ランダム荷重を受ける構造物の最適設計*

(擬 似 感 度 を 用 い る 最 適 化)

多田 幸生*¹, 草場 康裕*²

Optimum Design of Structures Subjected to Random Loads

(Optimization by Approximate Sensitivity)

Yukio TADA and Yasuhiro KUSABA

This paper considers a shape determination problem of beams which are subjected to given random loads, taking into consideration its dynamic responses. The optimum shape is considered as one which minimizes the expected value of the strain energy that will be induced in the structure for a constant volume. A beam is discretized into finite elements and the method of modal analysis is applied to obtain its stationary response against Gaussian excitation. In the numerical treatment, an approximate method for sensitivity analysis is proposed and it works effectively with the use of a convenient optimization procedure by the "Energy-Ratio-Method". A considerable reduction of the expected value of strain energy is accomplished by several iterations of shape reformation. When the beam is supported symmetrically at both ends and is subjected to a concentrated load, the obtained beam has a symmetric shape with respect to its central cross section, independently of the location of the load.

Key Words: Design Engineering, Optimum Structural Design, Structural Shape Determination, Random Loads, Stationary Gaussian Process, Vibration, FEM, Modal Analysis, Approximate Sensitivity

1. 結 言

構造物に作用する荷重は一定ではなく、ランダムに変動することが多い。構造物がそのようなランダム荷重を受けるとき、構造物の振動、動的応答を考慮した設計が必要となる。振動を受ける構造物の応答解析については数多くの研究が発表されており、理論もよく確立されている。また、設計に関しては、防振・耐震設計、信頼性設計と、機械・土木・建築それぞれの分野、立場で研究がなされてきている。しかし、最適構造設計という観点からみると、骨組構造物の部材寸法や、機械部品のパラメータの最適化に関するものが主で、連続体に対して、形状設計までなされているものは限られており、Brach¹⁾、遠藤ら²⁾、山川ら³⁾、Cederkvist⁴⁾などにみられるほかは研究例が少ない。

著者らはこれまで、構造物の形状最適化に注目し、平衡問題および固有値問題において、有限要素法と変

分原理を利用して構造物の最適な形状を決定する方法を研究してきた⁵⁾。その方法は、ポテンシャルエネルギー、ひずみエネルギーなどの構造全体として大域的に定まる量を対象とすることにより、荷重の変動など不確定な荷重に対しても適用できるという大きな拡張性を有している⁶⁾。

本研究では、ひずみエネルギー基準の最適化をさらに拡張し、ランダムに変動する荷重を受ける構造物の定常応答としてのひずみエネルギーの期待値を最適化の基準として、その低減を目的とした形状決定問題を考える。この基準は平均的により剛性の高い形状を求めようとするものである。設計対象は曲げを受けるはりとし、有限要素モデルに離散化して取り扱うものとする。さらに、設計変数に対する応答感度の近似計算法についても述べ、その有効性を検討する。

2. 変動荷重に対するはりの応答

2.1 有限要素モデル 本研究では、断面形状

* 昭和62年10月6日 第945回講演会において講演、原稿受付 昭和62年1月22日。

*¹ 正員、神戸大学工学部 (〒657 神戸市灘区六甲台町1-1)。*² 准員、沖電気工業(株) (〒108 東京都港区芝浦4-11-22)。

が相似的に変化し、断面2次モーメント I と断面積 A の間に、

$$I = c A^2 \quad (1)$$

という関係があるはりを仮定する。さらに、はりの離散化モデルとして、要素内の断面積が長手方向で線形に変化し、横たわみが3次関数で近似されるものを考える。このモデルに対する線形の運動方程式は、一般に、自由度を n として行列で

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = p \quad (2)$$

と表わすことができる。ここでは、減衰行列として次のような比例減衰を仮定する。

$$C = \alpha M + \beta K \quad (\alpha, \beta: \text{定数}) \quad (3)$$

2・2 モーダル解析法 式(2)の構造物に対する非減衰自由振動問題

$$M \ddot{u} + K u = 0 \quad (4)$$

を解いて得られる固有値を $(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ 、そして対応する固有ベクトルを $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ とする。ただし、 ϕ_i は

