(t)) y^T(t)] \{E[y(t) y^T(t)]\}^{-1} \quad (11)$$

系の非線形性は小さいものとして、応答のガウス性を仮定すると、等価線形係数行列 $A_e(t)$ は応答の2次モーメントのみの関数として求めることができる。

3.2 自己相関関数行列を支配する方程式 文献(12)と同様にして、 $y(t)$ の自己相関関数行列 $\Phi(t, \tau) = E[y(t) y^T(\tau)]$ を支配する微分方程式が次のように求められる。

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = A_e(t) \Phi(t, \tau) + \Psi(t, \tau) \quad (12)$$

ここで、 $\Psi(t, \tau)$ は外力と応答の相互相関を表し、

$$\Psi(t, \tau) = E[f(t) y^T(\tau)] \quad (13)$$

である。

式(12)をルンゲ・クッタ・ジル法などの数値解析法を用いて解くことにより、系の応答の自己相関関数が求められる。さらに、応答のガウス性の仮定により、 $y(t)$ の有限次元の確率密度関数が得られる。

3.3 外力と応答の相互相関 式(12)の非斉次項となっている外力と応答の相互相関 $\Psi(t, \tau)$ は、文献(14)～(16)と同様な方法によって、以下のように評価することができる。

経過時間に対して、等間隔の時間列 $t_0, t_1, t_2, \dots$

図1 閾値通過レベル

・をとり、等価線形係数 $A_e(t)$ が各時間区間で次のように一定値をとるものと仮定する。

$$A_e(t) = A_{ei} = A_e(t_{i-1}), \quad t \in [t_{i-1}, t_i] \quad (14)$$

式(9)より、着目時刻 $t = t_n$ における応答 $y(t_n)$ は、初期条件 $y(t_0)$ が与えられると、次の漸化式によって求められる。

$$y(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} H_i(t_i - \nu) f(\nu) d\nu + H_i(\Delta t) y(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

ここで、 $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ である。また、 $H_i(t)$ は区間 $[t_{i-1}, t_i]$ における系(9)の衝撃応答関数行列で、 $H_i(t) = \exp(A_{ei} t)$ で与えられ、行列 A_{ei} の固有値がすべて単根である場合は次式のように表される(17)。

$$H_i(t) = \sum_{s=1}^{k_{ci}} (E_i^{(s)} \cos \eta_i^{(s)} t + F_i^{(s)} \sin \eta_i^{(s)} t) e^{-\xi_i^{(s)} t} + \sum_{s=1}^{k_{ri}} G_i^{(s)} e^{-\kappa_i^{(s)} t} \quad (16)$$

ここで、 $-\xi_i^{(s)} \pm j \eta_i^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, k_{ci}$)、 $-\kappa_i^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, k_{ri}$) は行列 A_{ei} の固有値； $E_i^{(s)}$ 、 $F_i^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, k_{ci}$)、 $G_i^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, k_{ri}$) は k 次正定数行列； $2k_{ci}$ 、 k_{ri} は行列 A_{ei} の複素固有値および実固有値の個数； j は虚数単位である。

式(15)の両辺の転置をとり、左から $f(t)$ を乗じて期待値をとることにより、次式が得られる。

$$\Psi(t, t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} E[f(t) f^T(\nu)] H_i^T(t_i - \nu) d\nu + \Psi(t, t_{i-1}) H_i^T(\Delta t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

さらに、式(3)および式(16)を式(17)に代入することにより、外力と応答の相関 $\Psi(t, t_n)$ を算定するための漸化式が得られる。

$$\Psi(t, t_i) = \sum_{s=1}^{k_c} \left\{ C_{1,i}^{(s)}(t) E_i^{(s)T} + C_{2,i}^{(s)}(t) F_i^{(s)T} \right\} + \sum_{s=1}^{k_r} C_{3,i}^{(s)}(t) G_i^{(s)T} + \Psi(t, t_{i-1}) H_i^T(\Delta t) \quad (18)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} C_{1,i}^{(s)}(t) &= D(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t-\nu) D^T(\nu) e^{-\xi_i^{(s)}(t_i-\nu)} \cos \eta_i^{(s)}(t_i-\nu) d\nu \\ C_{2,i}^{(s)}(t) &= D(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t-\nu) D^T(\nu) e^{-\xi_i^{(s)}(t_i-\nu)} \sin \eta_i^{(s)}(t_i-\nu) d\nu \\ C_{3,i}^{(s)}(t) &= D(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t-\nu) D^T(\nu) e^{-\kappa_i^{(s)}(t_i-\nu)} d\nu \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

