実固有値問題の有限要素法によるシフト・シンセシス* (振動固有値と固有ベクトルの変更)

中 桐 滋*, 鈴木 敬子*

Finite Element Synthesis of Real Eigenvalue Problems (Case Study of Adaptation of Vibration Eigenpairs)

Shigeru NAKAGIRI and Keiko SUZUKI

A methodology of the shift synthesis of real eigenvalue problems is presented so that the structure modification can be synthesized for a given set of the change of eigenvalue and eigenvector. The change of the aimed eigenpair due to the design parameters is estimated by the first order perturbation of the finite element solution in the vicinity of the baseline structure. The approximate equation between the objective eigenpair and the estimated one is employed as a subsidiary condition for the functional comprised of the sum of the squared design parameters. The design parameters are determined by the minimization of the functional so that the modification is sought as near the baseline structure as possible. The numerical examples are carried out in regard to the modification of a cantilever beam and a simplified truck chassis by use of the bending stiffness of the beams as design parameters.

Key Words: Vibration, Shift Synthesis, Finite Element Method, Eigenvalue, Eigenvector, Structure Modification

1. 緒 言

固有値問題においては、構造諸元を与えて構造応答としての固有値と固有ベクトル（以後固有対と略称する）を解析することのほかに、目標とする固有値を得るには構造諸元をどのように設定すればよいかもまた重要な事柄である。基本設計または試設計構造の固有対が所望の値になっていない場合は、構造変更により固有対を目標値へと動かす必要を生ずる。このような場合において構造変更量を定めることは、シフト・シンセシス (shift synthesis) と呼ばれ、その重要性が最近では認識されて、研究が進められている。その数例をあげれば感度解析を利用する方法^{(1)~(3)}、逆摂動法を利用するもの⁽⁴⁾⁽⁵⁾、サブストラクチャに基づく手法⁽⁶⁾⁽⁷⁾、モード試験結果を勘案するもの⁽⁸⁾⁽⁹⁾がある。

構造諸元を与えて固有対を解析するという問題はいわば順問題であり、線形構造については解の唯一性から固有対は一義的に定められる。固有対を与えて構造諸元を定めるのは逆問題であり、一つの固有対を実現する構造は唯一ではない。唯一性が成立しないところ

に逆問題の難しさが存在する。一方、基本設計 (baseline) または試設計は固有値問題以外の要因によっても設定されているので、目標の固有対を得るための構造変更量はなるべく小さいほうが好ましいと考えられる。

本報においては、これまでの研究例では取扱われていない変更量をなるべく小さくするとの考えを取り入れてシフト・シンセシスを行う手法を有限要素法に基づく一次近似反復解法により定式化する。無減衰線形実固有値問題としてはりの曲げ振動を対象とし、数値計算例により本定式が有効であることを示す。

2. 問題の設定

基本設計およびある反復段階の構造諸元による剛性および質量マトリックスを $[K], [M]$ (以後上付き棒はある段階における量であることを示す) とし、これに基づく L 自由度の線形固有値問題、

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = \{0\} \dots\dots\dots (1)$$

より、固有対 λ と $\{\phi\}$ が得られているとする。このとき、目標固有対 $\lambda, \{\phi\}$ を得るための構造変更量を求めることとする。構造変更は N 個の設計変数パラメータ α_n により表すものとし、変更後の剛性および質量マトリックスを α_n に関する Taylor 展開の 1 次項までの近似をとり、式(2), (3)により表す。

* 昭和62年8月21日 第65期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和62年1月30日。

*1 正員、東京大学生産技術研究所 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)。

$$[K'] = [\bar{K}] + \sum_{n=1}^N [K_n'] \alpha_n \dots\dots\dots (2)$$

$$[M'] = [\bar{M}] + \sum_{n=1}^N [M_n'] \alpha_n \dots\dots\dots (3)$$

同様に、変更後の固有対を式(4)、(5)により表す。

$$\lambda' = \bar{\lambda} + \sum_{n=1}^N \lambda_n' \alpha_n \dots\dots\dots (4)$$

$$\{\phi'\} = \{\bar{\phi}\} + \sum_{n=1}^N \{\phi_n'\} \alpha_n \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 λ_n' と $\{\phi_n'\}$ はある反復段階における既知量 $[\bar{K}], [\bar{M}], [K_n'], [M_n']$ により別途定められる固有対の変動率である⁽¹⁰⁾。 λ' と $\{\phi'\}$ が目標値 λ , $\{\phi\}$ に一致するまで未知量 α_n を決定して行くことが本報の問題である。