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \quad (5)$$

となるように正規化されているものとする。

ここで、モーダルマトリックス Φ を

$$\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n] \quad (6)$$

と定義し、系の応答をこの Φ を用いて

$$u(t) = \Phi y(t) \quad (7)$$

と表わす。式(7)を式(2)に代入し、左から Φ^T を乗ずると、

$$\Phi^T M \Phi \ddot{y} + \Phi^T C \Phi \dot{y} + \Phi^T K \Phi y = \Phi^T p \quad (8)$$

となる。固有モードの直交性から、式(8)は

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = f_i, \quad (i=1, \dots, n) \quad (9)$$

ただし、

$$f_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}^T \Phi_{ij} p_j = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}^T \phi_{ij}(j) p_j, \quad (10)$$

$$\xi_i = (\alpha + \beta \omega_i^2) / (2 \omega_i) \quad (11)$$

となり、運動方程式を一般座標系での n 個の連成のない独立の式へと変換することができる。式中で、 p_i はベクトル p の成分を、 $\phi_{ij}(j)$ は第 i 次モードの固有ベクトルの第 j 成分を表わしている。

2・3 不規則振動解析 原系の荷重ベクトル p の第 h 成分 ($e=1, \dots, r$) に平均値零の定常確率過程 $q_e(t)$ が作用するときを考えると、

$$p_i(t) = \sum_{e=1}^r \delta_{ij, h_e} q_e(t) \quad (12)$$

と書けるから、式(10)より、一般化力 f_i は、

$$f_i(t) = \sum_{e=1}^r \phi_{ij}^T \phi_{ij}(h_e) q_e(t) \quad (13)$$

と表わされる。このとき、時間が十分に経過した時、応答 $y_i(t)$ は定常確率過程となり、応答の自乗平均値は、

$$E[y_i(t)] = \int_0^\infty |H_i(\omega)|^2 S_{f_i}(\omega) d\omega \quad (14)$$

となる。ここで、 $H_i(\omega)$ は i 次モード y_i の周波数応答関数、 $S_{f_i}(\omega)$ は $f_i(t)$ の自乗平均パワースペクトル密度関数であり、それぞれ、

$$H_i(\omega) = 1 / \{ \omega_i^2 - \omega^2 + i(2\xi_i \omega_i \omega) \} \quad (15)$$

$$S_{f_i}(\omega) = \sum_{e=1}^r \sum_{e'} \phi_{ij}^T \phi_{ij}(h_e) S_{q_e}(\omega) \phi_{ij}(h_{e'}) \quad (16)$$

で与えられる。上式中で、 i は虚数、 $S_{q_e}(\omega)$ は荷重 $q_e(t)$ と $q_{e'}(t)$ の相互スペクトル密度関数である。

同様に、系のひずみエネルギーの期待値は、
$$E[(1/2) u^T K u] = E[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (1/2) u_j^T K_{jk} u_k] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (1/2) \omega_{jk}^2 \int_0^\infty |H_j(\omega)|^2 |H_k(\omega)|^2 S_{f_j}(\omega) d\omega \quad (17)$$

として求められる。

さらに、系の応答 $u_i(t)$ の自乗平均値は、

$$E[u_i^2(t)] = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{ij}^T \phi_{ik}(j) \phi_{ik}(k) \int_0^\infty |H_j(\omega)|^2 |H_k(\omega)|^2 T_{jk}(\omega) d\omega \quad (18)$$

$$T_{jk}(\omega) = \sum_{e=1}^r \sum_{e'} \phi_{ej}^T \phi_{ek}(h_e) \phi_{ek}(h_{e'}) S_{q_e}(\omega) \quad (19)$$

