歯車装置の機械特性に関する研究*

(第8報, 支持系に連成した歯車段の挙動に関する考察)

小 島 昌 一*¹

A Study on the Dynamics of Geared System

(8th Report, Torsion-Translation Coupled Behavior at Gear Support)

Masakazu KOJIMA

The dynamic behavior of a geared system may mainly depend on the torsional vibration, however, sometimes a coupled influence with its support system may not be neglectable. In spite of many recent theoretical papers in this field of interest, a typical behavioral system rule of this coupled system is not yet well discussed compared to the torsional behavioral system rule. This paper deals with this translation coupled dynamic system rule of a geared stage concerning the DOLF (K_A) frequency region and a rather high DLF (K_V) frequency area employing the normal mode method and the receptance operator technique.

Key Words: Dynamics of Machinery, Gear, Vibration of Rotating Body, Translation Coupled Behavior, Dynamic Load Factor

1. 緒 言

歯車装置系の挙動は第一義的にねじり振動に依存するものと考えられるが、挙動の定量的システムルールの理解には歯車支持系の影響の考慮を必要とする場合があるものと考えられる。

歯車支持系の変形挙動は取扱いの容易さから translation で近似されることが多い。translation とは、歯車段において軸や軸受に依存した支持剛性に依拠して歯車のねじり回転中心が作用線に平行に移行 (translate or slip) する変位モードの意であり、歯対の相対変位でねじりと連成する。ここに歯車装置系をねじり-translation 連成系として見るとき、問題の本質には変わりはないものの、二つの立場があるものと考えられる。一つは⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾、歯車を部分系の剛体的接続要素としてとらえ、軸系のねじりと曲げの連成挙動、主として歯車軸回転数と連成固有値との重なりを問題とする立場である。他は⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹⁰⁾歯車の動荷重への支持系の影響、主としてかみあい周波数と固有値との重なり、を問題とする立場である。これら二つの立場は動挙動

の依存する周波数帯域が異なるためモデル化や結論づけも異なる。前者はどちらかと言えば外部励振下の、本研究⁽¹⁾で言うところの、DOLF (Dynamic Over Load Factor=動過負荷係数)あるいは K_A (ISO 歯車設計公式アプリケーション係数)に関連付けられる。後者は内部励振下の DLF (Dynamic Load Factor=動荷重係数)⁽²⁾あるいは K_V (ISO) の算出を目的としている。

しかし、多くの場合 translation 変形の自由度は単段の2歯車体についての作用線方向に2と低く、実験もほとんど行われていないことからモデルの定量的信頼性は不明である。また上述の二つの立場の混同も生じたり従来のねじり系についてのシステムルールとの差異が明確にされない場合も多い。ここにシステムルール⁽¹⁾⁽²⁾とは系の持つ構造や運転条件を、系の形、システムパターンとしてとらえるとき対応する挙動の規則性を意味する。

本報では、歯車段のねじり-translation 連成挙動の一般的システムルールに関する考察にひきつづき、弱い連成系と強い連成系にわけてモデル化の妥当性を含め主としてかみあい周波数と固有値の重なりを問題とする第2の立場から考察を行う。用いる解析手法は動力学における正規モード法ならびに前報⁽²⁾において提

* 昭和62年10月7日 第945回講演会において講演、原稿受付 昭和61年10月1日。

*¹ 正員、山洋電気(株) (〒170 東京都豊島区北大塚 1-15-1)。

案した receptance 演算子法である。

用語定義

- M : 質量マトリックス (I_i, m_i)
 C : 減衰マトリックス (C_i)
 K : 剛性マトリックス (K_i, K_{ij})
 Q : 外力ベクトル (Q_i)
 X : 変位ベクトル (θ_i, X_i)
 I_i : 質点 i の慣性モーメント
 m_i : 質点 i の質量
 c_i : 質点 i にかかわる減衰係数
 γ : 減衰比
 k_{ij} : 質点 ij 間のねじり剛性
 k_{ix} : 質点 i の translation 剛性
 r_{gi} : 歯車 i の基礎円半径
 δ_{ij} : 歯対 ij 間の相対変位
 Q_i : 質点 i に作用する外力
 θ_i : 質点 i の回転変位
 x_i : 質点 i の translation 変位
 ω : Fourier 変換パラメータ

