部分的に液体を満たした軸対称殻の自由振動解析*

谷 順 二^{*1}, 寺 木 潤 一^{*2}

Free Vibration Analysis of Partially Liquid-filled Shells of Revolution

Junji TANI and Junichi TERAOKI

The linear free vibration of partially liquid-filled shells of revolution is analyzed by means of the finite element method. Isoparametric thick shell-elements are used for the axisymmetric shell, and isoparametric quadrilateral elements and line elements are used for the liquid interior and surface, respectively. The liquid is assumed to be incompressible and inviscid. The initial axisymmetric deformation of the shell due to the static liquid pressure as well as the boundary condition on the free liquid surface are fully taken into consideration. It is founded that the static liquid pressure has significant on the natural frequency of the LNG tank and the minimum natural frequency of the fast breeder reactor containment has a circumferential wave number of $N=5\sim 10$.

Key Words: Free Vibration, Liquid-filled Axisymmetric Shells, Numerical Analysis, Finite Element Method, Static Liquid Pressure

1. 緒 言

構造物と流体との連成振動は、ロケットの燃料タンク、各種化学プラントの容器、原子炉容器、石油タンク、LNG タンクなどにおいて発生する場合があります。近年、それらの構造物の大形化、薄肉化にともなう固有振動数の低下は、耐震設計などに関して重要な問題となってきた。しかしながら本問題は薄肉殻と内部流体とが相互に作用し合う連成振動現象であるため、従来より多くの解析および実験がなされているが、いまだ十分に説明されたとはいえない⁽¹⁾。

この方面における解析的な研究としては、内部流体を付加質量として解析したもの、内部流体を理想流体として取扱い、内部流体と円筒殻の連成振動問題としてエネルギー法、有限要素法や解析的手法によって解いたものなどがある⁽²⁾⁽⁴⁾。しかしその解法の複雑さから、さまざまな仮定、近似が設けられており、例えば自由液面は振動しないとする仮定や、静液圧による初期変形を無視することなどである。特に静液圧の影響を考慮に入れた解析は極めて少ない⁽⁵⁾。また解析はお

もに円筒殻に対して行われており、実際の形状に基づいた解析例は少なく、得られているデータも極めて少ないのが現状である。

以上の観点から、本論文では自由液面および静液圧を考慮した、流体を含む軸対称殻の精密な自由振動解析を行い、その特性を明らかにすることを目的とする。

軸対称殻に対しては任意形状を扱うため有限要素法を使用し、内部流体に関しては理想流体の仮定の下に、やはり有限要素法によって解いている。また静液圧の影響を考慮するために一般の線形剛性マトリックスとは別に、初期応力剛性マトリックスを含めて解析を行っている。

解析例としては、LNG タンクおよび高速増殖炉主容器の各モデルに対し解析を行い、その振動特性を明らかにした。

記 号

(x, y, z) : z 軸を鉛直方向とするデカルト座標系
 (r, θ, z) : z 軸を鉛直方向とする円柱座標系
 g : 重力加速度
 V_i, V_s : 流体および弾性体の占める領域
 S_v : 流速が与えられた境界

* 昭和 62 年 10 月 6 日 第 945 回講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 3 月 26 日。

^{*1} 正員、東北大学高速力学研究所 (〒980 仙台市片平 2-1-1)。

^{*2} 学生員、ダイキン工業(株) (〒591 堺市金岡町 1304)。

- S_f : 自由液面
 S_u : 変位が与えられた境界
 S_i : 流体と弾性体との接触面
 ϕ : 速度ポテンシャル
 η : 液面変動量
 $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_s$: 流体および弾性体領域に対する外向き法線単位ベクトル
 σ_{0ij} : 初期変形による応力テンソル
 σ_{ij} : 微小振動による応力テンソル
 u_{0i} : 初期変位
 u_i : 微小振動変位
 $(\cdot)$: 時間に関する微分
 ρ_l, ρ_s : 流体および弾性体の密度
 P_s : 流体による静液圧
 h : 静止液面からの深さ
 $[]^T$: 転置行列
 $\{\phi\}$: 速度ポテンシャルベクトル
 $\{\eta\}$: 液面変動量ベクトル
 $\{\delta_s\}$: 弾性体の微小振動変位ベクトル
 $\{\delta_{s0}\}$: 弾性体の初期変位ベクトル
 $[M_s]$: 弾性体の質量マトリックス
 $[K_s]$: 弾性体の剛性マトリックス
 $[K_s^L]$: 弾性体の線形剛性マトリックス
 $[K_s^0]$: 弾性体の初期応力剛性マトリックス
 $\{Q_i\}$: 静液圧による外力ベクトル
 u, v, w : (r, θ, z) 方向の変位
 E : 縦弾性係数
 ν : ポアソン比