3.4 閾値通過回数の階乗モーメント 閾値通過回数 $N(t)$ の k 次階乗モーメント

$$M_k(t) = E\{N(t)(N(t)-1)\cdots(N(t)-k+1)\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

は、次式によって与えられる(12)(18)。

$$M_k(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t \bar{\nu}_k(t_1, \dots, t_k) dt_1 \cdots dt_k \quad (21)$$

$\{t_i \neq t_j, i \neq j\}$

ここで、 $\bar{\nu}_k(t_1, \dots, t_k) dt_1 \cdots dt_k$ は時間区間 $(t_1, t_1 + dt_1], \dots, (t_k, t_k + dt_k]$ で閾値通過が起こる確率を表し、応答 $x(t)$ と $\dot{x}(t)$ の k 次元結合確率密度関数 $p_{\dot{x}x,k}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k)$ によって求めることができる。たとえば、片側の閾値レベルに対しては、

$$\bar{\nu}_k(t_1, \dots, t_k) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty y_1 \cdots y_k p_{\dot{x}x,k}(u, \dots, u; y_1, \dots, y_k) dy_1 \cdots dy_k \quad (22)$$

応答 $x(t)$ がガウス性を有する場合、2次までの階乗モーメントの具体的な計算方法が、文献(12)で述べられている。

3.5 初通過確率および閾値通過回数の確率分布(11)(12) 閾値通過回数 $N(t)$ を時間に関して一様でない純出生過程によってモデル化する。すなわち、微小区間 $(t, t + \Delta t]$ において、以下のことを仮定する。

- (i) 2回以上の通過が起こる確率は Δt よりも高次の微小量である

(ii) 区間 $(0, t]$ で n 回の閾値通過が起こっているという条件のもとで通過が起こる確率は $\lambda_n(t) \Delta t + o(\Delta t)$ である

関数 $\lambda_n(t)$ を厳密に求めることは非常に困難なので、さらに次のことを仮定する。

(iii) $n_0 + 1$ 回以上の閾値通過は独立に起こる。すなわち、 $n \geq n_0$ に対して、

$\lambda_n(t) = \lambda(t)$, $n \geq n_0$ (23)

これらの仮定のもとで、 $N(t)$ の確率関数 $P_n(t)$ は $n_0 + 1$ 次以下の階乗モーメントを用いて表すことができる。 $n_0 = 0$ の場合、この近似手法はポアソンの仮定に基づく計算方法に一致する。

3 次以上の階乗モーメントを計算するためには膨大な計算時間を必要とするので、4 章で示す計算例では、 $n_0 = 1$ とする。この仮定は、閾値通過を「未通過」と「既通過」に分けて考えることを意味する。以下に、 $n_0 = 1$ とした場合の結果を与える。

$$P_n(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\Lambda(t)} \psi_1^{(0)}(t) & ; n=0 \\ \frac{1}{\Lambda(t)} \{ \psi_1^{(n-1)}(t) - \psi_1^{(n)}(t) \} & ; n \geq 1 \end{cases} \quad (24)$$

ここで、

$$\Lambda(t) = \exp \left\{ \int_0^t \lambda(s) ds \right\}, \quad \lambda(t) = \frac{\dot{M}_2(t)}{2M_1(t)}$$

$$\psi_1^{(k)}(t) = \begin{cases} \int_0^t \dot{M}_1(s) \Lambda(s) ds & ; k=0 \\ \int_0^t \int_0^{s_k} \dots \int_0^{s_1} \lambda(s_1) \dots \lambda(s_k) \\ \times \dot{M}_1(s) \Lambda(s) ds ds_1 \dots ds_k; k > 0 \end{cases} \quad (25)$$

また、初通過確率 $P_f(t)$ は、 $x(t)$ が時刻 t までに少なくとも 1 度通過する確率に等しいから、

$$P_f(t) = 1 - P_0(t) = \frac{1}{\Lambda(t)} \psi_1^{(0)}(t) \quad (26)$$

となる。

4. 計算例

具体的な計算例として、次の双線形ヒステリシス特性を有する 1 自由度系を考える (15)。

$$\ddot{x} + 2\zeta \dot{x} + g(x) = f(t) \quad (27)$$

ここで、 t は対応する線形系の固有振動数で無次元化された時間、 ζ は減衰比を表す。 $g(x)$ は図 2 に示すような降伏点変位が 1 の双線形ヒステリシス特性で、弾性域では傾き 1 の、塑性域では傾き $1 - \varepsilon$ の直線によって表される。 ε は系の非線形性を表すパラメータ