2. 歯車段のねじり-translation 連成挙動のシステムルールの概略

図1は一对の歯車のかみあいを集中質点とそれらを継ぐ質量を伴わない剛性でモデル化した四自由度ねじり-translation 連成系を示している。ここに簡単のため歯面摩擦を介した作用線に垂直な方向との連成を無視して、かみあい作用線方向の translation 剛性のみ考慮している。その剛性値は軸受剛性と軸曲げ剛性より推定する。かみあい剛性はかみあい率に応じて時間依存であり、作用方程式は次の係数励振形におく。

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + K(t)X = Q \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに変位ベクトルは、 $X = [x_1 x_2 : \theta_1 \theta_2]^T$ 、また剛性マトリックスは次式におく：

$$\begin{bmatrix} k_{ix} + k_{ij} & -k_{ij} & r_{gi}k_{ij} & -r_{gj}k_{ij} \\ -k_{ij} & k_{jx} + k_{ij} & -r_{gi}k_{ij} & r_{gj}k_{ij} \\ \hline r_{gi}k_{ij} & -r_{gi}k_{ij} & (k_{i,i-1} + r_{gi}^2 k_{ij}) & -r_{gi}r_{gj}k_{ij} \\ -r_{gj}k_{ij} & r_{gj}k_{ij} & -r_{gi}r_{gj}k_{ij} & r_{gj}^2 k_{ij} + (k_{j,j+1}) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

駆動および被動側のモデル化の自由度に応じ、上記の基本剛性マトリックスは容易に接続拡張されうる。以下においては大きなブルギヤに小さなピニオンがかみあうような場合を想定し、図2に示す駆動系を含む縮約三自由度モデルの連成挙動の概略につき考えてみ

る。図2中 k_t, k_s, k_z は軸のねじり剛性、歯車の支持剛性およびかみあい剛性である。

図2の系の減衰を省略した作用方程式を次式に置く：

$$\begin{bmatrix} I_m \\ I \\ m \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_m \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t & -k_t & 0 \\ -k_t & k_t + \gamma_g^2 k_z & \gamma_g k_z \\ 0 & \gamma_g k_z & k_z + k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m \\ \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_m \\ 0(q_z) \\ q_e \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに q_m は駆動エレメント I_m に作用する外部励振トルクを、 q_e は歯車の偏心取付けなどに依存する内部励振力を、 q_z はかみあい剛性変動やかみあい誤差による内部励振力を示している。連成挙動システムルールの特徴は、系をねじり系として見たときのかみあいに依存した固有値を p_z 、translation 系として見たときの固有値を p_t と表示するとき、それらの大小関係により以下の三つのクラスに分け明らかにするのがよいと考える。

- $p_t \ll p_z$ の関係の下で一般にねじり、translation を分離して扱い得る場合（一般に連成の取扱いを必要としない場合、弱い連成）。
- 歯数を Z として $p_t, p_z/Z$ (= 軸回転数) が似かよった帯域にあり、軸回転数を基準として連成の考慮が必要となる場合（低域の連成）。
- p_t, p_z がともに高くかつ似かよった帯域にあ