2. 基礎式および境界条件

図1に示されるような、一般の流弾性自由振動問題についての基礎式および境界条件の定式化を行う。なお弾性体は流体の静液圧により初期変形を起こし、そのまわりに微小振動するものとする。

流体について、非圧縮、非粘性流体を考え、渦なし運動をするものと仮定すれば、速度ポテンシャル ϕ が存在し、

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

が成立し、境界条件として S_v 上で、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n_i} = 0 \quad (2)$$

であるとする。

弾性体については平衡方程式より体積力を無視して、

$$\sigma_{0ij,j} + \sigma_{ij,j} = \rho_s \ddot{u}_i \quad (3)$$

が成立し、境界条件として S_u 上で、

$$u_{0i} + u_i = 0 \quad (4)$$

であるとする。

自由液面については液面変動量 η が微小であるとすれば、

$$\eta = -\frac{1}{g} \dot{\phi} \quad (5)$$

および、

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial n_i} \quad (6)$$

が成立する。

流体と弾性体との接触面 S_i では、速度一致の条件により、

$$n_{si} \dot{u}_i = \frac{\partial \phi}{\partial n_i} \quad (7)$$

が成立し、流体圧力と弾性体表面応力の一致の条件により、

$$n_{si} (\sigma_{0ij} + \sigma_{ij}) n_{sj} = \rho_l \dot{\phi} - P_s \quad (8)$$

が成立する。ここで、 P_s は流体による静液圧であり静止液面からの深さを h とすれば、

$$P_s = \rho_l g h \quad (9)$$

で表される。

3. 解 法

2章で示した基礎式および境界条件を有限要素法により解く。有限要素法についてはすでに Zienkiewicz らによって詳しく述べられているため、詳しい記述は省略する⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

3・1 各種要素マトリックスの定式化 流体について式(1)に重み付き残差法の一つであるガレルキン法を適用し式(2)、式(6)、(7)を考慮してマトリックス表示の式を導くと次式が得られる。

$$[H]\{\phi\} = [P_1]\{\dot{\eta}\} + [P_2]\{\delta_s\} \quad (10)$$

同様に自由液面についても、式(5)にガレルキン法を適用すると、マトリックス表示で次式が得られる。

$$g[K_1]\{\eta\} = -[P_1]^T\{\phi\} \quad (11)$$

図1 流弾性問題

ただし $[H]$, $[P_1]$, $[P_2]$, $[K_1]$ は液体, 液面, 殻の形状関数よりなるマトリックスである。

弾性体については, 式(3)に重み付き残差法を適用し, 式(4), 式(8)を考慮し, 静液圧による初期変形量を小さいとすれば, マトリックス表示で, 次の微小振動の運動方程式

$$[M_s]\{\ddot{\delta}_s\} + [K_s]\{\delta_s\} = -\rho_l[P_2]^T\{\dot{\phi}\} \quad \cdots(12)$$

および,

$$[K_s^L]\{\delta_{s0}\} = \{Q_1\} \quad \cdots(13)$$

が得られる。ここで, $[M_s]$ は殻の形状関数よりなるマトリックスであり, 剛性マトリックス $[K_s]$ は,

$$[K_s] = [K_s^L] + [K_{s0}^G] \quad \cdots(14)$$

で表される。ただし, $[K_s^L]$ は線形剛性マトリックス, $[K_{s0}^G]$ は静液圧による初期応力剛性マトリックスである。また, 式(13)は静液圧による初期変形における平衡方程式であり, これより初期応力を求めることによって $[K_s]$ を求めることができる。

最終的な運動方程式は, 式(10)を $\{\phi\}$ について解き, 式(11)および式(12)に代入することによって得ることができる。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{0\} \quad \cdots(15)$$

となる。ただし,

$$\left. \begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] \end{bmatrix} \\ [M_{11}] &= \rho_l[P_1]^T[H]^{-1}[P_1] \\ [M_{12}] &= \rho_l[P_1]^T[H]^{-1}[P_2] \\ [M_{21}] &= \rho_l[P_2]^T[H]^{-1}[P_1] \\ [M_{22}] &= [M_s] + \rho_l[P_2]^T[H]^{-1}[P_2] \end{aligned} \right\} \quad \cdots(16)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \rho_l g[K_1] & [0] \\ [0] & [K_s] \end{bmatrix} \quad \cdots(17)$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\eta\} \\ \{\delta_s\} \end{Bmatrix} \quad \cdots(18)$$

