歯車の振動に及ぼす軸の剛性の影響*

梅澤清彦^{*1}, 北條春夫^{*1}
吉村博^{*2}, 和田敏之^{*3}

The Effect of Shaft Stiffness on the Gear Vibration

Kiyohiko UMEZAWA, Haruo HOUJOH,
Hiroshi YOSHIMURA, and Toshiyuki WADA

The vibration of a helical gear pair set on rather long shafts which should be regarded as flexible is discussed. The effects of the shaft length, the gear position along the shaft and the tooth stiffness upon gear vibration were investigated experimentally. It was proved that changing the shaft elasticity determines only the resonant frequency, and that the vibration amplitude is dependent upon the vibratory performance of the helical gear pair. Furthermore, the natural frequencies of a gear system are calculated by the use of the transfer matrix method. They are in good agreement with the experimental results. It is also clear that the shaft will be regarded to be rigid when the shaft is at least ten times as stiff as the teeth in mating.

Key Words: Gear, Helical Gear, Vibration, Shaft Stiffness, Natural Frequency, Tooth Stiffness, Transfer Matrix Method

1. 緒 論

近年、動力伝達用平行軸歯車装置(以下、歯車装置と呼ぶ)における、振動・騒音の低減化のための研究では、歯車軸の曲げこわさが十分に剛であると仮定し、歯車対のみに着目して、歯をばねとして歯車本体の等価質量を考慮した、1自由度の非線形振動系にモデル化した振動挙動の解明がかなり進んでいる^{(1)~(3)}。

しかしながら、実用の歯車装置においては自動車のトランスミッションのように装置の性質上歯車軸を長くしなければならないものや、小形・軽量化のために軸の剛性を十分に取れないものなどがある。このような歯車系においては、軸の曲げ・ねじれとの連成が系の振動に及ぼす影響が大きく、従来の1自由度系による解析では、その振動挙動を記述することは困難であると考えられる。

歯車の歯を回転とともに変動するばねとして、軸系のばねを含めた多自由度系の解析としては、福岡ら⁽⁴⁾、

清野ら⁽⁵⁾の研究があるが、系が複雑であり、どの自由度がどのような寄与をしているかを直感的にとらえるのは困難なようである。

また、軸の曲げ・ねじりの連成を取扱った研究^{(6)~(8)}も見受けられるが、軸がどのように振動に影響を及ぼしているかはまだ明らかとはいえない。特に、一般に常用されるはずば歯車では、スラスト荷重により軸が曲げられ、軸の剛性が振動に及ぼす影響はさらに複雑と考えられる。

そこで本研究では、歯車軸の長さ、歯車対の軸上での取付け位置が可変である実験装置を用い、さらにかみあい率平面上で振動性能を異にするはずば歯車を用いて⁽⁹⁾、軸の剛性および歯車対の振動性能が歯車系の振動挙動に及ぼす影響を実験的に明らかにした。

一方実験系を、歯のばねと軸の曲げ・ねじり・軸方向のばねを考慮した系にモデル化し、これに伝達マトリックス法を適用した多自由度振動解析を行った。この計算結果と実験結果との比較検討により、本解析手法が歯車装置の振動挙動を解明する手段として有効であることを示した。さらに、従来から行われている、歯車の振動に対して軸の剛性を無視し、歯車対のみを考慮するモデル化の適用限界を明らかにした。

* 昭和62年10月25日 九州・中国四国支部熊本地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年4月27日。

^{*1} 正員、東京工業大学精密工学研究所 (〒227 横浜市区長津田町4259)。

^{*2} (株)リコー (〒143 東京都大田区中馬込1-3-6)。

^{*3} 松下電器産業(株) (〒571 門真市大字門真1006)。

2. 実験方法

2・1 実験装置 実験装置の概略図を図1に示す。この装置は、55 kW 可変速交流モータからの動力が、V ベルト、プーリ、ダイアフラムカップリング、試験歯車対、被動軸側のダイアフラムカップリングを介して、最大トルク 210 N・m の渦電流式動力計により吸収される、動力吸収式負荷かみあい試験機である。

歯車軸両端の軸受台は、ガイドに沿って軸方向に移動させて固定することができる。本研究では軸のばねこわさの影響を調べるために、軸受間の距離〔以下軸長 (L) と呼ぶ〕が 353 mm と 267 mm の 2 種類の軸を用いた。また、試験歯車対は軸上の任意の位置に固定するため ETP ブッシュ (三木プーリ) を用いて軸に取付けている。負荷トルクは主として 98 N・m、接線荷重に換算して 1.7 kN で実験を行った。試験歯車の潤滑に関しては、無添加タービン油 (JIS 3 号) を毎分 1.3 L 供給する循環給油方式とした。

