等価縮少モデルを用いた連成振動の解析法*

松下 修己^{*1}, 菅谷 豊美^{*1}, 名村 清^{*1}, 岡部 明^{*2}
金子了市^{*3}, 道村 晴一^{*4}, 井田 道秋^{*1}

An Equivalent Reduced System for Coupled Vibration Analysis

Osami MATSUSHITA, Toyomi SUGAYA, Kiyosi NAMURA, Akira OKABE,
Ryouichi KANEKO, Seiichi MICHIMURA, and Michiaki IDA

Coupled vibration problems in large scale mechanical or rotor systems are often encountered; for instance, a shaft-blade coupled vibration of a turbine and generator set. Instead of FEM modelling for a global system consisting of main system A and sub system B, an equivalent reduced system is presented. According to the reduction technique, the eigenvalue problem of the vibrating system B is first solved; then, equivalent masses and springs are determined for each corresponding eigenmode of system B. Therefore, the original global system is reduced to system A plus the additional masses representing system B. It is concluded that the reduced model is physically reasonable and numerically accurate enough, even though a simpler program is used for the system A than for the global system A+B.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Blade-Shaft Coupled Vibration, Reduced Model, Eigen-solution

1. 緒 言

等価縮少振動モデルに基づく解析法を開発しようとした問題の発端は、タービン発電機の翼軸連成のねじり振動問題である。タービン翼は回転軸に対して図1のように取付いている。翼が周方向に振動すると回転軸にねじり振動を引き起こす。一方、回転軸がねじり振動すると翼を周方向にあおる。このようにして、両者は連成振動を呈する⁽¹⁾⁽²⁾。

タービン発電機は発電プラントの主機であり、設計計算段階において十分なねじり振動解析が軸系についてなされる。このとき軸系ははり要素に分割される。タービン翼は剛体円板(集中付加慣性)としてモデル化される。そして軸系に対して、伝達マトリックス法あるいは剛性マトリックス法(はり要素を主体とした有限要素法)で固有値解析⁽³⁾がなされる。

一方、翼系はボス固定条件のもとに固有振動解析が設計段階で十二分になされる。具体的には、殻要素な

どを用いた有限要素分割を翼全体に対して行い、直径節数あるいは円節数に着目した固有値計算を行う。

このように、回転軸系の設計者にとっては翼は剛体円板と仮定される。翼系の設計者にとっては回転軸系の状態は無視され、ボス部は完全固定条件と仮定される。しかるに、両者の連成が考慮されずに共振条件が検討されてきたのが実状である。

また、考慮する必要もなかったことも事実である。というのは、翼系の周方向モードの固有振動数が、外力としての発電機逆相トルクのもつ加振周波数 $2f$ (f は電源周波数)より大きかったためである。近年の長翼の採用により翼固有振動数が低下し、このような前提も怪しくなり、翼と軸とが連成する系としての考慮が必要となってきたわけである。

図1 翼軸連成ねじり振動

* 昭和62年11月28日 関西支部第247回講演会において講演。原稿受付 昭和62年4月8日。

^{*1} 正員、(株)日立製作所機械研究所(〒300 土浦市神立町502)。

^{*2} (株)日立製作所日立工場(〒317 日立市幸町3-1-1)。

^{*3} 正員、(株)日立製作所日立工場。

^{*4} 正員、東京工業大学(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

ところでこの問題をより一般的に提起しよう。主振動システム A と従振動システム B とがあり、両者が連成した振動を呈するときの状況を想定する。先ほどの翼軸連成ねじり振動問題では、主システム A として回転軸、従システム B として翼を想定する。また、主従振動系として軸のねじりおよび縦振動など異種振動同士の連成問題をも念頭に入れ、より広い立場からとらえる。

振動解析の立場からすると、より「軟」な振動系が主システム A、より「剛」な振動系が従システム B と見られる。よって、システム A と B が連成したとき、システム B は連成時でもそれ自体の非連成時固有モードが比較的顕著に現れると考えてよい。そこで、システム A の連結端面から見て相対的に何割ぐらい振れるかということに着目する。そして、システム A の端に、隣接するがごとく、システム B の一つの固有モードを代表する節点を一つ追加し、両者があるばね要素で結合したような、連成等価縮小モデルの構築が望ま