である。また、 $f(t)$ は不規則励振力で、式 (2) のように、ガウス性定常雑音 $n(t)$ が確定包絡関数 $e(t)$ によって振幅変調される形の非定常入力を仮定する。

$$f(t) = e(t)n(t) \quad (28)$$

確定包絡関数 $e(t)$ として、単位ステップ関数と次に示す形の指数関数を考える。

$$e(t) = U(t) \quad (29a)$$

$$e(t) = (e^{-at} - e^{-bt})/M,$$

$$M = \max(e^{-at} - e^{-bt}) \quad (29b)$$

また、入力雑音 $n(t)$ としては、次の自己相関関数を有する非白色性雑音の場合を考える。

$$R(v) = R_0 e^{-\alpha|v|} \cos \rho v \quad (30)$$

以下では、変位 $x(t)$ が系の安全性を決定すると考えて、変位応答の閾値通過に関する統計量を求める。

入力があり大きくなく、降伏がそれほど頻繁に起こらないと仮定すると、式 (27) に対する近似的な運動方程式が次のように得られる (15)。

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -(1-\varepsilon)y_1 - 2\zeta y_2 - \varepsilon \phi(y_3) + f(t) \\ \dot{y}_3 = \hat{q}(y_2, y_3) \end{cases} \quad (31)$$

ここで、 $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ であり、状態変数 y_3 , 非線形関数 $\phi(y_3)$, $\hat{q}(y_2, y_3)$ が系のヒステリシス特性を近似的に表現する。 $\phi(y_3)$ と $\hat{q}(y_2, y_3)$ の関数形は文献 (15) で与えられている。

状態変数を $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ とベクトル表示し、 $f(t) = (0, f(t), 0)^T$,

$$g(y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -(1-\varepsilon)y_1 - 2\zeta y_2 - \varepsilon \phi(y_3) \\ \hat{q}(y_2, y_3) \end{bmatrix} \quad (32)$$

とおくことにより、式 (31) は式 (1) の形に書くことができる。このようにして得られた近似方程式に対して 3 章で述べた解析手法を適用する。

式 (3), (4) の $D(t)$, $R(v)$ は、

図 2 双線形ヒステリシス特性

$$D(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

等価線形係数行列 $A_e(t)$ は次式で与えられる (15) .

$$A_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(1-\varepsilon) & -2\zeta & -\varepsilon\alpha_e(t) \\ 0 & \beta_e(t) & \gamma_e(t) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここで, $\alpha_e(t), \beta_e(t), \gamma_e(t)$ は, 応答の 2 次モーメントの関数として表される.

各区間 $[t_{i-1}, t_i)$ における衝撃応答関数行列 $H_i(t)$ は, 次式のように表される.

$$H_i(t) = (E_i \cos \eta_i t + F_i \sin \eta_i t) e^{-\xi_i t} + G_i e^{-\kappa_i t} \quad \dots\dots\dots (35)$$

式(18)に対応する外力と応答の相互相関を算定するための漸化式は次のようになる.

$$\Psi(t, t_i) = C_{1,i}(t) E_i^T + C_{2,i}(t) F_i^T + C_{3,i}(t) G_i^T + \Psi(t, t_{i-1}) H_i^T(\Delta t) \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここで,

$$C_{k,i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{k,i}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, k=1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{1,i}(t) &= e(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t-v) e(v) e^{-\xi_i(t_i-v)} \cos \eta_i(t-v) dv \\ C_{2,i}(t) &= e(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t-v) e(v) e^{-\xi_i(t_i-v)} \sin \eta_i(t-v) dv \\ C_{3,i}(t) &= e(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} R(t-v) e(v) e^{-\kappa_i(t_i-v)} dv \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

式(29)および式(30)を式(38)に代入することにより, $C_{k,i}(t)$, $k=1, 2, 3$ は解析的に求めることができる.

実際の計算では, $n_0 = 1$ と仮定して, 3章で述べた近似手法を適用する. したがって, 式(24)および(26)を用いて, 初通過確率 $P_f(t)$ および閾値通過回数の確率関数 $P_n(t)$ が求められる

5. 計算結果と考察

得られた結果の比較のために, 非白色性雑音の指数減衰定数 α と卓越振動数 ρ とを, それぞれ, 対応する線形系

図3 指数包絡関数

図4 非白色性雑音のパワースペクトル

図5 変位の自己相関関数 (単位ステップ包絡関数)

の減衰比と減衰固有角振動数 $\sqrt{1-\xi^2}$ で無次元化して表す.

