片持送水管の安定性とその能動制御*
(テンドンによる安定化の一試み)土 岐 仁^{*1}, 谷 順 二^{*1}Dynamic Stability and Active Control of Cantilevered Pipes Conveying Fluid
(An Attempt of Stabilization by Tendon Control Method)

Hitoshi DOKI and Junji TANI

Theoretical studies on the dynamic stability and active control of cantilevered pipes conveying fluid are conducted. In order to control the response of the cantilevered pipe, an active control force is derived by the torque produced by a pair of tendons attached to the pipe. The problem is solved by means of the Galerkin method, in conjunction with the optimal regulator theory. The effect of a tendon on the stability of a cantilevered pipe conveying fluid in the uncontrolled system is clarified. Furthermore, the effect of the internal damping is taken into consideration in the present study. The numerical simulation of the response of a cantilevered pipe conveying fluid is also carried out for various conditions. It is found that the active tendon control method is effective to stabilize the cantilevered pipe conveying fluid, even if the control input is limited.

Key Words: Vibration Control, Optimal Control, Pipe Conveying Fluid, Tendon Control Method, Dynamic Stability, Stabilization, Limitation of Control Input

1. 緒 言

弾性管の内部を流体が流れる場合の不安定現象は、燃料輸送パイプライン、熱交換パイプ、各種化学プラントの配管系に多く見られる現象であり、工業上重要な問題である。特に片持送水管の場合は、非保存的弾性安定問題として学問的にも興味深い問題であり、これまでいくつかの研究が行われている^{(1)~(5)}。しかしながら、従来の研究では種々の条件の下で限界流速がどうなるかという安定性の観点からの研究が多く、不安定現象の安定化にとりくんだ研究はほとんど見られない。

一方、近年工業技術の発展とともに建築構造物、宇宙構造物などは、ますます大形化、軽量化しており、その結果柔軟性が顕著にあらわれ、励振されやすくなっている。従来、これら構造物の振動を抑制する方法としては、動吸振器によって振動エネルギーを吸収させる受動的制振方法が用いられてきた。この方法は構成が比較的簡単であり、共振現象に対しては著しい制振効果があるが、設計パラメータや振動系の特性が変

化する場合には、その制振効果は大きく低下する。これに対して最近、外部から制振エネルギーを供給することによって能動的に制振するアクティブコントロールという新しい制振方法が研究され始めている^{(6)~(10)}。この方法は構造物の振動を検出するセンサと、この信号をもとに構造物に制御力を加えるアクチュエータおよびフィードバック制御系で構成されており、装置は複雑になるがパラメータや振動特性の変動にあまり影響されない良好な制振効果が得られ、今後構造物の制振方法としてますます応用されてくると思われる。

著者らは前報⁽¹¹⁾⁽¹²⁾において、従来、主として安定性の観点から研究が行われていた片持送水管の不安定現象を、最適制御理論を用いたテンドン制御法によって効果的に安定化できることを理論的に明らかにした。これらに引き続き本報では制御する前に、まず送水管の安定性に及ぼすテンドンの影響、すなわちテンドンの剛性や取付位置の影響について、内部減衰を考慮に入れて詳細に検討する。次いで制御した場合、最適な制御効果の得られる条件について考察するとともに、実用上重要な制御変位に制限がある場合の制振効果についても言及する。