となる。ここで、 Π_k は H_k の共役複素数である。各固有振動数が近接した値をとらず、減衰定数 ξ_i が十分に小さく、定常確率過程 $q_e(t)$ が広帯域パワースペクトルを有するとき、モード間の連成を無視して、

$$E[u_i^2(t)] \approx \sum_{j=1}^n (\phi_{ij}^T \phi_{ij}(j))^2 \int_0^\infty |H_j(\omega)|^2 S_{f_j}(\omega) d\omega \quad (20)$$

と近似することができる。

特に、原系の第 h 成分のみに定常確率過程 $q(t)$ が作用するとき、式(16)は

$$S_{f_i}(\omega) = \{ \phi_{ij}^T \phi_{ij}(h) \}^2 S_{q_i}(\omega) \quad (21)$$

となる。ここで、 $S_{q_i}(\omega)$ は荷重 $q(t)$ の自乗平均パワースペクトル密度関数 $S_q(\omega)$ に等しい。さらに、荷重 $q(t)$ がホワイトノイズの場合には、

$$S_q(\omega) = S_q \quad (\text{定数}) \quad (22)$$

とおけるから、式(15)より、各応答値中の係数は、

$$\int_0^\infty |H_i(\omega)|^2 S_{f_i}(\omega) d\omega = \{ \phi_{ij}^T \phi_{ij}(h) \}^2 S_q \pi / (2 \xi_i \omega_i^2) \quad (23)$$

と計算されることができる。

次に、軸方向座標 x での横断面における最大応力を考える。はりの断面の高さを $D(x)$ 、縦弾性係数を E 、たわみを $u(x)$ とすると、最大応力は

$$\sigma(x) = (1/2) E D(x) d^2 u / dx^2 \quad (24)$$

と表わされる。今、たわみが内挿関数 $N_i(x)$ によって

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i \quad (25)$$

と近似されているとすると、式(24)は

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^n B_i(x) u_i \quad (26)$$

$$B_i(x) = (1/2) E D(x) d^2 N_i / dx^2 \quad (27)$$

となる。従って、応力の自乗平均値は、

$$E[\sigma^2(x)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_n(x) \sigma_k(x) \int_0^{\infty} H_n(\omega) \overline{H_k(\omega)} T_{nk}(\omega) d\omega \quad (28)$$

あるいは、

$$E(\sigma^2(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n(x))^2 \int_0^{\infty} |H_n(\omega)|^2 S_{T_{nn}}(\omega) d\omega \quad (29)$$

となる。ここで、

$$\sigma_n(x) = \sum_{j=1}^m B_j(x) \phi_n(j) \quad (30)$$

は第 i モード関数に対する x 点の応力の意味を持つ。

3. 最適設計問題

3.1 ひずみエネルギー期待値最小化問題 本研究では、大きさがランダムに変動する荷重を受けるときの動的応答を考慮する構造物の最適性の基準として、系のひずみエネルギーの期待値に注目する。すなわち、体積一定の条件のもとで、はりのひずみエネルギーの期待値を最小にするような形状を求める。これは、エルゴード性を仮定すると、ランダム変動する荷重に対して、(時間) 平均的に最も剛い構造を与えるものであり、また、構造物の疲労という観点からみると、累積損傷の低減につながる。

前述のように、断面積が要素内で線形に変化するようなモデルを考えると、要素端、すなわち、節点での断面積を設計変数とする。これを

$$\theta = \{\theta_i : i = 1, \dots, s\} \quad (31)$$

とおくと、最適化問題は、

$$\Omega = E[(1/2) u^T K(\theta) u] + \lambda \{V(\theta) - C\} \longrightarrow \text{停留}(\theta, \lambda) \quad (32)$$

と定式化される。ここで、 V 、 C は体積および体積規定値であり、また、 λ はラグランジ乗数である。節点変位ベクトル $u(i)$ は前章の応答解析により得られるものであり、形状 θ の陰な関数である。