れる。その可能性を示すのが本論文の骨子である。

本論文では始めに、振動システム A と B とがばねと質量よりなる単振動系である場合を述べる。単振動系とは一つの節点の変位自由度が一つの場合である。この最も簡単な系により本等価縮小モデル化手法の原理を明確にする。

次に、振動システム A と B がはりの曲げ振動の場合を扱う。ここでは、一つの節点の自由度は二つ(たわみと傾き)である場合で、同様の縮小化が可能である。

以上の 2 種類の振動システムを対象に等価縮小モデル系の作り方が原理的に明らかになるので、簡単な事例で本方法の妥当性を検証する。

実機への適用事例については、原理以外に配慮すべき事項が多く、稿を改めて論ずる。

記号

a : 連成係数 (行列)

k : ばね定数

k_{eq} : 等価ばね定数

K_1, K_3 : 回転軸および翼の剛性行列

k_{23}, K_{23} : 回転軸と翼の連結剛性

$l, l_{eq}, \Delta l$: 節点から重心までの距離

m, Id : 質量, 横慣性率

$m^* = \phi^T M_3 \phi$: 翼系のモデル質量

$m_c^* = \phi^T M_3 l$: 質量連成量

$M_c^* = \phi^T M_3 T$: 質量連成行列

$m_{eq}(M_{eq})$: 翼系を代表する等価質量 (行列)

M_1, M_3 : 回転軸および翼の質量行列

$\bar{M}_3$: 翼系を剛体とした質量行列

S_3 : 規準座標 (相対変位)

T : 幾何学的形状行列

x_1 : 回転軸系の絶対変位ベクトル

x_2 : 回転軸ボス部の絶対変位ベクトル

x_3 : 翼系の絶対変位ベクトル

x_3^* : 翼を代表する追加節点の絶対変位

y_3 : 翼系の相対変位ベクトル

δ, θ : 軸および円板のたわみ, 傾き

$\Delta m = \bar{M}_3 - m_{eq}$: ボス部への付加質量

ϕ : 翼系の非連成固有モード

ω : 翼系の非連成固有振動数

2. 解析手法…ねじり振動, 縦振動

2.1 振動システムの記述 始めに、図 2(a)に示すようなばねと質量のみで構成される単振動モデルを用い連成振動解析法の考え方を明らかにする。振動モード図形が物理的に説明しやすいように、単振動モ

図 2 ねじり振動の等価縮小モデル

デルでは左端が固定されているとする。左側の丸印の単振動系をシステム A、右側の四角印の単振動系をシステム B と呼ぶ。具体的には、システム A を軸系、システム B を翼系に想定し、両者の連成した振動を解析しようとするものである。よって、両システムの境界 m_2 は翼の付け根に相当しボス部である。

振動変位としては、図 2 のごとくシステム A (軸系) の内部を x_1 、その境界 (ボス部) を x_2 、システム B (翼系) を x_3 とする。質量 m およびばね定数 k についても同様に添字 1, 2, 3 を付ける。

これらの振動変位はそれぞれ絶対座標であり、運動方程式を行列形式で次のように表しても一般性を失うことはない。

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & m_2 & \\ & & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ \oplus k_{23} & -k_{23} \\ 0 & -k_{23} & k_3 \oplus k_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 x_2 はシステム A の境界の変位で一次元である。連結ばね定数 k_{23} の和 $\oplus$ は有限要素法の式で使われる操作で、対応する節点への重畳を表す記号である。

ここでシステム B (翼系) の絶対振動変位ベクトル x_3 に対してボスから見た相対振動変位ベクトル y_3 を、図 2 (a) のごとく導入し、次のように定義する。

$$x_3 = 1x_2 + y_3 \quad \text{ただし} \quad 1 = [1, 1, 1]^T \quad \dots\dots\dots (2)$$