図1 単段ねじり-translation モデル

図2 弱い連成系のピニオン側解析モデル

りかみあい周波数を基準として連成の考慮が必要となる場合(高域の連成, 強い連成)。

これらの領域で解析の取扱いは統一的でない。以下において(a)および(b)の挙動のシステムルールの概要を示す。簡単のため減衰は省略する。

(1) $q_m = q(t)$, $q_e = 0$, ($q_z = 0$) の外部励振下の

DOLF 式(3)で k_z に時間平均値を用い Fourier 変換を施す。一般的なシステムパターン $I \ll I_m$ および $k_t \ll r_g^2 k_z$, $k_t \ll r_g^2 k_s$ の関係を考慮して, 特性方程式は次式となる。

$$\Delta \approx \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_s} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_z} \right)^2 \right\} \dots \dots (4)$$

ここに,

$$p^2 \approx \frac{k_t}{I_m}, \quad p_s^2 \approx \frac{k_s}{m}, \quad p_z^2 \approx \frac{r_g^2 k_z}{I}$$

である。周波数空間における歯対の相対変位の表示は次式となる。

$$\bar{\delta} = r_g \bar{\theta} + \bar{x} \approx \frac{\bar{q}_m}{r_g k_z} \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 \right\}} \dots \dots \dots (5)$$

式(5)は歯面力の DOLF がおおむね p にのみ依存することを示している。この DOLF の内部構成は次式による。

$$r_g \bar{\theta} \approx \frac{\bar{q}_m}{r_g k_z} \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 \right\}} \left[1 + \frac{k_z}{k_s} \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_s} \right)^2 \right\}} \right]$$

および,

$$\bar{x} \approx - \frac{\bar{q}_m}{r_g k_s} \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_s} \right)^2 \right\}} \dots \dots \dots (6)$$

すなわち回転と translation は p_s に依存する項が互いに符号が逆で DOLF 内部で打ち消しあっていることがわかる。換言すれば, 外部励振が p_s で調和的なとき, DOLF 値に変化はないが支持系の振幅増減に対応し反対位相で歯車体の回転振幅も増減する。励振周波数と p_s が一致するときの支持剛性を限界支持剛性 $k_s \text{ cr.}$ と以降よぶことにする。あらかじめ外部励振周波数がわかっているとき設計上 $k_s \text{ cr.}$ は避けるべきである。

(2) $q_m = 0$, $q_e = q(t)$, ($q_z = 0$) の内部励振下の

DOLF 具体的には q_e は歯車の偏心等に対応し, 軸回転程度の周期を持つ励振 ($q_e \propto \omega^2$) である。先と同様の手順で次式を得る。

$$\bar{\delta} \approx - \frac{\bar{q}_e}{k_s} \left(\frac{I_m}{r_g^2 k_z} \right) \omega^2 \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_s} \right)^2 \right\}} \dots \dots \dots (7)$$

(3) $q_m = q_{m0}$ (一定), $q_e = 0$, $q_z \neq 0$ の内部励振下

の **DLF** および **DOLF** かみあいに伴う内部励振は係数励振として扱う必要があるが, ここでは簡単のため近似的な外力 q_z に置換して大まかな考察を行う。先と同様の手順により歯対の相対変位は次式となる。

$$\bar{\delta} \approx \frac{\bar{q}_z}{r_g k_z} \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_z} \right)^2 \right\}} \dots \dots \dots (8)$$

これを構成する各変位成分は次のようである。

$$r_g \bar{\theta} \approx \frac{\bar{q}_z}{r_g k_z} \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_z} \right)^2 \right\}} \left[1 + \frac{k_z}{k_s} \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_s} \right)^2 \right\}} \right]$$

および,

$$\bar{x} \approx - \frac{\bar{q}_z}{r_g k_s} \frac{1}{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_z} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{p_s} \right)^2 \right\}} \dots \dots \dots (9)$$

ここに, 回転の第2項と translation は逆位相でありかみあい周波数が p_s あるいは p_z 近傍でねじり振動は支持部の振動を増大せしめる傾向を持つ。