3. 一次近似反復解法で用いる汎関数

固有対の内、 L 自由度の固有ベクトルの全成分を目標値として設定しなければならない事例は稀であろう。振動モード形の一部分を小さくする⁽²⁾などが設定されるのが一般である。はりの曲げ振動の例においては変形のたわみ成分の設定は重要であるが、たわみ角成分まで設定する必要を生ずる例は稀であろう。このように目標固有ベクトル $\{\phi\}$ は主導的に設定される成分と、この主導成分を実現するようにして得られた変更後の構造で従属的に決定される成分とに分けられる。本報では主導成分の自由度が $l (\leq L)$ である場合を取り上げる。このとき、注目する次数に関して α_n を定める方法には次の2とおりが考えられる。

〔定式1〕 l 自由度の固有ベクトル主導成分を一群として取扱い、2個の Lagrange 乗数を用いる方法

本定式においては、設計変更量をなるべく小さくすることを α_n^2 の総和を最小とすることにより置き換えて目的関数を作成し、固有対と目標値との差の二乗を制約条件式として、Lagrange 乗数2個を用いて次の汎関数 π_1 を定める。

$$\pi_1 = \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \mu_1 \left(\lambda - \bar{\lambda} - \sum_{n=1}^N \lambda_n' \alpha_n \right)^2 + \mu_2 \{\varepsilon\}^T \{\varepsilon\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで

$$\{\varepsilon\} = \{\phi\}_l - \{\bar{\phi}\}_l - \sum_{n=1}^N \{\phi_n'\} \alpha_n$$

前式(6)で注目する次数に関する添字は特に付けておらず、また右辺第3項の $\{\phi\}_l$ 等は主導成分に対応する成分のみを取り上げた l 自由度のベクトルを意味する。

〔定式2〕 l 自由度の固有ベクトル主導成分を個別的に取扱い、 $l+1$ 個の Lagrange 乗数を用いる方法

本定式では $\{\phi\}_l$ を l 個のスカラーとして取扱うことになるので、固有値を含め $l+1$ 個のスカラー量を x_j と統一的に表す。設計変更量をなるべく小さくする

と〔定式1〕と同趣旨の汎関数 π_2 を式(7)と置く。

$$\pi_2 = \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 + \sum_{j=1}^{l+1} \mu_j (x_j - \bar{x}_j - \sum_{n=1}^N x_{jn}' \alpha_n)^2 \dots\dots\dots (7)$$

式(7)においては x_1 を固有値とし、 $x_j (j=2 \sim l+1)$ を l 個の固有ベクトル主導成分とする。

4. 一次近似反復解法による α_n, μ_j の決定

本研究では設計変数 α_n を式(6)または(7)の汎関数を最小にするとして以下の極値化条件により決定する。

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha_n} = 0 \quad n=1 \sim N \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mu_j} = 0 \quad j=1 \sim l+1 \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

この際、Lagrange 乗数との積をとる制約条件式については、式(8)を α_n と μ_j に関する1次式とするために、 α_n に関する以下の1次近似を用いる。

$$\sum_{n=1}^{l+1} \mu_j \left\{ (x_j - \bar{x}_j)^2 - 2(x_j - \bar{x}_j) \sum_{n=1}^N x_{jn}' \alpha_n \right\}$$

上式は式(7)の第2項に対応するものであり、式(6)においても同じ近似を用いることとする。この近似により式(7)の例について、式(8)の微分を実行し、その結果をマトリックス表示すれば式(9)が得られる。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{l+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ (x_1 - \bar{x}_1)^2 \\ \vdots \\ (x_{l+1} - \bar{x}_{l+1})^2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

ここで $N \times N$ の正方マトリックス A は、その成分が

$$A_{nn} = 2, \quad A_{nm} = 0 (n \neq m) \dots\dots\dots (10)$$

の対角マトリックス、 $N \times (l+1)$ の長方マトリックス B は、

$$B_{nj} = -2(x_j - \bar{x}_j) x_{jn}' \dots\dots\dots (11)$$

をその成分とし、 C は零マトリックスである。式(9)を解いて α_n, μ_j を求め、その変更後の構造について新たに式(9)を作り、再び α_n, μ_j を求める反復を行う。目標値が得られる、すなわち $x_j = \bar{x}_j$ となると $\alpha_n = 0$ となり、設計変数の収束値が得られる。