この結果、相対振動変位 y_3 を用いた運動方程式は次のような形になる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + \bar{M}_3 & 1^T \bar{M}_3 \\ 0 & \bar{M}_3 1 & \bar{M}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ & 0 \\ 0 & 0 & K_3 + k_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\bar{M}_3 = 1^T M_3 1$

このように、システム B の変位に関してはシステム A の境界から見た相対変位で記述されうる場合を前提として以下の議論は展開される。通常、軸と翼の連成振動を記述する運動方程式はこのように絶対変位と相対変位の組合せで表現されているので問題ない⁽⁴⁾。

2.2 等価縮少モデル化と利点 この基本となる運動方程式 (3) で、2 行 2 列までの x_1 と x_2 とで表される部分が軸系の運動方程式であり、図 2 (b) のように、翼部分を剛体としてその全質量 $\bar{M}_3$ をボスに付加している。通常、このようなモデル化では要素主体の軸系専用計算プログラムで固有振動解析がなされ

る。

翼系に関しては、一般にボス部を固定した図 2 (c) のような振動モデル、すなわち、式 (3) の右下の 3 行 3 列部分の運動方程式を解くことにより翼系の固有振動数 ω および固有モード ϕ が求まる。

本論文の主旨は、図 2 (d) のように、軸系の他端に追加節点を設け、その節点を翼系の非連成時固有振動モードに対応させる。翼系を代表させるこの追加節点方式で等価縮少モデル系を作り、翼系と回転軸系の連成振動を取扱おうとするものである。

このようなモデル化では、軸と翼のように、主従振動系に分割できる状況を前提としている。

◆システム B (従) の連成時の相対座標上の振動モード形状は、システム A (主) の影響をあまり受けずに、システム B 自体の非連成時固有モード形状で決まる。

◆システム A (主) の連成時の振動モードは、システム B (従) の影響を受けて、非連成時と異なるような複雑な形状となる。

一般には、より「剛」な振動系が「従」システムに、より「軟」な振動系が「主」システムにそれぞれ区分される。ここで想定している翼軸連成ねじり振動はこのような区分が可能な場合に相当すると考えてよい。

固定境界条件のもとで固有値解析されたシステム B の非連成固有モード計算結果をもとに、対応する追加節点量 (等価質量など) が決まり、等価縮少モデルができあがる。システム A 用の計算プログラムをもって連成時の固有値解析が実施されることになる。

よって、翼系を代表する追加節点は一つ増えるけど、あくまでも軸系の計算プログラムの延長上で連成振動が解析できるので非常に実用的である。また、連成効果の有無の比較など、物理的把握が非常に容易になり、効率的な設計計算法が生まれることになる。

このような等価縮少モデル系において、等価質量として翼系のモーダル質量を一般に引き当てる場合が多い。しかし、その理論的根拠はない。しかも、モーダル質量は実際の翼系の物理的質量より小さいのが普通であるから、残りの質量はどこに逃げたのか不明である。本論文ではこの辺の事情も明確になる。

一方、振動システム A+B に対し適当な要素を用い、全系を有限要素法でもって分割し⁽⁵⁾、一挙に大規模な固有値解析を行う方法も当然考えられる。しかし、いかにも大規模計算に傾倒しすぎであり、実際の作業も非現実的である。得られる結果に対する物理的考察の見通しも悪いのが欠点である。このような動機で、ここで主張する等価縮少モデル化を開発することにした。

2.3 翼系モード一つ採用の場合 まず、翼系をその一つの振動モード解で代表させたときの翼軸連成等価縮小モデルを具体的に導く。ポスからの相対変位量 y_3 を翼系モード ϕ の重み値 S_3 で次のように表す。

$$y_3 = \phi S_3 \quad \dots\dots\dots (4)$$

すると式(3)は次のように書きかえられる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + \bar{M}_3 & 1^t M_3 \phi \\ 0 & \phi^t M_{31} & \phi^t M_3 \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{S}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi^t K_3 \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、重み値 S_3 は相対変位である。そこでその振動モードを代表する絶対座標を x_3^* とし、これとポス変位 x_2 との差が S_3 に比例するものとして次のように表す。

$$S_3 = a(x_3^* - x_2) \quad \dots\dots\dots (6)$$

連成係数 a はこの段階では未知で、後で決定される。

ここで、式(6)を式(5)へ代入し合同変換を施すと、絶対変位系の運動方程式が得られる。その結果、式(5)は次のように軸系の絶対変位 x_1, x_2 および翼系の ϕ モードに対応する絶対変位 x_3^* で表され、次の形を得る。