以上のおおまかな検討はねじりと translation の弱いかかわりあいの定性的システムルールを示すものである。3章以降, クラス(b)と(c)のより強い連成系のシステムルールを詳しく調査し, あわせ translation 連成モデルの妥当性についても検討する。なお, 系が第一義にねじり変形に依存することから歯車系をねじり系として見たシステムルールの整理が現在進んでおり, 今後は支持系との連成に特有のシステムルールにつき補足を行っていくのが良いと考える。

3. 弱いねじり-translation 連成系における 過渡連成 DOLF(K_A) のシステムルール

ここに, 弱い連成とは2章においても述べたごとく, translation 挙動が比較的低い固有値に依存し, 比較的高い固有値に支配される歯の動荷重との干渉が少ない場合の意である。しかし軸系で発生した過渡的な

1:electric motor 2-3-4,26-27:Cardan shafts
5,6,7:helical gears 18-19,28-29:Bevel gears
30,31,32,33:wheels

図3 直行カルダン式電駆動系

translation 振動は歯面力の上昇につながりうる。本章ではそのような実機例として駆動力除荷時に歯車の破損が発生したカルダン式電車駆動系を translation ねじり連成系としてとらえ、計測された振動挙動につき考察を加える。

図3は全系の概観図であり、図4は全系を四自由度 translation, 十七自由度ねじり集中質量でモデル化したものである。図3, 4において、1=モータ、2-3-4, 26-27=カルダン継手軸、5, 6, 7=はすば歯車、18-19, 28-29=かさ歯車、30, 31, 32, 33=車輪を示している。図5は歯車箱と車輪軸の部分系(a)とそのモデル(b)を示している。歯車箱の支持剛性はかさ歯車段 18-19(28-29)のピニオンの translation パネとして作用し、ホイールは車軸と軸受で支持されている。第1報

図4 直行カルダン式電車駆動系のねじり-translation モデル

図5 歯車箱付近のねじり-translation モデル

図6 除荷時過渡軸トルクの計測結果

で引用したクイル式電車系の場合と同様、車体の車軸上で評価した質量は極めて大きな値となるので、車輪をレール上固定の fixed-fixed モデルを用い第1報と同じ手順で固有値を算出すれば、3.48 (4.65, 13.05, 110.67, ... Hz) であり、図6に示す軸3-4におけるねじり振動実測値約 3.5, 10 Hz とほぼ対応がとれる。〔図6(a)は原記録、図6(b)はそれよりのトレースを示す。〕このうち、3.5 Hz は translation 部に依存して定まり、10 (13.5) Hz は全系に及ぶねじり主共振点と考えられる。この系は定常運転中に急激なモータにおける除荷を行った後歯車および軸継手の破損に至った。減衰係数など不明で定量的な推計は行い得ないが、破損時の挙動は定性的には以下のように考えられよう。すなわち図6の計測に見るごとく、歯車箱に対しても除荷力が作用し約 3.5 Hz の translation 振動が発生し歯面力が上昇し軸トルクも上昇するものと推察される。この振動は早い減衰で約 1 s 後に消滅する。しかし除荷により同時に励起されたねじり固有モード〔10 (13.5) Hz 固有値〕は減衰が比較的低くその後も残留するものと思われる。なお、この除荷振動によるねじり振動振幅増大はねじり系あるいは translation 系のみ分離して扱った場合には説明がつかない。

この事例にも見るごとく分類上は弱い連成系と考えられる場合でも、過渡 DOLF に関して連成系としての扱いが必要な場合があるものと考えられる。

4. 強いねじり-translation 連成下の DLF(K_v) に関連した挙動のシステムルール

ねじり-translation 連成が弱い場合 DLF (K_v) 挙動のシステムルールに加えるべき、連成系固有の、新たなルールは限られており⁽⁶⁾⁽⁷⁾ おおむねねじり系として見たときのルールに依存する。比較的細く長い軸上の歯車対の DLF はねじり系を支持系と分離して評価しうる。このねじり系として扱える場合の計算と実測との対応は実用上十分と考えられ、ISO の歯車設計公式の K_v (=DLF) 係数算出の基礎となっている。