歯車軸の軸径は 35 mm、材質は SKS-2 で焼入後研削仕上げしている。さらに、軸端部に取付けられているカップリングおよびスリップリングは、駆動軸・被動軸とも、同一仕様にしている。

2・2 試験歯車対 実験に用いたはずば歯車対は 2 種類であり、圧力角・ねじれ角等は変えずに、歯幅のみを変えて重なりかみあい率の振動挙動に及ぼす影響を調べた。なお、歯の部分を除いてブランク形状は同一とし、質量はほぼ等しくなるようにした。歯幅の狭いほうを H-21、広いほうを H-31 と呼び、その諸元を表1に示す。表中の歯のばねこわさは、梅澤らにより求められているはずば歯車の歯の作用線方向の平均ばねこわさである⁽³⁾。両者のかみあい率を比較すると

H-21：全かみあい率が 2.0 以上で、重なりかみあい率が 1.0 未満の歯車対

H-31：重なりかみあい率が 1.0 以上で振動の大幅な低減が見込まれる歯車対⁽⁹⁾

である。また、両歯車対とも H_{RC} 55 程度に高周波焼入れした後、研削仕上げを行っている。

2・3 測定方法 歯車系の振動挙動を明らかにするために、歯車対の各方向の振動加速度の測定および軸の振動変位 (軸の振動モード) の測定を行った。

歯車対の振動加速度の測定においては、駆動歯車、被動歯車ともに、図2に示すように、歯車本体の半径 45 mm の円周上で、円周方向・軸方向にそれぞれ 2 個ずつの加速度ピックアップを軸に関して対称な位置に取付け、これらの信号をスリップリングを介して取り出す。円周方向に取付けられた 2 個のピックアップの信号の和を取り、1/2 にして得られる加速度を円周方向加速度、差を取り 1/2 にして得られる加速度を半径方向加速度と呼ぶ。また、軸方向に取付けられた 2 個のピックアップの信号の和の 1/2 を軸方向加速度、差の 1/2 を傾き方向加速度と呼ぶ。

さらに、主要な共振点における軸の振動モードを求めるために、ギャップセンサを用い、軸の垂直方向、水平方向の振動変位の大きさと位相の測定を、駆動軸、

表 1 試験歯車諸元

Gear pair	H-31	H-21
Number of teeth		52
Helix angle (°)		30
Normal Module		2.0
Normal pressure angle (°)		20
Face width (mm)	15	8
Reference diameter (mm)		120.1
Addendum modification coefficient		-0.025
Transverse contact ratio	1.43	1.43
Overlap ratio	1.19	0.64
Total Contact ratio	2.62	2.06
Mean stiffness of teeth (MN/m)	284.0	180.6

図 1 実験装置概略図

図 2 歯車に取付けた加速度ピックアップ

被動軸上の数箇所で行った。

3. 解析方法

本研究では、多自由度振動解析として伝達マトリックス法⁽¹⁰⁾を用いて実験系の自由振動解析を行い、系の固有振動数および正規モードを数値計算により求めた。実際には、歯車系の振動は、歯のばねこわさがかみあいの進行に伴って変動するために生じる係数励振形の非線形振動である。しかし、特に固有振動数および振動モードを問題にする場合には、これを平均ばねこわさで置き換えて線形化してよいことがわかってい⁽⁵⁾。そこで、本研究でも歯を線形ばねとして取扱うことで、線形振動系として解析を行うこととした。

実験系に伝達マトリックス法を適用するために用いた座標系および考慮した状態量を図3に示す。被動軸、駆動軸それぞれの中心軸に x 軸を取り、歯車の歯の作用線方向を z 軸、両方向に直交する歯のすべり方向(以下単にすべり方向と呼ぶ)を y 軸にとる。考慮する振動変位は軸の作用線方向・すべり方向への軸の曲げによる変位と傾き角、歯車軸まわりのねじりによる回転角および軸方向の変位の6種類である。図中のベクトル記号は、力のベクトルが矢印、モーメントベクトルは右ネジ則に従うものとして二重線で表す。以下にそれぞれの状態量を記す。

- w_j : 作用線方向(z)の軸のたわみ
- V_{zj} : 作用線方向(z)の軸のせん断力
- ϕ_j : すべり方向(y)まわりの軸の傾き角
- M_{yj} : すべり方向(y)まわりの軸の曲げモーメント
- θ_j : 軸(x)まわりの回転角
- T_j : 軸(x)まわりのトルク
- v_j : すべり方向(y)の軸のたわみ
- V_{yj} : すべり方向(y)の軸のせん断力
- ψ_j : 作用線(z)まわりの軸の傾き角
- M_{zj} : 作用線(z)まわりの軸の曲げモーメント
- u_j : 軸方向(x)の変位
- N_j : 軸力