* 昭和62年10月31日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年2月23日。

^{*1} 正員、東北大学高速力学研究所 (〒980 仙台市片平2-1-1)。

2. 理論解析

図1に片持送水管のテンドン制御系を示す。長さ L 、曲げ剛性 EI 、単位長さ当たりの質量 m_b の一様な管の内部を、単位長さ当たりの質量 m_f の非圧縮性流体が一定速度 V で流れており、固定端より L_a の位置にテンドンが取り付けられているものとする。流速 V を増加させるとある速度において送水管は不安定となり、ダイバージェンス（静的座屈）やフラッタ（不安定振動）が発生するが、そのときの送水管の応答をセンサで検出し、その信号をもとにある制御則に従って固定端のラム（アクチュエータ）により制御変位 $U(t)$ を与えると、管の両側に取付けられた一組のテンドンによって制御トルク $M(t)$ が発生し、これにより送水管を安定化する問題を考える。管は Kelvin-Voigt 形の粘弾性材と仮定し、 E^* 、 C をそれぞれ内部および外部粘性係数、 W をたわみとすると、図1の片持送水管の運動方程式および境界条件は次式で与えられる⁽²⁾。

$$w_{,xxxx} + v^2 w_{,xx} + 2\sqrt{\beta} v w_{,xt} + w_{,xtt} + \mu w_{,t} - ke\{ew_{,x}(\xi_a) + u(\tau)\}\delta_{,x}(\xi - \xi_a) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$w(0, \tau) = w_{,x}(0, \tau) = w_{,xx}(1, \tau) = w_{,xxx}(1, \tau) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここでコンマ後の添字はそれらに関する偏微分を意味し、 $\delta(\xi)$ はディラックのデルタ関数である。なお上式においては簡単のため、次のような無次元量を導入した。

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, w = \frac{W}{L}, e = \frac{d}{L}, u = \frac{U}{L} \\ \xi_a &= \frac{L_a}{L}, k = \frac{KL^3}{EI}, v = VL\sqrt{\frac{m_f}{EI}} \\ \beta &= \frac{m_f}{m_f + m_b}, \mu = \frac{E^*I}{L^2\sqrt{EI(m_f + m_b)}} \\ \nu &= \frac{CL^2}{\sqrt{EI(m_f + m_b)}}, \tau = \frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m_f + m_b}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで t は時間である。境界条件式(2)を考慮してた

図1 片持送水管のテンドン制御系

わみ w を次式のように仮定する。

$$w(\xi, \tau) = \sum_{m=1}^N a_m(\tau) \phi_m(\xi) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_m(\xi) &= \cosh \alpha_m \xi - \cos \alpha_m \xi \\ &\quad - \sigma_m (\sinh \alpha_m \xi - \sin \alpha_m \xi) \\ \sigma_m &= \frac{\sinh \alpha_m - \sin \alpha_m}{\cosh \alpha_m + \cos \alpha_m} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式において $a_m(\tau)$ は時間に関する未知関数であり、 $\phi_m(\xi)$ は片持ばりの正規化された固有関数、 α_m は次の振動数方程式の根である。

$$1 + \cosh \alpha_m \cos \alpha_m = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(4)を式(1)に代入してガレルキン法を適用し整理すると、結局次式を得る。

$$\sum_{m=1}^N (D_{rm} \ddot{a}_m + E_{rm} \dot{a}_m + F_{rm} a_m) = G_r u(\tau) \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} D_{rm} &= \delta_{rm}, E_{rm} = 2\sqrt{\beta} v b_{rm} + (\mu \alpha_m^4 + \nu) \delta_{rm} \\ F_{rm} &= v^2 c_{rm} + \alpha_m^4 \delta_{rm} + ke^2 \phi_{r,\xi}(\xi_a) \phi_{m,\xi}(\xi_a) \\ G_r &= -ke \phi_{r,\xi}(\xi_a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{rm} &= \frac{4}{(\alpha_r/\alpha_m)^2 + (-1)^{r+m}} \\ c_{rm} &= \begin{cases} \frac{4(\alpha_m \sigma_m - \alpha_r \sigma_r)}{(-1)^{r+m} - (\alpha_r/\alpha_m)^2} & (r \neq m) \\ \alpha_r \sigma_r (2 - \alpha_r \sigma_r) & (r = m) \end{cases} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここでドット ($\cdot$) は無次元時間 τ に関する微分を意味し、 δ_{rm} はクロネッカーのデルタである。