θ と λ に関する式(32)の停留条件を求めると、

$$\partial E[(1/2) u^T K u] / \partial \theta_i + \lambda \partial V / \partial \theta_i = 0 \quad (i = 1, \dots, s) \quad (33)$$

$$V(\theta) = C \quad (34)$$

となる。式(33)が形状決定のための式、式(34)は体積一定条件である。

3.2 エネルギー比法 本研究では、連立方程式(33)、(34)を一般の非線形計画法によって解くのではなく、静的問題に対して有効であったエネルギー比法¹⁶⁾を使うことにより、逐次的に形状を修正していく方法をとる。

すなわち、式(33)において、

$$\lambda_i = -(\partial E[(1/2) u^T K u] / \partial \theta_i) / (\partial V / \partial \theta_i) \quad (i = 1, \dots, s) \quad (35)$$

なる変数を導入すると、形状決定式は、

$$\lambda_i - \bar{\lambda} = 0 \quad (i = 1, \dots, s) \quad (36)$$

と書ける。この λ_i が第 i 節点におけるひずみエネルギー密度と関係していることを利用して、形状修正

$$\delta \theta_i = \gamma \cdot \log |\lambda_i / \bar{\lambda}| \quad (37)$$

を施す。ここで、 $\bar{\lambda}$ は s 個の λ_i の平均値

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=1}^s \lambda_i / s \quad (38)$$

である。

このエネルギー基準で得られる形

$$\theta_i^* = \theta_i + \delta \theta_i \quad (39)$$

は体積制約を一般に満足しない。しかし、節点での断面積を設計変数としているから、体積 $V(\theta)$ は θ_i の線形結合として、

$$V(\theta) = \sum_{i=1}^s a_i \theta_i \quad (40)$$

と表わすことができるので、さらに形状修正

$$\theta_i^{***} = C \theta_i^* / V(\theta^*) \quad (41)$$

をすることにより、簡単に体積を一定化することができる。

このように、逐次的に形状修正していき、条件

$$\varepsilon = \max_i |\lambda_i - \bar{\lambda}| / \bar{\lambda} \leq \varepsilon_0 \quad (42)$$

が満たされるとき、 λ_i のばらつきが小さいものとして収束とする。

4. 疑似感度

形状決定の条件式(33)を用いるためには、設計変数 θ_i ごとに、 $\partial E[(1/2) u^T K u] / \partial \theta_i$ 、すなわち、設計変数 θ_i に対するひずみエネルギーの期待値の感度を求めねばならない。しかし、前述のように、変位 u は形状 θ の陰な関数であるから、感度 $\partial E[(1/2) u^T K u] / \partial \theta_i$ を解析的に求めることはできない。また、数値微分にたよるとしても、微小増分後の形状 $\theta_i = \theta_{i0} + \Delta \theta_i$ ($i = 1, \dots, s$) のそれぞれに対して応答解析をするのでは、膨大な計算時間を要する。そこで、本研究では、以下の近似感度解析法の適用を提案する。

感度計算において、形状を変化させても変位は変化しないものと仮定し、

$$\partial E[(1/2) u^T K u] / \partial \theta_i = E[(1/2) u^T \partial K / \partial \theta_i u] \quad (43)$$

とおき、右辺を疑似感度と呼ぶ。これは増分ごとの応答解析を必要とせず、

$$\begin{aligned} & E[(1/2) u^T \partial K / \partial \theta_i u] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (1/2) \phi_m(j) \phi_k(i) \partial K_{jk} / \partial \theta_i) \\ & \quad \cdot \int_0^{\infty} H_m(\omega) \overline{H_k(\omega)} T_{mk}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (44)$$