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + \Delta m & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ \oplus k_{eq} & -k_{eq} \\ 0 & -k_{eq} & k_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^* \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、式(7)の質量連成項 m_{23} およびその転置である m_{32} を消去するために

$$a = m_c^* / m^* = \text{質量連成量} / \text{モーダル質量} \quad \dots\dots\dots (8)$$

とおくと、最終的に連成系の絶対変位での運動方程式は次の形になる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & m_2 + \Delta m & \\ & & m_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ \oplus k_{eq} & -k_{eq} \\ 0 & -k_{eq} & k_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^* \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $m_{eq} = a^2 \phi^t M_3 \phi = a^2 m^* =$ 翼等価質量

$$k_{eq} = \omega^2 m_{eq} \quad \Delta m = \bar{M}_3 - m_{eq} = \text{翼残留質量}$$

上式は軸系をはり要素にメッシュ分割したときに、節点 x_3^* を一つ追加し、翼系をその節点で代表させることを意味している。

具体的なモデル化は図2(d)に示すように、軸系 (x_1, x_2) の右にもう一つ節点 x_3^* を設ける。その節点に付けるべき等価な質量 m_{eq} およびその節点とポスとを結ぶ等価なばね定数 k_{eq} は、それぞれ上式のようにおけばよいことを示している。さらにポス部 x_2 には翼系の全質量 $\bar{M}_3$ から先ほどの節点 x_3^* に付けた等価質量 m_{eq} を引いた残りの質量 Δm を付加する。このようにして、翼系の固有モード ϕ に対応する一つの追加節点をもって翼系を代表する軸と翼との連成等価縮小モデルが完成する。

2.4 翼系モード二つ採用の場合 一般には連成時の翼系の振動モードとしては典型的な一つの形状で十分な場合が多い。しかし、ある場合には低次の二つ以上のモード形状で翼系の振動を考える必要がある場合もある。よって、翼系の非連成振動モード解を二つ採用したときの連成等価縮小モデルの作り方を導く。

式(3)の翼系の相対変位 y_3 において、翼モード ϕ_1, ϕ_2 のそれぞれの重み値 S_{31}, S_{32} を重畳した表現

$$y_3 = \phi_1 S_{31} + \phi_2 S_{32} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とする。ここで、翼系モード ϕ_1, ϕ_2 はその質量行列および剛性行列に関し直交する。

先ほどと同様に、相対変位である重み値 S_{31}, S_{32} に対する絶対変位を x_{31}^*, x_{32}^* とし、これらとポス変位 x_2 との差にそれらがそれぞれ比列するものとして表すと

$$S_{31} = a_1(x_{31}^* - x_2) \quad S_{32} = a_2(x_{32}^* - x_2) \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。座標変換(10, 11)を式(3)に施し、質量連成項を消去すると、連成係数は次のような値でなければならないことがわかる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1^t M_3 \phi_1 / \phi_1^t M_3 \phi_1 = m_{c1}^* / m_1^* \\ a_2 &= 1^t M_3 \phi_2 / \phi_2^t M_3 \phi_2 = m_{c2}^* / m_2^* \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

その結果、絶対変位で書かれた連成系の運動方程式が次のように求まる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & m_2 + \Delta m & \\ & & m_{eq1} \\ & & & m_{eq2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_{31}^* \\ \ddot{x}_{32}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ \oplus k_{eq1} \oplus k_{eq2} & -k_{eq1} - k_{eq2} \\ 0 & -k_{eq1} & k_{eq1} & 0 \\ 0 & -k_{eq2} & 0 & k_{eq2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{31}^* \\ x_{32}^* \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