制御変位 $u(\tau)$ の制御則を決定するために、最適レギュレータ理論を適用する。そのため式(7)を状態方程式で表すと次式を得る。

$$\dot{x}(\tau) = A x(\tau) + B u(\tau) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$x(\tau) = [a_1, a_2, \dots, a_N, \dot{a}_1, \dot{a}_2, \dots, \dot{a}_N]^T \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -F & -E \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} \\ E &= [E_{rm}], F = [F_{rm}], G = [G_r] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで T は転置を意味する。また出力方程式は

$$\left. \begin{aligned} w(\tau) &= C x(\tau) \\ C &= [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N, 0, 0, \dots, 0] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。片持送水管の安定化を実現するために、できるだけ少ない制御エネルギーで管のたわみをすみやかに零にする必要がある。そこで本研究では次のような二次形式評価関数を設定する。

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \left[\int_0^1 w^2 d\xi + r u^2(\tau) \right] d\tau \\ &= \int_0^\infty [x^T Q x + r u^2(\tau)] d\tau \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで r は重み係数である。最適レギュレータ理論⁽¹³⁾によるとこの場合の最適レギュレータは

$$\dot{x}(\tau) = Sx(\tau), S = A - r^{-1}BB^TP \quad (14)$$

最適制御入力 (変位) $u^*(\tau)$ は

$$u^*(\tau) = -r^{-1}B^TPx(\tau) \quad (15)$$

で与えられる。ここで P は次のリカッティの行列方程式と呼ばれる

$$PA + A^TP - r^{-1}PBB^TP + Q = 0 \quad (16)$$

を満たす正定唯一解である。次に未知関数 $a_m(\tau)$ を

$$a_m(\tau) = \bar{a}_m e^{i\omega\tau} \quad (17)$$

とおくと、式(14)より自明でない解が存在する条件から次の特性方程式を得る。

$$|S - i\omega I| = 0 \quad (18)$$

結局、問題は行列 S の固有値を求めることに帰着される。一般に ω は複素数であり次式で表せる。

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \quad (19)$$

系の安定性は ω の虚部 ω_I の符号を調べることで求めることができる。すなわち、すべての ω_I が正ならば系は安定であるが、 ω_I のどれか一つでも負であれば系は不安定となり、ダイバージェンス流速は $\omega_R = \omega_I = 0$ の条件から、フラッタ流速は $\omega_R \neq 0, \omega_I = 0$ の条件から求めることができる。

3. 計算結果

2章までの解析結果にもとづき、片持送水管の安定性に及ぼすテンドンの影響、ならびに制御した場合の効果について詳細な数値計算を行った。その際、未定係数は10項とれば収束は十分であった。なお外部減衰は微小であるので無視した ($\nu = 0$)。

3.1 限界流速に及ぼす内部減衰の影響 図2はテンドンを取付けない場合の限界流速 v_{cr} と質量比 β との関係を示したものである。 $0 < \beta < 0.3$ では減衰の安定化効果が認められるが、 $0.3 < \beta < 1.0$ では逆に内部減衰 μ が大なるほど v_{cr} は著しく低下しており、送水管を不安定化していることがわかる。また、 β が微小な場合 [図2(b)] にも減衰の存在は系を不安定化する。減衰がない場合 ($\mu = 0$)、 $\beta = 0$ に対しては $v_{cr} = 4.48$ [図2(b)の●印]、微小な β に対しては $v_{cr} = 4.18$ [図2(b)の○印] となり限界流速が不連続的に変化している。これは、前者は一次と二次のモードが合体してフラッタとなっているのに対して、後者は二次のモードが不安定となるフラッタであり、不安定となるモードが異なっているためである。これらのことは最近 Lottati ら⁽¹⁴⁾も同様な指摘を行っている。