もしくは、

$$\begin{aligned} & E[(1/2) u^T \partial K / \partial \theta_i u] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (1/2) \phi_k(j) \phi_k(i) \partial K_{jj} / \partial \theta_i) \end{aligned}$$

$$\cdot \int_0^\infty |H_k(\omega)|^2 S_{f_k}(\omega) d\omega \quad (45)$$

によって容易に求められる。

この方法を前述のエネルギー比法と組み合わせることにより、勾配計算を解析的処置で行うことができるので、効率の良い最適化が可能となる。

なお、長松⁽³⁾により提案されている低次モード近似による再解析法を利用する感度計算法についても検討したが、その結果は別の機会に報告する⁽¹⁰⁾。

5. 形状決定例

5・1 ひずみエネルギー基準と応力基準 図1の

図1 ホワイトノイズ加振を受ける両端支持ばり

図2 図1の収束状況

図3 図1のrms変位

図4 図1のrms応力

ように単純支持ばりの中央より左よりの一点にホワイトノイズが加振されるときに形状決定問題を考える。図1中の点線は初期一様形状で、実線は疑似感度を用いて最適設計した結果である。最適形状においては加振点の位置が中央点ではないにもかかわらず、中央部が膨らむ左右対称の構造が得られている。

図2は、繰り返し数を横軸として収束までの挙動を示している。図中、 ϵ は λ の偏差の程度を表わす式(42)の ϵ であり、それぞれの停留条件を満足するように、安定に形状修正されていることがわかる。また、 E はひずみエネルギーの期待値 $E((1/2)u^TKu)$ であり $|\lambda|$ は、各回の形状修正量の基準として用いた λ の平均値の絶対値である。 E と $|\lambda|$ は、ともに、初期形状における値を100とした百分率によってプロットされている。期待値 E の変化から、形状修正とともに極小点へと停留していき、30.5%のひずみエネルギー期待値の低減がなされていることがわかる。

図3と図4は各構造のrms変位とrms応力である。同じく、初期形状に対するものを点線で、最適解に対するものを実線で示している。rms応力ははりの長手方向で一様となり、やはり、対称形のものとなっている。Cederkvist⁽⁵⁾は、はりのrms応力の最大値を最小にするような形状を求めているが、得られた形状のrms応力は一様ではなく、形状自体も本法によるものほどなめらかではない。

これらより、本法では、各点における変位を万遍無く下げ、応力、ひずみエネルギー密度などの応答挙動をどこでも等しくそろえることによって、全系のひずみエネルギーを減少させていると考えられる。

この問題を低次モード近似の数値微分で解いた⁽¹⁰⁾場合、10数回の繰り返しで収束させることはできたが、数値微分の差分幅の設定が適当でないと発散することが多かった。また、形状修正のたびに設計変数の個数の回数の固有値解析を必要とするので、繰り返し数は同じでも計算時間の方は非常に大きくなった。これに対し、疑似感度法によると、数値微分による場合と比べて計算時間が短く、また安定な過程で収束解へと導くことができた。

なお、本研究では、横たわみに対して、3次の内挿関数を用いているので、式(24)の応力は要素の接継点で不連続である。図は平均化して描いたものである。

以下では、初期形状に対するものを点線で、収束形状に対するものを実線で描くことにする。

5・2 加振点の影響 前節の単純支持ばりの例では、中央点以外で加振されても左右対称の形状が得られた。ここでは、両端固定ばりに対して、加振点の

影響を考察する。

図5は、ホワイトノイズ加振点を中央から順に左端点側へ移した時のそれぞれの形状決定の結果である。静的負荷の場合と異なって、加振点の位置にかかわらず、左右対称の形状が得られている。この理由は以下のように考えられる。

今、自由度ベクトルの第 j 成分と対称関係の位置にある成分を第 j^* 成分とする。はりが左右対称の形状を有しているとする、両端固定、あるいは、両端支持ばりの場合、第 j^* 成分は、奇数モードに対しては

$$\phi_i(j^*) = \phi_i(j) \quad (46)$$

図5 ホワイトノイズ加振を受ける両端固定ばり

図6 図5-(c)の収束状況

図7 図5-(c)のr.m.s変位

そして、偶数モードに対しては

$$\phi_i(j^*) = -\phi_i(j) \quad (47)$$

であるから、結局、どのモードに対しても

$$(\phi_i(j^*))^2 = (\phi_i(j))^2 \quad (48)$$

が成り立つ。従って、式(20)より、変位の自乗応答は、

$$E[u_i^2(t)] = E[u_i^2(t)] \quad (49)$$

を満たしており、加振点の位置に関係無く、r.m.s変位は左右対称となる。

同様に、各点でのひずみエネルギー、あるいはエネルギー密度を考える。それらを一般に、

$$e_i(x) = (1/2) u_i^T \Lambda_i(x) u_i = (1/2) \sum_{j=1}^n \sum_{j^*=1}^n \phi_{ij}(x) \Lambda_{ij}(x) \phi_{ij^*}(x) \quad (50)$$