他方、今日の歯車装置の小形化、大容量化と高速化の傾向により、歯車の支持剛性が高く系のねじりと支持系曲げの連成が無視し得ない場合も生じているものと考えられる。ここに支持部曲げ挙動を translation でモデル化することは、歯車軸や軸受がもたらす影響の極めて初等的な考慮であるためモデルの適用可能範囲は限られるものと考えられる。他方でモデル化の簡便さからこのねじり-translation 連成モデルは安易に多段系にまで適用される傾向にある。そこで本章では西ドイツ Munich 工科大学 FZG における高速単段系

(=FZG 動力循環式試験機) による実験結果とそのねじり-translation モデルによる計算値との対比を, クラス(c)の問題として行い, モデルの適合度について考えてみる。

4.1 Knabel(FZG) 実験の概要⁽³⁾ 詳しくは原著によることとし, 本節では実験系と計測結果の概略を記す。

ここに検討対象とする測定項目は以下の2項である。

(1) 歯車の回転角加速度の RMS 実効値: 半径 35 mm の周上に設置の加速度計出力を 1 m/s^2 を基底として dB 表示。

(2) かみあい作用線方向の軸受変位加速度の RMS 実効値: 1 m/s^2 を基底として dB 表示。

この系の translation 剛性の歯対剛性に対する比は $\varepsilon = k_s/k_z = 2.375\text{--}3.0$ の領域にあり, 質量や剛性の分布は表1の3仕様についておおむね共通である。2-ねじり, 2-translational の四自由度 free-free モデルの固有値は約 $p_1 = 2.2 \text{ kHz}$, $p_2 = 3.0 \text{ kHz}$ および $p_3 = 4.9 \text{ kHz}$ であり, モード形状は図7に見るごとくである。このうち, p_1 と p_3 のモードは歯面力に寄与するが p_2 モードはほぼ対称のシステムパターンに依存して歯面力と無関係の歯車対一体の剛体モードである。 p_1 モードは $(r_{g1}\theta_1 - r_{g2}\theta_2)$ と $(x_1 - x_2)$ が異符号 p_3 モードでは同符号となる。この系をねじり系として見たときの固

表1 試験歯車仕様

common: spur gear, tool pressure angle = 20° ,
data addendum modification coefficient = 0.53,
tace width = 15 mm,
center distance = 91.5 mm,
operating speed = 1 000–25 000 rpm)

tooth pair number	number of teeth Z	module mm	contact ratio ε_e	DIN class
1	60	1.5	1.66	3
2	45	2.0	1.63	5
3	30	3.0	1.56	4

$p_1 = 2.2 \text{ kHz}$ $p_2 = 3 \text{ kHz}$ $p_3 = 4.9 \text{ kHz}$

図7 固有モード線図 (四自由度 free-free モデル)

有値 p_0 (約 3.5 kHz) は p_1 と p_3 とは異なり, 連成により固有値の分割が生じている。これらの $p_{1,2,3}$ は Knabel の実測とおおむね一致する。したがって連成系としての扱いが不可欠の系と考えられる。

しかし, 振幅やその速度, 加速度が定量的にこのモデルで推定可能かどうかについてはさらに検討を進める必要がある。

4.2 ねじり-translation 連成の receptance 演算子法解析⁽²⁾ モデルでは支持系曲げ変位の translation 近似に加え, 次の仮定を踏まえる。

(1) 線形挙動の仮定。(なお解は Neumann 級数第2項までとり高次調波共振の考慮をふくむ。)