ただし、

$$m_{eq1} = a_1^2 \phi_1^t M_3 \phi_1 = \text{一次翼等価質量}$$

$$k_{eq1} = \omega_1^2 m_{eq1}$$

$$m_{eq2} = a_2^2 \phi_2^t M_3 \phi_2 = \text{二次翼等価質量}$$

$$k_{eq2} = \omega_2^2 m_{eq2}$$

$$\Delta m = \bar{M}_3 - m_{eq1} - m_{eq2} = \text{翼残留質量}$$

翼系モードを一つ採用したときと同様に、今度は軸系に対して二つ節点 x_{31}^* , x_{32}^* を追加すればよい。

具体的には図 2 (e) に示すように、軸系の右に二つの節点 x_{31}^* , x_{32}^* を設けそれぞれ ϕ_1 と ϕ_2 モードの等価質量 m_{eq1} および m_{eq2} を付ける。これらの質量はボス部と共通にそれぞれ等価ばね定数で結ばれている。さらにボス部 x_2 には、翼系の全質量 $\bar{M}_3$ から翼系の一次と二次の等価質量を引いた残りの質量 Δm を付加する。翼系の二つのモードを採用する場合もそれぞれ 1 節点ずつを割り当てた連成等価縮小モデルが完成する。

3. 連成曲げ振動への応用

3.1 連成曲げ振動系の定式化 2 章では単振動モデルを対象に、等価縮小モデルによる連成振動解析法の基本的な考え方をまとめた。ここでは、その考え

図 3 曲げ振動の等価縮小モデル

方を曲げ振動に応用し、連成曲げ振動解析法を提案する。

曲げ振動解析モデルとして図 3 (a) のようなモデルを採用した。図 3 中の円筒形の物は質量と横慣性能率を持つ円板を表し、それぞればねで結ばれている。大きな円板の部分が回転軸に対応し、小さな円板の部分が翼を示す。回転軸部で翼部とのつながりがボス部である。

軸系の変位ベクトルは x_1 とし、特にボス部は x_2 、翼は x_3 と定義する。各節点の変位座標は軸のたわみ δ と傾き θ 成分を持つ二次元ベクトルを意味する。対応する各節点の質量行列 M も同様に、円板の質量 m と横慣性能率 I_d で構成される。以上の定義のもとに全体系の運動方程式は絶対座標系で表すと、先の式 (1) の形を得る。この場合、ボス部変位座標 x_2 はたわみと傾きを持つ二次元ベクトルであるところが、先のねじり振動と違うところである。

今、図 3 (a) のように、ボス部のみが δ_2 だけたわみ、 θ_2 だけ傾いたとする。そして、ボス中心から翼系の各節点の質量の重心位置までの距離を l とする。翼が剛体として自然に変形していないときの絶対変位量と、この状態からさらに翼部分がひずみ相対振動したときの振動分 y_3 とを区別する。よって、翼の剛体モードからの相対変位量と絶対変位量との関係は

$$x_3 = \begin{bmatrix} \delta_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{y3} \\ \theta_{y3} \end{bmatrix} = T x_2 + y_3 \quad \cdots (14)$$

と書ける。そこで、先の式 (1) に対し、式 (14) を用いた座標変換を実行し、軸系は絶対変位 x_1 と x_2 で、翼はボスからの相対変位 y_3 で表された次の運動方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 + \bar{M}_3 & T' M_3 \\ 0 & M_3 T & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \oplus K_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \cdots (15)$$

ただし、 $\bar{M}_3 = T' M_3 T$

この運動方程式で、行列の 2 行 2 列までは軸系の曲げ振動解析図 3 (b) に対応し、一方、3 行 3 列は翼系単体のボス部完全固定条件での振動解析図 3 (c) を表す。このようにボス部で、軸系と翼系との個々の非連成の振動解析に分離されていることがわかる。