とおくと、2章および4章の準備から、その期待値は

$$E(e_i(x)) = \sum_{j=1}^n \sum_{j^*=1}^n e_{ij}(x) \int_0^\infty |H_{ij}(\omega)|^2 S_{ii}(\omega) d\omega \quad (51)$$

となる。さらに、モード間の連成がないとすると、

$$E(e_i(x)) = \sum_{j=1}^n e_{ij}(x) \int_0^\infty |H_{ij}(\omega)|^2 S_{ii}(\omega) d\omega \quad (52)$$

である。ここで、

$$e_{ij}(x) = (1/2) \sum_{j^*=1}^n \phi_{ij}(x) \Lambda_{ij}(x) \phi_{ij^*}(x) \quad (53)$$

は、第 i モードと第 j モードとによる x 点での相補エネルギーである。

今、はりの長さを L とし、形状が左右対称であると仮定すると、 x の対称点 $x^* (= L - x)$ では、第 i モードによるエネルギーは、

$$e_{ij}(x^*) = e_{ij}(x) \quad (54)$$

であるから、ゆえに、

$$E(e_i(x^*)) = E(e_i(x)) \quad (55)$$

となり、各点のひずみエネルギー期待値も左右対称となるといえる。

さらに、式(46)、(47)と式(30)の関係から、応力のr.m.s値も左右対称となる。

このように、加振点の位置によらず、対称形構造の各応答が対称形で現れるので、それを基準とする形状修正によって、再び左右対称の構造が得られていくと考えられる。

しかしながら、本例題においては、左右対称でない初期形状（たとえば、テーパ形のような）から始めても、やはり、同じ対称形に収束したことを付記しておく。

図5において、加振点による最適形状の違いをみると、中央に加振されたときの図(a)の静的負荷に対する最適形状に近い形から、加振点が端に移るにつれて中央の山が平らになり、谷が端点側へ移動し、起伏が乏しくなることがわかる。これは、図(a)、(b)では

第1モードの励起が支配的であるが、式(13)の一般化力の形から、荷重が端点に近くなると、高次のモードの寄与が増加し、それに対処するための形状が重ね合わされていくからと考えられる。なお、目的関数（ひずみエネルギー期待値）の改善の度合は、加振が中央にあるものほど大きいことが認められた。

(c) 図の場合の収束状況と、rms変位を図6および、図7に示す。安定に収束しており、また、応答が左右対称であることが観察される。

図8は、一端支持、他端固定のはりの形状決定例である。加振点を変えても、ほとんど同じ形状が得られている。

5・3 複数の集中荷重による加振 図9は、二つの不規則振動荷重を両端固定ばりの二箇所に同時に加えたときの形状決定例である。(a) は両荷重に相関がなく、ともにホワイトノイズで、式(16)の S_{11} が $S_{11} = S_{22}$ の場合の結果である。(b) は相関がある場合の結果である。荷重どうしの相関は相互スペクトル密度関数によって与えているが、それらは周波数に依存しないものと仮定している。すなわち、相関の影響を調べるために仮想的に $S_{11} = S_{22} = S_{12} = S_{21}$

図8 ホワイトノイズ加振を受ける一端支持、他端固定のはり

図9 二つの集中荷重を受けるはり

$= S_{11}$ (一定) とおいた。(a)、(b)で同じような形状が得られているが、両荷重に相関がある場合の方が、初期形状におけるひずみエネルギー期待値が大きく、さらに、形状最適化による改善度も(b)の方が大きかった。