本法は、固有対変動の推定に式(4)、(5)の α_n の一次近似を、また汎関数の一部にも α_n の一次近似を用いているので、この過程を反復する必要がある。また式(8)は極値化条件であって、最小化の十分条件ではない。

5. 設計変数の設定

いずれの最適化問題においても設計変数をどのよう

に設定するかは極めて重要な問題である。本研究においては例題として構造を簡単なはりにモデル化し、その曲げ振動の有限要素解析による固有対のシフト・シンセシスを取扱う。材料、したがってヤング率 E と質量密度 ρ 、およびはり全長とはりの有限要素分割は変更しないものとする。この前提に基づき構造変更は断面形状、すなわちはりの断面二次モーメント I と断面積 A の変更により行うこととなる。はりの軸方向の形状変化分布を少数の有限要素により表すために、本研究においては I が要素内で線形に変化するとし剛性マトリックス $[k]$ を作成する。すなわち、1 要素に 2 個の変数を割付け、要素両端での、 I_1, I_2 を設計変数に選び、設計変数パラメータ α_1 と α_2 を式(12)により定める。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \bar{I}_1(1+\alpha_1) \\ I_2 &= \bar{I}_2(1+\alpha_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで $i=0, 1, 2$ として

$$[k_i] = \frac{E}{b^3} \begin{bmatrix} 6(2p_i + bq_i) & 2b(3p_i + bq_i) & -6(2p_i + bq_i) & 2b(3p_i + 2bq_i) \\ & b^2(4p_i + bq_i) & -2b(3p_i + bq_i) & b^2(2p_i + bq_i) \\ \text{SYM.} & & 6(2p_i + bq_i) & -2b(3p_i + 2bq_i) \\ & & & b^2(4p_i + 3bq_i) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

また $p_0 = \bar{I}_1, p_1 = \bar{I}_1, p_2 = 0, q_0 = (\bar{I}_2 - \bar{I}_1)/b, q_1 = -\bar{I}_1/b, q_2 = \bar{I}_2/b$ である。断面積の変化に伴う質量マトリックスの変化も同様にして求められる。

要素内で I が一様とし、1 要素に 1 個の変数を割付けるときは、剛性マトリックス変化は当然ながら 1 要素分に限られる。しかし両端の I を設計変数に与えるので、本研究においては、1 節点の I の変化はその両側にある 2 個の剛性マトリックスに変化を及ぼしている。このようにして評価した $[k_0]$ の重ね合せで式(2)の $[\bar{K}]$ が定められ、 $[k_1]$ と $[k_2]$ 分を重ね合せて $[K_n]$ が定められる。

6. 数値計算例

6.1 片持ばりの固有対変化 本節では片持ばりの曲げ振動固有値と固有ベクトル変更に関し、4 章所論の定式の適否と反復解法の収束を検討する。図 1 内に示す全長 100 mm、一様な断面積 25 mm²、断面二次モーメント 52.083 mm⁴ を有する初期構造の一次固有値 $\bar{\lambda}$ (固有振動数 415 Hz) に対して目標固有値を $\lambda = 0.5\bar{\lambda}$ と設定する。材料定数は $E=206$ GPa, $\rho=7800$ kg/m³ とし、5 要素分割を用いる。図 1 は 6 節点の I のみを設計変数に用いた場合の構造変更による固有値の目標値への収束状況を示す。固有値変更量がこの事例のように大きい場合、断面積変化を加えると第 1 回の反復で断面積が負となる構造が得られるとの不具合が発生する。これは断面積変化による固有値の感度が小さいためと思われる、以下の数値例ではすべて設計変数を断面二次モーメントのみにとる。

図 2 は図 1 の点 A, B の一次固有ベクトルたわみ成分 w_A, w_B を初期構造の 90 % に変更する場合であり、図 1 と同様に、固有ベクトル変動率計算に際しては、はり自由端の固有ベクトルたわみ成分が不変との規準化条件を用いている。この事例では、固有値は指定せず、固有ベクトル 2 成分の変化を設定し、これを主導成分とし、1 個の Lagrange 乗数を用いて〔定式 1〕によっている。図 2 は固有ベクトルの目標値への収束は単調でなく、しかも収束まで 20 回以上の反復を要することが示されている。