$$A = \alpha/\xi, \quad B = \rho/\sqrt{1-\xi^2} \quad \dots\dots\dots (39)$$

また, 入力雑音の大きさ R_0 を, 単位ステップ包絡関数に対する線形系の変位応答の定常標準偏差 σ_0 を用いて定める. 両者には, 次の関係がある⁽¹⁹⁾.

$$\sigma_0^2 = \frac{R_0}{4} \left\{ \frac{A+B+2}{\xi^2(1+A)^2 + (1-\xi^2)(1+B)^2} + \frac{A-B+2}{\xi^2(1+A)^2 + (1-\xi^2)(1-B)^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (40)$$

以下, $\sigma_0 = 1$ の場合の計算結果を示す. $\sigma_0 = 1$ は, 対応する線形系の定常標準偏差が降伏点変位に等しくなるような入力の大きさを表す.

計算に用いた指数包絡関数の形状を図3に示す. 短時間で最大値に達した後, 緩やかに減衰しながら継続する地震動に対応すると考えられる. 図4に, 計算に用いた入力雑音のパワースペクトルを示す. 図中, $B = 1$ および $B = 2$ は, それぞれ, 入力の卓越振動数が線形系の減衰固有角振動数に等しい場合, および2倍の場合に相当する.

図5に, $B = 1$ の場合の, 単位ステップ包絡関数に対する変位応答の自己相関関数を示す. (a)に $\epsilon = 0.1$ の場合, (b)に $\epsilon = 0.5$ の場合を示す. 実線は本論文の手法による計算結果を, $\circ$ は2500回のシミュレーション⁽¹⁵⁾による結果を表す. 両者は, $\epsilon = 0.1$ の場合にはほぼ完全に一致し, $\epsilon = 0.5$ の場合についても多少の誤差を除いて良く一致している. 図中, 比較のために, 線形系の変位応答の自己相関関数を破線表示してある. また, $B = 2$ および指数包絡関数の場合に対しても, 本手法の計算結果とシミュレーションの結果はよく一致することを確かめており, 本論文の自己相関関数計算法の有効性は明らかである.

図6から図8に, 初通過確率の時間的変化を示す. 図6および図7には, 単位ステップ包絡関数および指数包絡関数に対するヒステリシス系の, 本手法による計算結果と従来の手法による計算結果との比較を, 図8には, 単位ステップ包絡関数に対する, ヒステリシス系と線形系の計算結果の比較を示す. いずれの図においても, (a)および(b)には, それぞれ, $B = 1$ の片側閾値レベルおよび両側閾値レベルの場合を, (c)には $B = 2$ の両方の場合を示す. また, 実線は本論文の手法による計算結果を, $\circ$ はシミュレーションによる結果を表す. 図6および図7では, ポアソン近似手法による結果を破線で, Riceの級数⁽²⁰⁾を等比級数で近似するRobertsの方法⁽¹⁾⁽²¹⁾による結果を一点鎖線で表示してある. 両者の場合とも, 必要となる閾値通過

回数の階乗モーメントは本手法と同じ手順で求めた. また, 図8では, 線形系の本手法による計算結果およびシミュレーションの結果⁽¹²⁾を, それぞれ, 破線および $\triangle$ で表示してある.

図6および図7に着目すると, 本手法による計算結果は, ポアソン近似による結果と比較して, シミュレーションの結果とよく一致しており, 本手法の有効性は明らかである. 特に, ポアソン近似による結果がシミュレーションの結果から大きくずれる $B = 1$ の場合に対しても, 本手法は良好な結果を与えている. また, Robertsの手法に対する本手法の優位性も認められる. 一方, 図8に着目すると, ヒステリシス系の初通過確率は線形系の場合よりも小さくなっている. これは, ヒステリシスによるエネルギー散逸効果のために, ヒステリシス系の応答が線形系の応答よりも小さくなるためと考えられる.

図6から図8にみられる, 本手法の計算結果とシミ

図6 初通過確率(単位ステップ包絡関数)

ュレーションの結果との間の若干の差異の原因として次の2つのことがあげられる。

(1) 既に閾値通過が起こっている場合には、閾値通過は独立に起こる(3・5節の仮定(iii)で $n_0=1$)と仮定したこと

(2) 応答の有限次元の確率密度を、等価線形化法により求めた自己相関関数を用いて正規密度関数で近似したこと

(1)の仮定のもとでも、線形系の場合には、初通過確率を精度良く推定できることが示されている⁽¹²⁾ので、(2)の近似が計算誤差の生じる大きな原因となっているものと考えられる。実際、非線形パラメータ ε が増加するにしたがって、本手法による計算誤差は大きくなる傾向が認められた。さらに精度の高い初通過確率の推定を行うためには、ガウス性を仮定しない応答の確率分布の取扱が必要である。