5・4 有帯域加振 図5の(c)と同じ位置に有帯域加振を与えたときの形状決定の例を図10に示す。図(a) は加振帯域に系の第2モードと第3モードの固有振動数 ω_2 、 ω_3 が含まれているときのもので、図(b) は ω_3 のみを含んでいるときの結果である。また図11は、図10(b)に対するrms変位を示している。これらから、入力に含まれるモードが励起され、その変位を減少させるように形状が修正されていることがわかる。

6. 結 言

本研究では、ランダム荷重を受けるはりの動的応答を考慮する最適形状設計として、体積一定の条件のもとで、ひずみエネルギーの期待値が最小となるはりの形を求める問題を定式化し、その数値解法と、いくつかの数値例を示した。

疑似感度とエネルギー比法による逐次形状修正は安定な収束性を示し、数回の繰り返してかなりのひずみエネルギーの期待値の低減が実現された。

疑似感度法によると、境界条件が左右対称の場合、モード間の非連成を仮定すると、加振点の位置にかかわらず、左右対称の形状が導出され、rms応答も左右対称となった。また、ひずみエネルギー期待値を最小化することによって、rms応力がほぼ一様化され

図10 有帯域加振に対する最適解

図11 図10-(b)のrms変位

ていることも確かめられた。

さらに、荷重点の位置による違い、複数荷重の影響入力周波数の影響についても考察した。

以上、本研究ではランダム荷重を受けるはりの最適化について述べたが、一般の複雑な構造物に対しても毎回の形状修正を小さくすると、疑似感度法とエネルギー比法の組み合わせは、安定な収束性を与えるものと考えられる。

文 献

- (1) Brach, R. M., Int. J. Mech. Sci., 10-5, (1968), 429.
- (2) 遠藤・ほか3名、機論、44-385(昭53)、3015.
- (3) 山川・若林、機論、48-435、C(昭57)、1738.

- (4) 山川・ほか3名、機論、48-435、C(昭57)、1750.
- (5) Cederkvist, J., J. Struct. Mech., 10-1, (1982), 49.
- (6) Tada, Y. and Seguchi, Y., New Directions in Optimum Structural Design (Ed. by Atrek, E. et al.), (1984), 197, John Wiley.
- (7) 多田・瀬口・小西、機論、52-478、A(昭61)、1608.
- (8) 星谷、確率論手法による構造解析、(昭48)、71、鹿島出版会。
- (9) 長松、モード解析、(昭60)、259、培風館。
- (10) 多田・草場、第10回NCP研究会シンポジウム講演予定、(昭62)。

討 論

〔質問〕 片山 忠一〔大阪府立大学工学部〕

(1) 5章で与えられた例題において使われた、減衰定数 ξ_i の値はいくらか。

(2) 5章で例示されているはり形状とは、はりの深さと解釈してよいか。

(3) 図1, 5(a), 8を見ると、曲げモーメントが零になるような位置で、断面の大きさがほぼ零となるような解が得られている。しかし、実構造ではたとえ曲げモーメントが零となるような支持部であっても、取付けのためには有限の断面寸法をもたざるを得ない。設計という立場からいえば、特定位置における断面寸法を拘束条件とすることも必要である。貴手法において、断面寸法を拘束条件に入れることは可能か。

〔回答〕 (1) 式(11)の ξ_i において、 $\alpha=0.0, \beta$

$=0.02$ としている。

(2) 式(31)の1行上に書いているように、本研究では、節点での断面積を形状変数としている。したがって、各図でいう形状とは、はりの断面積分布を表している。

(3) ご指摘のとおり、実構造設計という観点からすると、ここで考える以外の機能を考慮して有限の断面積をもつような制約を設けることも必要であると考えられる。本報では、それを取り入れていないが、3章の最適設計問題において最小断面積制約を取り入れることは可能であり、数値解法の段階においてもそれらを容易に取扱うことができる(付1)。

(付1) 多田・松本・藤井、第37回応用力学連合講演会講演論文予稿集、(昭62-12)、201.