図 3 は、図 2 と同じ問題を 2 個の Lagrange 乗数を用いて〔定式 2〕により解いた結果を示す。〔定式 2〕によれば収束は単調であり、5 回の反復で十分収束していることが示されている。したがって、〔定式 1〕と〔定式 2〕を比較すれば、〔定式 2〕により少ない反復で収束解が得られることがわかり、以後の数値例はすべて〔定式 2〕を用いる。

図 1 構造変更による固有値収束状況

このとき、1 要素の剛性マトリックスの α_1 と α_2 に関する変化をその 1 次項までで近似すると式(13)が得られる。要素長を b として、

$$[k] = [k_0] + [k_1]\alpha_1 + [k_2]\alpha_2 \dots\dots\dots (13)$$

6.2 中形トラック・シャシーの曲げ振動 本節では中形トラックの曲げ振動に関するシフト・シンセシスについて述べる。全長 7.5 m の中形トラックのシャシーを図 4 内に示すように 30 個の等長真直はりでモデル化する。材料のヤング率 $E=206 \text{ GPa}$ とし、初期構造では断面二次モーメントを一樣な $I=0.141 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ として剛性マトリックスを作成する。質量マトリックスは、シャシー自重を無視し、図 4 内に示す 4 段階の分布荷重量、A 点より順次 3 320 N/m, 4 681 N/m, 4 733 N/m, 4 469 N/m に基づいて質量マトリックスを作成した。また、シャシーは図中の黒三角印で示す二点で単純支持されているとする。

図 4 は点 A と B における一次固有ベクトルたわみ成分を初期構造の 80 % に変更する場合の固有ベクトルの収束を目標値とのノルム比で示す。設計変数は 31 個の I と多数であるが 6 回の反復で収束が得られている。図 5 に構造変更後のモード形と得られた形状の断面二次モーメントの分布を示す。固有ベクトル変動率計算に際しては以後の計算例も同じく、P 点のたわみ成分を不変とする規準化条件を用いている。

図 6 は、図 5 の問題に初期構造の固有値（固有振動数 4.4 Hz）を 1.2 倍とする条件を加えた場合の収束後のモード形と断面二次モーメントの分布を示す。固有値変更を追加しても、モードには大差はないが、断面二次モーメントの分布はかなり異なっている。

図 2 構造変更による固有ベクトルの変化〔定式 1〕

図 3 構造変更による固有ベクトルの変化〔定式 2〕

図 7 は固有ベクトルの変化として点 A のたわみとたわみ角を初期値の 80 % に設定する場合の結果を示す。たわみ角変化を設定しても〔定式 2〕により図 4 と同様に少数の反復で収束が得られている。モード形は図 5 の結果と大差はないが、断面二次モーメントを変化すべき領域の拡大がみとめられる。これはたわみ角変化が広い範囲にわたる構造変更に影響を及ぼすことを意味している。

これまでの数値計算例は一次モードに関するものであった。本研究の〔定式 2〕で高次モードのシフト・シンセシスが可能かどうかを検討した結果を図 8 に示す。二次モードに関しても、図 4 の点 C, D におけるたわみ成分をそれぞれ 110 %, 80 % とする変化の設定について、4 回の反復で収束が得られている。図は、変化設定がたわみ成分のみであっても、高次モードにおいては広い領域での構造変更が必要となることを示唆している。

図 4 固有ベクトル・ノルムの収束状況

図 5 変更後のモード形と断面二次モーメント分布

図 6 固有値と固有ベクトルの同時変更

図 8 二次固有ベクトルに関する構造変更

図 7 たわみ角変化も設定する構造変更

7. 結 論

本報では、線形実固有値問題において固有対変化を設定し、それに要する構造変化を求めるシフト・シンセシスを有限要素解析により行う手法を定式化した。固有対の変化を設計変数に関する一次変動率を用いて表し、固有対を目標値に一致させるとの条件を制約条件として、設計変数変化をなるべく小さくするとの考えにより汎関数を定めている。この汎関数を最小にする条件により設計変数と Lagrange 乗数の決定方程式を得ている。

本定式を片持ちりおよび中形トラック・シャシーの曲げ振動問題に適用して、断面二次モーメントを設計変数に選り、固有値と固有ベクトル変化を設定し、そ

れに要する構造変更の数値計算例を示した。本定式に基づく一次近似反復解の収束状況は単調であり、収束までの所要反復回数は 7 回以下で多数を要しない。反復ごとに固有値解析を行っているが、反復回数が少ないことは本手法を規模の大きい問題へも適用し得ることを示している。