また、質量連成項の 2 行 3 列めとその対角項は翼軸連成力を励起する慣性項である。

3.2 等価縮小モデル化 ボス固定条件の翼系の

運動方程式から固有値問題を解き、固有振動数 ω および固有モード ϕ が得られたとき、

$$y_3 = \phi S_3 \dots\dots\dots (16)$$

により、翼系を、ボスからの相対座標 y_3 の表現から翼モードの重み値 S_3 の表現に変換する。

ここで、重み値 S_3 は相対変位であるから対応する絶対変位を $x_3^* = [\delta_3^*, \theta_3^*]^T$ とし、 x_3^* とボス変位 x_2 との差が S_3 に比例するものとして次式のように定義する。

$$S_3 = a(x_3^* - x_2) = [a_\delta, a_\theta] \begin{bmatrix} \delta_3^* - \delta_2 \\ \theta_3^* - \theta_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

連成係数行列 a はたわみに対応するもの a_δ と、傾きに対応するもの a_θ とから成り立っている。

座標変換式(16)と式(17)を適用し、合同変換を行うと、軸系絶対変位 x_1, x_2 および翼系絶対変位 x_3^* で表現される運動方程式が得られる。変換後の質量行列に関し質量連成項を消去するように置くと、未知の連成係数行列 a が決定される。

$$a = [a_\delta, a_\theta] = \phi^T M_3 T / \phi^T M_3 \phi = M_c^* / m^* \dots\dots\dots (18)$$

このような比例定数を選ぶことにより、変換後の絶対座標系での運動方程式は、結局次の形が得られる。

$$\begin{bmatrix} M_1 & & \\ & M_2 + \Delta M & \\ & & M_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ \oplus K_{eq} & & -K_{eq} \\ 0 & -K_{eq} & K_{eq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^* \end{bmatrix} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 $M_{eq} = a^T \phi^T M_3 \phi a$ = 翼等価質量行列

$$K_{eq} = \omega^2 M_{eq} \quad \Delta M = \bar{M}_3 - M_{eq} = \text{翼残留質量行列}$$

上式は形の上ではねじり振動解析法の考え方と同様

に、軸系をメッシュ分割し順に節点を打っていったときに一つ余分に節点を設け、翼系をその節点の剛体要素で代表させることを意味している。具体的にこのモデル化は図3(d)に示すようになる。

3.3 等価モデル諸量の決定 等価縮小モデル系の運動方程式(19)における質量行列 M_{eq} および ΔM は、2行2列の行列で非対角項は零とは限らない。物理モデルとしては円板の重心と節点がずれていることを意味しており、その点をここでは明確にする。

今、ある節点から右に重心が l_c だけ離れたところに、質量 m で重心回りの横慣性能率 I_{dc} で表される剛体円板が剛に固定されているとしよう。このときの質量行列は次の形になる。

$$\begin{bmatrix} m & ml_c \\ ml_c & ml_c^2 + I_{dc} \end{bmatrix}$$

ところで、 M_{eq} を上式に照らしてみると、

$$M_{eq} = m^* \begin{bmatrix} a_\delta^2 & a_\delta a_\theta \\ a_\delta a_\theta & a_\theta^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} l_{eq} = a_\theta / a_\delta \\ m_{eq} = a_\delta^2 m^* \end{matrix}$$

$$\text{ただし } m^* = \phi^T M_3 \phi \quad I_{dc} = 0$$

すなわち、図3(e)のように、距離 l_{eq} の所の追加節点に、横慣性能率が零の集中質量 m_{eq} が付いているモデルになる。これは M_{eq} の行列式が零であることから、等価質量 m_{eq} はたわみのみの一自由度で表されることに対応している。傾きの自由度はない。

一方、付加質量 ΔM の具体的モデルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta M &= \bar{M}_3 - M_{eq} & \Delta I &= \Delta m_{12} / \Delta m_{11} \\ &= \begin{bmatrix} \Delta m_{11} & \Delta m_{12} \\ \Delta m_{12} & \Delta m_{22} \end{bmatrix} & \Delta I d &= \Delta m_{22} - \Delta m_{11} \Delta m_{12} \end{aligned}$$

これは ΔI だけボスより離れた位置に、質量 Δm で、横慣性能率 $\Delta I d$ を持つ剛体円板が付加されたモデル

図4 二軸連成系：ねじり振動（I）

で表される。

このようにして、新たに追加した翼系を代表する節点に置くべき等価質量行列 M_{eq} と、ボスに付加すべき残留質量行列 ΔM の物理的モデルが明らかになった。このようにして、曲げ振動のときも 3・2 節と同様に、翼系の固有モードに対応した追加節点を設ける方法によって、軸系と翼系の連成等価縮小モデルが完成する。