3.2 テンドンの影響 テンドンは取付けるが制御しない場合、すなわち安定性に及ぼすテンドンの影響について考察する。

図3はテンドンの剛性が送水管の安定性に及ぼす影

響について示したものである。これらの図より次のことがわかる。一般に、テンドンの剛性パラメータ ke^2 が増加するにつれて、ダイバージェンス流速は低下するが、フラッタ流速は β およびテンドンの取付位置 ξ_a が比較的小さい場合には増加し、大きい場合には複雑に変化しながら低下する。また送水管は ke^2 が小さい場合はフラッタで、大きい場合はダイバージェンスで安定性を失う。このように不安定の形がフラッタからダイバージェンスへ遷移する際には、限界流速の大幅な低下を伴う。フラッタ流速は β が大なるほど大きいので、遷移に伴う限界流速の低下の割合は β が大きいほど著しい。テンドンを取付けたときの安定性に及ぼす減衰の影響については、基本的には図2に示したテンドンを取付けない場合と同様であり、 β が小さい場合には系を安定化するが大きい場合には不安定化する。なお $\xi_a = 1.0$ で ke^2 が無限大の場合、自由端はもはや自由端ではなく、変位は許すが回転は許さないという境界条件になる。このときの限界流速は π であり、 $v_{cr}^2 = P_{cr} = \pi^2$ は上記境界条件における長柱のオイラー座屈荷重に一致している。

図4は送水管の安定性に及ぼすテンドンの取付位置の影響を、テンドンの剛性パラメータが $ke^2 = 10$ の場合について示したものである。送水管は $0 < \xi_a < 0.4$ に対してはフラッタで、 $0.4 < \xi_a < 1.0$ に対してはダイバージェンスで安定性を失う。テンドンの取付位置が固定端から自由端へ移動するにつれて、フラッタ流速はほぼ増加の傾向にあるが、ダイバージェンス流速は単調に減少している。したがって制御しないでテンドンのみで送水管の安定化を図る場合、最も効果的な位置は不安定の形がフラッタからダイバージェンスへ遷移

図2 限界流速 v_{cr} に及ぼす内部減衰 μ の影響 (テンドンを取付けない場合)

図 3 限界流速 v_{cr} に及ぼすテンドンの剛性 ke^2 の影響 (制御しない場合)

する位置 ($\xi_a=0.4$) である。逆に最も不安定化する位置は自由端 ($\xi_a=1.0$) である。杉山ら⁽⁴⁾は片持送水管の安定性に及ぼすばね支持の影響について調べており、本研究で得られた図 3, 4 の結果は、定性的には杉山らの結果とほぼ同様な傾向を示している。

3.3 テンドン制御法の安定化効果 テンドン制御法の有効性を検討するため、制御しない場合とした場合について送水管の応答の比較を行った。

図 5 は一例として $\mu=0$, $\beta=0.5$, $\xi_a=0.5$, $ke^2=10$, $r=0.01$ の場合の送水管のたわみ w と制御変位 u の時間応答を示したものである。これらの図は図 3 (b) の点 (a) ~ (c) に対応しており、点 (a) は流体が流れていない場合、点 (b), (c) はそれぞれダイバージェンスおよびフラッタ形の不安定状態である。なお初期条件は自由端の初期変位を $w_0=0.1$ としており、図 5 中の細線は制御しない場合の応答、太線は制御した場合の応答であり、 ξ_R は送水管の応答位置を表している。

図 4 限界流速 v_{cr} に及ぼすテンドンの取付位置 ξ_a の影響 (制御しない場合)

通常の片持ばりにテンドンを取付けたときの自由振動応答が図5(a)の細線であり、これを制御すると太線のように良好に制振されていることがわかる。図5(b), (c)のような不安定な場合も制御することにより応答は急速に零となり、安定化されていることがわかる。