数値計算例は、シフトを設定する固有ベクトル主導成分が極めて少数である場合を示した。定式上は主導成分数が増大してもなんら問題を生じない。しかしながら固有ベクトルのどの成分を変更させるか、および、それも適切な変化であるかは工学的判断によるものである。例えば初期構造の一次モード形を同じく初期構造の二次モード形に変更するのは無意味であろう。また、一次固有次についてそのモード形を屈曲の多いモードに変えるという不自然な変化に対しては、構造変更そのものが不可能と予想される。したがって確定的に設定する主導成分はなるべく少数とし、主導成分と従属成分にも不確定性を考慮したシフト・シンセシスを行うことが今後の課題である。

文 献

- (1) 中島・ほか 1 名, 昭和 59 年度精密学会秋季大会学術講演論文集, (昭 59-10), 409.
- (2) 萩原・ほか 2 名, 機論, 52-482, C (昭 61), 2607.
- (3) 藤川・ほか 3 名, 機論, 52-476, C (昭 61), 1224.
- (4) Kim, K. O., ほか 2 名, *AIAA J.*, 21-9 (1983), 1310.
- (5) Hoff, C. J., ほか 3 名, *AIAA J.*, 22-9 (1984), 1304.
- (6) Hale, A. L., ほか 1 名, *AIAA J.*, 20-8 (1982), 1128.
- (7) Hale, A. L., *AIAA J.*, 22-2 (1984), 265.
- (8) Chen, J. C., ほか 1 名, *AIAA J.*, 18-6 (1980), 684.
- (9) Berman, A., ほか 1 名, *AIAA J.*, 21-8 (1983), 1168.
- (10) 井上・ほか 3 名, 機論, 50-452, C (昭 59), 597.

討 論

〔質問〕 萩原 一郎〔日産自動車㈱〕

実用性の面でも極めて貴重なご研究と思われる。以下の点についてご教示願いたい。

(1) 感度係数の大きい変数を設計変数とするときには設計変更最小というのは意味があると考え。しかし、感度係数の小さい変数が一つでも設計変数に入っているとき結果として設計変更は非常に大きなものとなる。この場合も同様に妥当な結果が得られるのか。

(2) 〔定式1〕と〔定式2〕の比較がなされている。記載された例では、〔定式2〕が優れているとある。固有ベクトルの主導成分の中に大きさのかなり異なるものがあるときには、〔定式2〕で求まる Lagrange 乗数に含まれる誤差が大きくなり結果として〔定式1〕のほうが優れるということはないのか。

(3) 7章の「結論」のところで、「反復ごとに固有値解析を行っている」とある。感度解析で著者らが開発された手法(付1)を用いると繰返しの固有値解析が不用(代わりに感度解析を利用)となり計算時間もさらに有利となると思われるがどうか。特に大規模問題を扱う際には、このことが必要となるのではないのか。

〔回答〕 (1) 感度係数の小さい設計変数が含まれているときはご指摘のとおり設計変更量が大きくなり、例えば断面積断面二次モーメントを負としなければならぬという不都合な設計も得られる。この場合は設計変数の値域を合理的に設定する不等式制約条件

を加えることにより回避できるとの見通しを得ており、この問題については今後発表の予定である。

(2) ある目標値を変化させるために設計変数を変化させるとその影響は他の目標値にも及ぶ。この干渉が〔定式1〕のベクトル形制約条件が強く現れ、反復が非単調となり、収束までの回数が多大となる。著者らの経験では、目標値である固有ベクトル主導成分の値が大きく異なっているにもかかわらず Lagrange 乗数は求められており、反復は単調で速く収束しているの、スカラ形の制約条件を用いる〔定式2〕のほうが優れていると考える。

(3) 再解析はマトリックスの一部が変化する場合の応答の変化を求めるうえで演算時間の観点から有効である。しかしながら、構造のシンセシスを行うに際しては設計変数をなるべく多く設定するのが望ましく、本論文で示した解析例では断面二次モーメントの変化は対象構造のほぼ全長にわたり、これは剛性マトリックスの全面的な変更を意味する。したがって、再解析技法を用いても、演算時間上有利にならないので、反復ごとに固有値解析をやり直した。ご指摘のとおり大規模問題に関しては反復回数が少なくないといえども演算時間のかかる固有値解析をやり直すのは演算時間上の問題を残すので、この点についてはもう一工夫が必要と考えている。

(付1) 中桐・恒成・鈴木, 機論, 52-481, C (昭61), 2313.