(2) 主質量に対応する主変位に関して比例減衰を仮定。

(3) 歯対剛性変動パターンは解析上任意であるが, とくに補正の根拠を見いだせないので数値計算においてはく形変動を仮定。

(4) 解析上は許容されるが, 数値計算においてはかみあい誤差をふくまないとの仮定。

式(2)において歯対剛性 k_{12} は平均成分 k_{120}^* と変動幅 k_{12z} の和で表示する。またこのモデルの歯対の相対変位 δ_{12} は次式で表示する。

$$\delta_{12} = r_{g1}\theta_1 - r_{g2}\theta_2 + x_1 - x_2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

系の基礎方程式に超関数の意味での Fourier 変換をほどこす。変換形に $\bar{\quad}$ を付し次の Convolution 表現

$$\bar{\delta}_{12}k_{12} = \bar{\delta}_{12} * \bar{k}_{12} \quad \dots\dots\dots (11)$$

を用いて周波数空間内の基礎式は次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{12}(\omega) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1(\omega)}{\Delta(\omega)} \bar{\delta}_{12}(\omega) \frac{k_{12z}(\omega - \xi)}{k_{120}^*} d\xi \\ = \frac{\Delta_2(\omega)}{\Delta(\omega)} \bar{q}_0 \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここに, $\mathbf{Q} = [0 \ 0 \ Q_0 \ 0]^T$, $\bar{q}_0 = \bar{Q}_0/r_{g1}^2 k_{120}^*$

$$\frac{k_{12z}(\omega)}{k_{120}^*} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \{ \delta(\omega + n\beta) + \delta(\omega - n\beta) \}$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{n} \sin \{ n\pi(\varepsilon_e - 1) \}, \quad \lambda = \frac{k_{12z}}{k_{120}^*}$$

式(12)を δ_{12} について解いて時空間における変位成分の表示式をうる。

$$\delta_{12} / \left(\frac{Q_0}{r_{g1} k_{120}^*} \right) \simeq 1 - \Gamma(1) \quad \dots\dots\dots (13)$$

および,

$$\theta_1 / \left(\frac{Q_0}{r_{g1}^2 k_{120}^*} \right) \simeq 1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - \Gamma(6) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$x_1 / \left(\frac{Q_0}{r_{g1} k_{1x}} \right) \simeq -1 - \varepsilon_1 \Gamma(4) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに,

$$\Gamma(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[\frac{\Delta_m(-n\beta)}{\Delta(-n\beta)} e^{in\beta t} + \frac{\Delta_m(n\beta)}{\Delta(n\beta)} e^{-in\beta t} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \lambda_k \left[\frac{\Delta_m \{-(n+k)\beta\} \Delta_1(-k\beta)}{\Delta \{-(n+k)\beta\} \Delta(-k\beta)} e^{i(n+k)\beta t} \right. \\
 & + \frac{\Delta_m \{-(n-k)\beta\} \Delta_1(k\beta)}{\Delta \{-(n-k)\beta\} \Delta(k\beta)} e^{i(n-k)\beta t} \\
 & + \frac{\Delta_m \{(n-k)\beta\} \Delta_1(-k\beta)}{\Delta \{(n-k)\beta\} \Delta(-k\beta)} e^{-i(n-k)\beta t} \\
 & \left. + \frac{\Delta_m \{(n+k)\beta\} \Delta_1(k\beta)}{\Delta \{(n+k)\beta\} \Delta(k\beta)} e^{-i(n+k)\beta t} \right]
 \end{aligned}$$

および,

$$\varepsilon_i = k_{ix}/k_{120}^*$$

(a) 歯車対 1 ($\varepsilon_e=1.66$)

(b) 歯車対 2 ($\varepsilon_e=1.63$)

(c) 歯車対 3 ($\varepsilon_e=1.56$)