図9および図10に、それぞれ、 $t=30$ における、両

側閾値レベルの場合の、単位ステップ包絡関数および指数包絡関数に対する閾値通過回数の確率関数を示す。両図とも、(a)に $B=1$ の場合を、(b)に $B=2$ の場合を示す。本手法による計算結果を●で、シミュレーションによる結果を棒グラフで表す。比較のために、ポアソン分布による近似結果を△で表示してある。ただし、必要となる閾値通過回数の平均値はシミュレーションにより求めた。横軸は閾値通過回数 n である。

$B=1$ の場合、本手法の計算結果は、シミュレーションの結果と非常によく一致している。また、閾値通過回数の確率分布はポアソン分布から大きくずれており、このような場合に対しては、たとえ応答の正確な確率密度関数が得られ、閾値通過回数の平均値が厳密に求められたとしても、ポアソン近似手法による解析では十分な信頼性評価を行えないことがわかる。一方、 $B=2$ の場合、閾値通過回数の確率分布はポアソン分布に比較的一致しているにもかかわらず、本手法によ

図7 初通過確率(指数包絡関数)

図8 初通過確率(単位ステップ包絡関数)

図9 閾値通過回数の確率関数(単位ステップ包絡関数)

る結果には多少の誤差がみられる。これは、初通過確率の場合と同様に、応答のガウス近似による閾値通過回数の階乗モーメントの計算誤差が閾値通過回数の確率分布の推定に強く影響するためと考えられる。

6. 結 論

振幅変調非白色性励振を受ける多次元の非線形系の閾値通過問題を取りあげ、初通過確率および閾値通過回数の確率分布を求めるための近似解析手法を明らかにした。

本手法は、系を記述する微分方程式に等価線形化を施し、等価線形系の応答の自己相関関数を求め、応答のガウス性を仮定して、初通過確率および閾値通過回数の確率分布を求めるものである。その際、閾値通過の生起が着目時間までの通過回数に依存することを考慮している点に本手法の特色がある。

具体的な計算例では、双線形ヒステリシス特性を有する1自由度系を取りあげ、入力非白色性雑音として指数減衰調和相関関数を有するものを、確定包絡関数として単位ステップ包絡関数および指数包絡関数を採用した。従来の、応答のガウス性と閾値通過の独立性(ポアソン性)を仮定した手法による結果に比べて、本手法による計算結果がデジタル・シミュレーションの結果によく一致することを示し、本手法の有効性

図10 閾値通過回数の確率関数(指数包絡関数)

を明らかにした。

文 献

- (1) Roberts, J.B., *J. Sound and Vibr.*, **8** (1968), 301.
- (2) Crandall, S.H., *J. Sound and Vibr.*, **12** (1970), 285.
- (3) Yang, J.-N., *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, **101** (1975), 361.
- (4) Roberts, J.B., *J. Sound and Vibr.*, **46** (1976), 1.
- (5) Madsen, P.H. and Krenk, S., *Trans. ASME, Ser. E*, **51** (1984), 674.
- (6) Roberts, J.B., *J. Sound and Vibr.*, **56** (1978), 71.
- (7) Roberts, J.B., *Trans. ASME, Ser. E*, **45** (1978), 175.
- (8) Roberts, J.B., *J. Sound and Vibr.*, **109** (1986), 33.
- (9) 吉田, 機論, 掲載予定.
- (10) 木村・ほか2名, 機論, 52-474, C (昭61), 624.
- (11) 矢ヶ崎・ほか2名, 機論, 52-474, C (昭61), 631.
- (12) 木村・ほか2名, 機論, 掲載予定.
- (13) Lin, Y.K., *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, (1967), McGraw-Hill.
- (14) Sakata, M. and Kimura, K., *J. Sound and Vibr.*, **73** (1980), 333.
- (15) 木村・ほか2名, 機論, 50-450, C (昭59), 278.
- (16) 木村・坂田, 機論, 51-472, C (昭60), 3196.
- (17) Hirsch, M.W. and Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, (1974), Academic Press.
- (18) Cramer, H. and Leadbetter, M.R., *Stationary and Related Stochastic Processes*, (1967), John Wiley and Sons.
- (19) Sakata, M. and Kimura, K., *J. Sound and Vibr.*, **67** (1979), 383.
- (20) Rice, S.O., *Bell Syst. Tech. J.*, **23** (1944), 282/24, (1945), 46.
- (21) Roberts, J.B., *Trans. ASME, Ser. E*, **42** (1975), 285.