である。

3・2 各種軸対称要素 本論文では, 軸対称殻構造物と流体との連成振動問題についての解析を行うものとする。この場合, 各未知量を円柱座標系の回転方向 (θ) にフーリエ級数展開することにより, θ 方向に分離された運動方程式を得ることができる。よって有限要素法では回転断面上でのみ要素分割を行う, いわゆる軸対称要素を用いればよい。今, 変形状態を $\theta=0$ に対し対称であるとする, 各未知量に対し,

$$\phi(r, \theta, z; t) = \sum_{N=0}^{\infty} \phi(r, z; t) \cos N\theta \quad \cdots(19)$$

$$\eta(r, \theta, z; t) = \sum_{N=0}^{\infty} \eta(r, z; t) \cos N\theta \quad \cdots(20)$$

$$u(r, \theta, z; t) = \sum_{N=0}^{\infty} u(r, z; t) \cos N\theta \quad \cdots(21)$$

$$V(r, \theta, z; t) = \sum_{N=1}^{\infty} V(r, z; t) \sin N\theta \quad \cdots(22)$$

$$W(r, \theta, z; t) = \sum_{N=0}^{\infty} W(r, z; t) \cos N\theta \quad \cdots(23)$$

が成立する。これらの式を用いることにより最終的に N ごとに分離された運動方程式,

$$[M_N]\{\ddot{\delta}_N\} + [K_N]\{\delta_N\} = \{0\} \quad \cdots(24)$$

を得ることができる。

なお殻要素には Zienkiewicz らの開発した, アイソパラメトリック厚肉殻要素を, また流体および自由液面要素には, それぞれ 9 節点アイソパラメトリック四辺形要素および 3 節点アイソパラメトリック線要素を用いた。

4. 計算結果および考察

3章までの理論を用いて作ったコンピュータプログラムによる数値解析例を次に示す。

固有振動数およびモードは式(24)の一般解を,

$$\{\delta_N\} = \{\bar{\delta}_N\} e^{i\omega t} \quad \cdots(25)$$

とし, 固有値計算することによって求めた。

4・1 解の精度の検討 最初に本解析の妥当性を確認するために千葉ら⁽⁸⁾が求めた解析解との比較を行う。比較に用いた解析解は, 円筒殻と流体との連成振動問題を, 自由液面および静液圧の影響を考慮し解析的に解いたものであり, 実験値との一致も良好で十分信頼できるものである。

計算に用いた解析モデルとその物性値を図2および表1に示す。また計算結果を, 固有振動数については図3に, 各振動モードについては図4(a), (b)に示す。固有振動数について比較すると, 実際の解析方法が全く異なるにもかかわらず, 数値解と解析解は全域にわたり非常によく一致していることがわかる。液面の振動モードは解析解がないため比較できないが, 殻壁の振動モードも数値解と解析解は非常によく一致していることがわかる。ただし, 周方向波数 N が大きく

R =	100 mm
H =	114 mm
L =	57 mm
h =	0.247 mm

図2 解析モデル

表1 解析モデルの物性値

Shell (Polyester Film)		
E	(Pa)	5.56×10^9
ν		0.3
ρ_s	(kg/m ³)	1.41×10^3
Liquid (Water)		
ρ_l	(kg/m ³)	1.0×10^3

表 2 固有振動数の収束性

Mesh (i+j+k) i:Shell j:Free Surface k:Liquid	Natural Frequencies (Hz)								
	N = 0			N = 1			N = 10		
	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3	m=1	m=2	m=3
4 + 2 + 4	293.0	526.5	979.7	282.9	502.8	972.7	124.3	266.4	379.4
8 + 4 + 16	293.3	546.8	728.0	282.7	523.0	719.9	115.5	255.8	357.3
12 + 6 + 36	293.0	544.9	719.2	283.9	520.9	711.1	114.2	253.7	353.1
16 + 8 + 64	293.1	544.3	715.9	283.6	520.4	707.7	113.6	252.5	351.9

図 3 固有振動数

なり液面が局所的に急激に変化するような場合には、メッシュの粗さのためであると思われる解の振動がみられる。なお、図 4 中の $\eta_{\max}/\delta_{s\max}$ は液面の最大変位と殻壁の最大変位との比を表しており、これが大きいほど液面変位は殻壁の変位に比べ大きいことになる。

表 2 には本解析モデルにおける解の収束性を示す。これによると、メッシュを細かくするに従って一般に高い固有振動数から急激に収束していくようすがわかる。

計算時間についてはメッシュの粗さにより極端に変化するため一概にはいえないが、一つの周方向波数について収束値を得るための CPU 時間は 1 min 以内で十分であった。