4. 数値計算例

以上述べてきたねじり振動および曲げ振動に関する連成等価縮小モデル化法の有効性を検証するために、具体的な数値計算例を示す。

4・1 ねじり振動

4・1・1 二軸系 始めに、図 4 (a) に示すような、連結された二軸系のねじり振動を考える。左側の SUS 材軸が主振動システム A の軸系に相当し、右側の Al 材軸が従振動システム B の翼系に相当する。

軸系の設計者にとっては、翼系は剛として扱われるので、全翼質量 (慣性能率を指す) $\bar{M}_3 = 8.44 \text{ kgmm}^2$ が軸系端面への付加質量として一体となったモデル図 4 (b) が対象となる。軸系の非連成固有振動数は 1541 Hz である。

一方、翼系の設計者にとっては、ボス部を固定したモデル図 4 (c) が解析対象となる。この例では、翼の先端が振れる一次モードの非連成固有振動数 $\omega = 1837 \text{ Hz}$ である。このときのモーダル質量 $m^* = 5.68 \text{ kgmm}^2$ また連成質量 $m_c^* = 6.37 \text{ kgmm}^2$ であるから、連成係数 $a = 1.12$ となる。 $a^2 = 1.25$ だから、等価質量

はモーダル質量の 25 % 増しということになる。

新たに作られる連成等価縮小モデルは翼振動を表す節点 7 が一つ追加された図 4 (d) のような系となる。追加節点 7 の等価質量 m_{eq} 、等価ばね定数 k_{eq} 、ならびにボス部節点 6 に付加すべき残留質量 Δm が図 4 のごとく決まる。

このようにしてでき上がった連成等価縮小モデルの固有振動数および固有モードの計算結果は図 4 (e) のように求まる。この等価系の計算結果は、かつこ内の厳密解とよく一致しており、この近似モデル化の妥当性がうなずける。

一般に図 4 (e) に見られるように、低いほうの連成固有振動数は低いほうの非連成固有振動数より低く、高いほうの連成固有振動数は高いほうの非連成固有振動数より高い値となる。いわゆる連成効果によるスプリット現象が現れる。前者は軸と翼との同相モード、後者はその逆相モードがそれぞれ連成時モードとして対応する。

4・1・2 軸一弾性円板連成系 図 5 (a) のように、片持ばりの先端に翼系に見立てた円板が取り付けられているとする。節点 7 から 13 までの円板の極慣性能率は図 5 の表に示す大きさであり、それらは同一のねじりばねで連結されている。

翼系を剛とした軸系としてのモデルは、これらの円板を集中質量として端面に付加した系となる。非連成の軸系固有振動数を図 5 (b) に示す。一方、翼系の非連成の固有振動計算はボスのピン固定条件のもとに計算され、一次および二次モードの結果は図 5 (c) である。

以上の準備のもとに等価縮小モデルを作ると図 5 (d) のようになる。ここでは翼系として 2 個のモードを考慮しているので等価質量を 2 個用意し、追加節点 7 および 8 がそれに対応する。各モード連成係数は a

図 5 円板-軸連成系：ねじり振動 (II)

$=1.21$ (一次), -0.298 (二次) である。翼モード次数が増えようと連成モデルにおける全質量はもとの翼系の全質量と同じである。

この連成等価縮少モデルを用いた固有振動数とモードの計算結果を図5(e)に示し、厳密解と比較している。両者はよく合っており、近似モデルの妥当性がうなずける。図5(e)にまとめられているように、軸と翼のそれぞれの一次モードおよび二次モード同士がそれぞれ連成しており、両次数とも連成スプリット効果がここでも現れている。

4.2 曲げ振動

4.2.1 二軸系 図6(a)に示すような、連結された二軸系の曲げ振動で、左側が主振動システムAの軸系に相当し、右側が従振動システムBの翼系に相当する。軸系の固有値解析では、翼系は剛として扱われるので、翼の全質量および全横慣性能率が軸系端面への付加質量として一体となったモデル図6(b)が対象となる。