図 8 歯車回転角加速度 RMS 値の計算, 実測対比 ($\lambda=0.4$)

$$\omega_{mi}^2 = k_{120}^*/m_i, \quad \omega_{ti}^2 = r_{gi}^2 k_{120}^*/I_i$$

$$x_{mi} = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{mi}} \right)^2 - i2\gamma \left(\frac{\omega}{\omega_{mi}} \right)$$

$$x_{ti} = 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ti}} \right)^2 - i2\gamma \left(\frac{\omega}{\omega_{ti}} \right)$$

$$X_{mi} = x_{mi} - 1 + \varepsilon_i, \quad X_{ti} = x_{ti} - 1$$

$$\Delta_1 = X_{m1} X_{m2} (X_{t1} + X_{t2}) + (X_{m1} + X_{m2}) X_{t1} X_{t2}$$

$$\Delta_2 = r_{g1} X_{m1} X_{m2} X_{t2}, \quad \Delta_4 = X_{m2} X_{t1} X_{t2}$$

$$\Delta_5 = X_{m1} X_{m2} X_{t2}$$

$$\Delta = \Delta_1 + X_{m1} X_{m2} X_{t1} X_{t2}$$

である。

4.3 Knabel の実験結果と計算値との対比

Knabel は使用した FZG 試験機系のパラメータを以下のように推定している。

$$I_1 = I_2 = 2.9 \times 10^{-3} \text{ kgm}, \quad m_1 = m_2 = 3 \text{ kg}$$

$$k_{120} = 4. \times 10^3 \text{ N/m}, \quad C_{12} = 2.0 \text{ Ns/mm}^{-1}$$

$$k_{x1} = 1.2 \times 10^9 \text{ N/m}, \quad C_{x1} = C_{x2} = 0.25 \text{ Ns/mm}^{-1}$$

$$k_{x2} = 0.95 \times 10^9 \text{ N/m}$$

以下の計算においては, 表 1 に示す 3 歯車対に上記のデータを共通に用いる。計算結果と実験結果の対比においては p_3 を基準として計算値に数%の補正をあたえて重ね合わせを行った。数値計算に際してかみあい部 $\gamma=0.07$, translation 部でその 1% にとり, 解の級数和を 20 で打ち切りとした。 $\lambda=0.5-0.3$ を用いた。

図 8 は, 表 1 の 3 種のかみあい率 ε_e について計算による推定と計測結果⁽³⁾を重ねて示し比較したものである。主共振点 p_3 における歯面分離に伴う非線形領域は計算の適用範囲外として, 共振点 p_2 , $p_2/2$ の近傍をのぞいて実測と推定とはレベルが定性的に合致しているといえよう。支持系のみが振れる歯車対の剛体モード p_2 前後の約 10 dB のレベル差と幾つかの小さなビ

図 9 歯車対 1 の translation x_i 加速度 RMS 計算値と 3 種の ε_e についての実測との対比

ークおよび $p_2/2$ 前後の同様の傾向は支持系曲げ挙動を translation 近似したための誤差であると推察される。また信号に同意性はないが、軸受上の加速度信号と支持系の translation 変位 X_1 の加速度 RMS 計算値を対比するとき、図9に見るごとく定性的一致すら得られていない。したがってねじり-translation モデルはたかだか歯車体の回転角 θ_{1or2} 加速度 RMS 値を定性的に推定するに十分な程度の精度を持つものと考えられる。歯面力は式(10)に依存するので、 p_1 , p_3 モードの translation 成分の精度に左右される。 p_1 , p_3 モードでは $|r_{o1}\theta_1 - r_{o2}\theta_2|$ に対し $|x_1 - x_2|$ は 50 ないし 90% の割合を占める。

5. 結 言

(1) 系内で歯対剛性が比較的高く、ねじりと支持系曲げの連成が弱いと考えられる系でも、過渡挙動などにおいて連成による DOLF の上昇を考慮しなければならぬ場合が生ずる。

(2) 歯車装置系で歯車の支持剛性がかみあい剛性と同程度に高くねじり変形挙動と支持系曲げ挙動に強い連成がある場合、当然のことながら固有値にも変化が生じ、ねじり系とみなしてのシステムルールは適用できない。この連成系の DLF 関連挙動を translation-ねじり連成モデルで近似して解析する場合その適用範囲は以下のごとくである。