たお、計算には東北大学計算機センター Acos 77 シリーズ NEAC システム 1000 を用い単精度計算を行っている。

4.2 LNG タンクモデルの解析 4.1 節で本コンピュータプログラムの妥当性が確認できたため、以下ではこれを用いて実際の構造物についての解析を行う。

最初に実際に用いられている円筒形タンクの例とし

(a) 解析解による振動モード

(b) 数値解(FEM)による振動モード

図 4

て図 5 に示すような LNG タンクモデルの解析を行う。この場合円筒殻の板厚は直線的に変化しているが、本解析ではアイソパラメトリック要素を使用しているためこれを正確に扱うことが可能である。

計算結果を、静液圧による初期変形状態を図 6 に、固有振動数を図 7 に示す。固有振動数と周方向波数 N との関係をもてみてもわかるように、最低固有振動数は一般に解析が行われている、 $N=0, 1$ ではなく $N=5$

～10 付近にあり、この値は、 $N=0, 1$ の固有振動数よりもはるかに低い値である。確かに理論上では地震によってかかる力は、 $N=0$ の垂直加振力と $N=1$ の水平加振力以外にはあり得ないが、タンクの初期不整、支持の違いなどにより、 $N=0, 1$ 以外の振動が起きることが十分に考えられるため、その最低固有振動数を知っておくことは重要であると思われる。また、静液圧を考慮した場合と考慮しない場合とを比べると、 N が大きくなるにしたがい固有振動数の値は大きく違ってきている。この場合は静液圧を考慮したほうが、考慮しない場合に比べ固有振動数が高くなるために、これを考慮しなければ危険であるというわけではないが、実際のタンクにおいても大きな違いが生じるとい

うことを注意しておきたい。特に外圧がかかるような構造物の場合、逆に固有振動数が低下することも十分に考えられるため、静液圧を考慮し解析することは重要なことであると思われる。

図 8 (a), (b) にはそれぞれの場合の振動モードを示す。板厚がタンクの上部では薄く下部では厚いため、一般的にタンクの上部での変位が大きくなる特徴的な振動モードとなっている。静液圧を考慮した場合としない場合とを比べると $N=10, 15, m=1, 2$ 付近において、静液圧をうけることにより剛性が増加しているようすがわかる。

4.3 高速増殖炉主容器モデルの解析 本節では

図 5 LNG タンクモデル

表 3 解析モデルの物性値

Shell (9% Ni)		
E	(Pa)	2.06×10^{11}
ν		0.3
ρ_s	(kg/m ³)	7.86×10^3
Liquid (LNG)		
ρ_L	(kg/m ³)	0.485×10^3

図 6 初期変形状態

図 7 固有振動数

(a) 静液圧を考慮しない場合の振動モード

(b) 静液圧を考慮した場合の振動モード

図 8

図9 高速増殖炉主容器モデル

表4 解析モデルの物性値

Shell (SUS)	
E (Pa)	2.0×10^{11}
ν	0.3
ρ_s (kg/m ³)	7.8×10^3
Liquid (Na)	
ρ_L (kg/m ³)	0.97×10^3

図10 初期変形状態 ($L/H=0.75$)

実際の原子炉容器、特に高速増殖炉主容器についての解析を行う。高速増殖炉では、冷却材にナトリウムを使用し軽水炉に比べ高温で運転されること、およびその温度差が激しいことなどにより、熱応力が過大になることを避けるため薄肉にせざるを得ない。これは厚肉指向の耐震設計と矛盾する傾向にあり、その振動特性を明らかにすることは非常に重要なことである。

本解析では、主容器と内部の液体ナトリウムのみをモデル化し解析するものとする。実際に解析する主容器のモデルを図9に示す。このモデルでは、主容器は円筒殻部、円環殻部および球殻部から成り、上端部より下げられているものとする。なお、液体にかかる圧力は大気圧と等しいものとし、液位率 $L/H=0.75$ の場合についての解析を行った。

図10には静液圧による初期変形状態を示す。図10からわかるように、円筒殻部との接合面付近では非常に複雑な変形状態となっており、内部応力状態は厳しいと考えられる。

固有振動数および振動モードをそれぞれ図11および図12(a), (b)に示す。図12から明らかなように、最低固有振動数は $N=5 \sim 10$ 付近にあり、これは4・2節で述べたように $N=0, 1$ での解析だけでは不十分であり、ある程度の N の領域にわたって解析を行いその最低固有振動数を明らかにすることが重要であることを示している。振動モードをみると一般に N が小さい場合には球殻部が、 N が大きくなると円筒殻部がそれぞれ大きく振動することがわかる。またその過渡状