一方、翼系の固有値解析では、軸系端面であるボス部のたわみと傾きを完全に固定したモデル図6(c)が

対象となる。この例では、翼の先端が振れる一次モードの連成係数は $a_s=1.48$ と $a_s=279.8$ と導かれる。

よって、新たに作られる連成等価縮少モデルは、翼振動を表す追加節点7を設け、端面の節点6から l_{eq} 離れた位置に等価質量 m_{eq} があり、等価ばね定数 K_{eq} で結ばれたモデルが図6(d)のごとく決まる。節点7の等価横慣性能率は零であるから、運動自由度はたわみの一つのみである。

ボス部節点6に付加すべき残留質量 ΔM は、腕の長さ Δl の所に図6のごとく円板 ($\Delta m, \Delta I_d$) を取付けることに相当する。

この結果、等価連成モデルの固有振動数および固有モードの計算結果は図6(e)のようになる。この等価系の計算結果は同掲の厳密解とよく一致しており、この近似モデルは妥当である。

4.2.2 軸-弾性円板連成系 図7(a)のように、片持ばりの軸系の先端に、翼系に見立てた円板が取付いている系の曲げ振動を取り上げる。節点7から10までの円板の質量および横慣性能率は図7の表に示す大きさである。円板同士の相対たわみはなく剛に結合さ

図6 二軸連成系：曲げ振動 (I)

図7 円板-軸連成系：曲げ振動 (II)

れ、回転自由度は許され、同一の回転ばねで連結されている。

翼系を剛円板とみなし集中質量として端面に付加した軸系のモデルを図7(b)に示す。一方、非連成の翼系はボス固定(ローラ端)条件であり、図7(c)のようになる。

連成を表す等価縮少モデルを作ると図7(d)のようになる。ここでは翼系のモードを代表する追加節点7の等価質量は等価な横慣性能率として、このモードの連成係数 $a=1.065$ を用いて、図7の値が割り当てられる。固有振動数とモードの計算結果は図7(e)に示すように、厳密解と比較して両者はよく合っており、近似モデルは妥当である。

5. 結 言

タービン回転機のように、回転軸系と翼系とよりなる翼軸連成振動問題を念頭に、二つの単振動システムが連結されたある一つの単振動系を対象に、等価縮少モデルを用いた連成振動解析法を提案した。

この二つの振動システムは主従振動系に区分される場合を前提としている。より「軟」なシステム(軸系)を主システムに、より「剛」なシステム(翼系)を従システムと呼ぶ。

この等価縮少モデルの作り方をねじり振動および曲

げ振動に対して示した。具体的手順は次のようになる。

(1) ボス部固定条件のもとに従振動系の固有値解析を行い、固有振動数 ω およびモーダル質量 m^* ならびに連成質量 m_c^* を求め、連成効果の大小を示す定数 a を決める。

$$a = m_c^* / m^*$$

(2) 主振動系のボス部の横に隣接するがごとく、追加節点を設ける。

$$\text{等価質量} \quad m_{eq} = a^2 m^*$$

$$\text{等価ばね定数} \quad k_{eq} = \omega^2 m_{eq}$$

ボス部付加残留質量 $\Delta m = \text{翼全質量} - \text{等価質量}$
数値計算例をねじりおよび曲げ振動に関し4例展開した。本モデル化は物理的理解が容易でかつ数値的な精度も妥当であることを検証した。

一般に、非連成時の低いほうの固有振動数は連成時にはより低く、高いほうはより高くなる。このスプリットが連成効果の特徴であることを数値計算例で確認した。

文 献

- (1) Larosa, J. A., ほか2名, *ASME publ.*, (1980).
- (2) 真鍋, 四国電力(株)研究期報, 40 (昭57), 1.
- (3) Jainski, T., *IMEchE*, C253/80 (1980), 9.
- (4) 道村・ほか3名, 機論, 45-399, C (昭54), 1206.
- (5) 道村・田村, 機論, 50-458, C (昭59), 1930.