(a) 歯車体の回転振動は定性的把握が可能である。その際、歯がたわまず支持系のみが振れるモード

近傍で誤差が大きくなるが全体の挙動傾向をつかむうえで障害とはならないものと考えられる。

(b) 一部軸を含む歯車質量と軸と軸受に依存する translation 剛性でモデル化する場合、算出される translation 変位は軸受における測定変位とは一致しない。したがって算出される歯面力は、高い支持剛性に依存して translation 寄与分が小さい運転域 (= 曲げ共振以外) で上記(a)項の精度が保証されるものと考えられる。

(c) 強い連成系の挙動の定量的把握のためには支持系の、translation モデルより高次の、曲げ変形モードを組み込んだモデル化が必要である。

文 献

- (1) Winter, H., 小島, 機論, 49-442, C (昭58), 1048, および Winter, H. and Kojima, M., *Proc. Int. Symp. Gearing and Power Transmissions*, (1981), 1.
- (2) 小島, 機論, 49-442, C (昭58), 1058; 49-446, C (昭58), 1773; 50-450, C (昭59), 389; 50-452, C (昭59), 670; および, 51-468, C (昭60), 2058.
- (3) Rettig, H. and Knabel, W., *VDI-Ber.*, Nr. 332 (1979), 273. および, Knabel, W., *Dr.-Ing. Diss.* (1977).
- (4) 萩原・ほか2名, 機論, 49-445, C (昭58), 1530.
- (5) 飯田・ほか3名, 機論, 46-404, C (昭55), 375.
- (6) 有井・ほか2名, 機論, 51-465, C (昭60), 942.
- (7) 岩壺・ほか2名, 機論, 53-486, C (昭62), 379.
- (8) Lund, J. W., *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 100 (1978), 535.
- (9) David, J. W., ほか2名, *ASME paper*, 85-DET-11 (1985), 1.
- (10) Weck, M., ほか2名, *VDI-Ber.*, Nr. 374 (1980), 63. および, Peeken, H., ほか2名, *VDI-Ber.*, Nr. 432 (1982), 57.

討 論

〔質問〕 田 中 直 行

〔(株)日立製作所機械研究所〕

(1) 電車駆動系の例において約 10 Hz の振動が全系のねじり主共振点と考えられる、とあるが振動モードはどのようなになっているのか。またモータにおける除荷とは駆動トルクが零になったということか。

(2) 図7のモード形は図1の座標系を用い、 $i=1$, $j=2$ と考えてよいのか。また、 P_2 モードはどのようなものかわからないのでご教示願いたい。

(3) 結局のところ歯車装置の振動問題を扱う場合に外部励振と内部励振を分けて考えることが不適当なのであって、 K_A と K_V を別個に求めても意味がないのではないか。

〔回答〕 (1) Ca , 10 Hz の固有モードを図4のモデルと対応させ示す。除荷とは駆動トルクが零とな

付図1 ca , 10 Hz の固有モード形状

るの意である。

(2) ご指摘のとおり $i=1, j=2$ である。 p_2 モードは本文中に述べたごとく歯車対一体の剛体モードである。

(3) 本研究第2報^(付1) 4章「DOLF(K_A)とDLF

(K_v)の分離性」および結論(2)において詳しく述べたので参照いただきたいと思う。

(付1) 小島, 機論, 49-442, C (昭58), 1063.

53 巻 496 号, C 編 (昭 62-12) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
松下修己ほか	2456	右	20	クロス回路 PID 制御回路	クロス回路付 PID 制御回路
	〃	図 9	図中	Tracking Filter	Tuning Filter
鐘 兆偉ほか	2565	図 8	図中	Axial feed :	Axial feed :
著者別目次	(40)	右	下 5	ZHONGI	ZHONG