図11 固有振動数 ($L/H=0.75$) 図12 振動モード ($L/H=0.75$)

態では円筒殻部および球殻部が同程度の振幅で振動し、非常に複雑な振動モードとなっている。これは、このような形状の容器を解析する際によく行われる円筒殻などへの近似では不十分であることを示している。

なお、図12には示さなかったが、このモデルの場合には静液圧による固有振動数の差は数%であり、特に静液圧を考慮する必要はないと思われる。

5. 結 言

部分的に液体を満した軸対称殻を、静液圧の影響および自由液面の条件を考慮し、有限要素法により解析を行った。また、LNGタンクおよび高速増殖炉主容

器の各モデルに対して数値解析を行い、その振動特性について明らかにした。

得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 本論文で作成した有限要素法によるコンピュータプログラムは、他の解析解との比較において十分な精度と収束性を備えていることを確認した。

(2) LNG タンクモデルの解析において、最低固有振動数は周方向波数 N が 5~10 付近にあり、また静液圧は固有振動数に対して大きな影響を与える。

(3) 高速増殖炉主容器の解析において、最低固有振動数は $N=5\sim 10$ 付近にあり、また振動モードは複雑で、円筒殻などの解析により予測することはほとん

ど不可能である。

文 献

- (1) 清水, 機論, 49-438, C (昭 58), 45.
- (2) 小松, 航空宇宙技術研究所報告, TR-478, (昭 56), 1.
- (3) 藤田, 機論, 47-413, C (昭 56), 20.
- (4) 清水・ほか 2 名, 機論, 48-426, C (昭 57), 215.
- (5) Haroun, M. A. and Housner, G. W., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Eng. Mech. Div.*, 108-EM-5 (1982), 801.
- (6) 鷲津・ほか 4 名, 有限要素法ハンドブック I, II (昭 58), 培風館.
- (7) Zienkiewicz, O. C. (吉識・山田監訳), マトリックス有限要素法 (昭 59), 培風館.
- (8) 千葉・ほか 2 名, 機論, 50-453, C (昭 59), 774.

討 論

〔質問〕 清水 信 行 (いわき明星大学理工学部)

(1) 式(14)の下 4 行めより「これより初期応力を求めることによって $[K_0]$ を求めることができる」とあるが、その具体的手順をお教え願いたい。

(2) LNG タンクの耐震設計において静液圧による初期応力の効果を動的に考慮する必要があると考えるか。

〔回答〕 (1) $[K_0]$ については初期安定問題に用いられる初期応力剛性マトリックスと同じものであり、詳しくは文献(6), (7)を参照されたい。その導出法について簡単に述べると、平衡方程式(8)より幾何学的非線形性を考慮した Lagrange 記法による仮想仕事の原理を導き増分形で表した後、有限要素法を用いることにより求めることができる。その要素マトリックスを $[k_0]$ とすると、

$$[k_0] = \int_{V_0} [B_d]^T [S_0] [B_d] dV \quad \cdots \cdots \cdots (i)$$

となる。ここで、 V_0 は弾性体の 1 要素内の領域を表す。 $[B_d]$ は変位こう配ベクトル $\{d\}$ と変位ベクトル $\{\delta_{se}\}$ の間に成立するマトリックスであり、

$$\{d\} = [B_d] \{\delta_{se}\} \quad \cdots \cdots \cdots (ii)$$

で表され、円柱座標系において $\{d\}$ は、

$$\{d\} = \left[\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right), \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), \right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial z} \Big]^T \quad \cdots \cdots \cdots (iii)$$

となる。 $[s_0]$ は初期応力テンソル $[\sigma_0]$ により、

$$[s_0] = \begin{bmatrix} [\sigma_0] & 0 & 0 \\ 0 & [\sigma_0] & 0 \\ 0 & 0 & [\sigma_0] \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (iv)$$

のように表され、円柱座標系において $[\sigma]$ は、

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_r & \text{sym.} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (v)$$

となる。最終的には、 $[k_0]$ を各要素について重ね合わせるにより $[K_0]$ を求めることができる。

(2) 地震による動的応答を線形解析の範囲で評価しようとするならば $N=0, 1$ 以外の振動モードが現れることはないため、静液圧による影響はほとんどないと思われる。しかしながら $N=0, 1$ 以外の振動モードも現れるという報告もあり、各種非線形性を考慮した動的応答を求めようとする場合、あるいは最低固有振動数を求めようとする場合などでは図 7 で示されるように大きな影響が出る可能性があるため、考慮されるべきであると考え。