3・4 テンドンの最適位置 図6はテンドンを取付ける場合、どの位置が最適であるかを検討するために、 $\mu=0, \beta=0.5, ke^2=10, r=0.01$ の場合について、テンドンの取付位置 ξ_a を固定端から自由端まで変化させたときの評価関数 J [式(13)] の変化を示したものである。どの流速においてもおおむね $\xi_a=0.4$ におい

て評価関数は最小となっている。そこで $v=13.0$ の場合について評価関数が最小と最大になる位置における応答解析を図7に示す。 $\xi_a=0.38$ では変位もすみやかに零となりそのときの制御変位も小さいが、 $\xi_a=0.99$ では安定化はされているもののたわみは激しく変動しており、制御変位も大きな値となっている。

3・5 制御変位に制限がある場合 以上の解析では、式(16)の最適制御変位は無制限に与えることができるとしてきた。しかしながら実際にはアクチュエータの発生する制御変位には限度があり、その場合にも良好な安定化効果があるかどうか検討する必要がある。図8は図5と同一条件の下で、制御変位の制限量

図5 片持送水管のたわみ w と制御変位 u の時間応答

図6 評価関数 J の変化

図7 評価関数の最小値および最大値における応答解析

図 8 制御変位 u に制限がある場合の応答解析 ($\xi_s=0.5$)

u_L を種々変化させたときの応答を示したものである。図 8 (a) では制御量に制限がない場合、 u の最大値は約 0.4 で非現実的な値となっているが、制限量を $u_L=0.025$ とした場合でもオーバーシュートは見られるものの良好に制振されていることがわかる。図 8 (b) のダイバージェンスの場合は $u_L=0.001$ でも安定化はされているが、これより小さい場合はもはや安定化することができない。図 8 (c) のフラッタの場合も $u_L=0.02$ では良好に安定化されているが、 $u_L=0.01$ では不安定になることがわかる。

4. 結 論

片持送水管の安定性とその能動制御について、ガレルキン法と最適レギュレータ理論を適用して理論的な研究を行った。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 制御しない場合、片持送水管の安定性に及ぼすテンドンの剛性、テンドンの取付位置および内部減衰の影響を明らかにした。

(2) テンドン制御法により、片持送水管のフラッタやダイバージェンスなどの不安定現象を安定化できることを、応答および制御変位のシミュレーションにより確認した。

(3) 実用上重要な制御量に制限がある場合もテンドン制御法は安定化効果があることを示した。

なお本研究の一部は昭和 61 年度文部省科学研究費補助金〔奨励研究(A)〕によることを付記し謝意を表する。

文 献

- (1) Gregory, R. W. and Paidoussis, M. P., *Proc. R. Soc., Ser. A*, **293** (1966), 512, 528.
- (2) Paidoussis, M. P. and Issid, N. T., *J. Sound Vib.*, **33** (1974), 267.
- (3) Bishop, R. E. D. and Fawzy, I., *Philos. Trans. R. Soc. A*, **284**-1316 (1976).
- (4) 杉山・ほか 3 名, 機論, **51**-463, A (昭 60), 95.
- (5) 杉山・ほか 3 名, 機論, **51**-467, C (昭 60), 1506.
- (6) Yao, T. P., *ASCE J. Struct. Div.*, **98** (1972), 1567.
- (7) Yang, J. N., *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, **101** (1975), 819.
- (8) Roorda, J., *ASCE J. Struct. Div.*, **101** (1975), 505.
- (9) Yang, J. N. and Giannopoulos, F., *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, **104** (1978), 1159.
- (10) Leipholz, H. H. E., *Structural Control*, (1980), North-Holland.
- (11) Doki, H. and Tani, J., *Proc. Int. Con. Comp. Mech.*, (1986), VI 47, Springer-Verlag.
- (12) 土岐・ほか 2 名, 東北大学速研報告, **57** (昭 62), 81.
- (13) 小郷・美多, システム制御理論入門, (昭 54), 156, 実教出版.
- (14) Lottati, I. and Kornecki, A., *J. Sound Vib.*, **109** (1986), 327.