ただし添字 $j=1$: 駆動軸
 $j=2$: 被動軸

図4に、実験系の置換モデルを示す。図中 A, B, ..., の記号は図1に示した各位置の記号と対応している。歯車軸は $L=267$ mm のとき8分割、軸長 $L=353$ mm のとき12分割程度とし、分割の中心に集中する質量(軸回りの慣性モーメントを含む。以下、集中質量と呼び●印で示す)を置いている。また、両端の軸受は単純支持点とした。

歯車は、集中質量としての効果のほかに、直徑回り

の慣性モーメントを考慮した。また、歯車の歯のばねにより駆動軸と被動軸が連成していると考え、歯は常にかみあっているものとし、駆動歯車と、被動歯車の相対変位により生じた、歯面直角方向の歯のたわみを δ とする。 δ はここでは作用線方向のたわみ w_1, w_2 、軸回りの回転角 θ_1, θ_2 、軸方向変位 u_1, u_2 、作用線方向回りの傾き角 ψ_1, ψ_2 の関数とする。これより

$$\delta = (w_1 - w_2) \cos \beta_b - (\theta_1 + \theta_2) r_b \cos \beta_b + (u_1 - u_2) \sin \beta_b + (\psi_1 + \psi_2) r_b \sin \beta_b$$

ここで r_b : 基礎円半径、 β_b : 基礎円歯ねじれ角

これに歯面直角方向の歯のばねこわさ K_g を掛けたものが、歯面直角方向の反力 W となる。

$$W = K_g \cdot \delta$$

ただし $K_g = K_g / \cos^2 \beta_b$

ここで K_g : 歯の作用線方向の平均ばねこわさ
 この反力 W が、作用線方向反力 V_{z1}, V_{z2} 、軸回りのモーメント T_1, T_2 、軸力 N_1, N_2 、作用線方向回りのモーメント M_{z1}, M_{z2} にそれぞれ作用すると考えた。なお、ここでは1自由度振動解析の際問題になる歯形誤差等の影響は考慮していない。

ダイアフラムカップリングのフランジ、スリップリングはその質量を考慮し、それぞれ質量のないはりで軸端に連結しているものとする。ただし、ダイアフラムカップリングの本体は、カタログ値によりばねの効果を考慮している。境界条件としては、左端は駆動軸側をプーリ右側の軸受(P点)、被動軸側を動力計右側の軸受(A点)で固定端とし、右端は両軸とも自由端

図3 座標系および状態量

図4 系のモデル

(R 点, D 点の外側) とした (図 1 参照)。

この境界条件を適用して得られた振動数方程式を二分法により解いて, 固有振動数を求める。さらに各固有振動数における正規モードを計算により求めた。

4. 結果および考察

4.1 実験結果 図 5 に, 回転数に対する, 被動歯車の四方向の振動加速度応答の rms 値を, 軸長および歯車対を変えて求めた結果を示す。(a) は歯車対 H-21: 軸長 $L=267$ mm, (b) は歯車対 H-31: $L=267$ mm, (c) は歯車対 H-21: $L=353$ mm の場合で, 歯車取付け位置はすべて軸中央の場合である。(a), (b) より図の縦軸に注目すれば, 歯車対 H-31 の振動レベルは歯車対 H-21 の場合の 1/5 程度になっていることがわかる。これは重なりかみあい率が 1 を超えると振動が小さくなるという, かみあい率平面による分類⁽⁹⁾ とよく対応しており, 軸が長い場合にも, 歯車対本体の振動性能を向上すれば系の振動も抑えられるこ

図 5 回転数に対する振動加速度の応答

とを表している。

一方, (a), (c) より, 軸長を変化させても振動レベルにはあまり変化がないが, 共振を示す回転数は大きく異なることが明らかである。

また, それぞれの組合せにおける, 4 方向成分の加速度応答を比較すると, すべての方向の応答が共振を示す回転数と限られた成分のみ連成を示す回転数があり, さまざまな共振モードがあることがわかる。特に, 半径方向 (·····) と傾き方向の振動 (·····) は, 軸の曲げによるたわみと傾き角に対応するため連成が大きく, 軸が複雑な共振モードを持つと考えられる高い回転数では両者の共振する回転数はよく一致している。一方, 軸方向振動応答のみは, 他の 3 方向とは異なる挙動を示しており, 他との連成はあまり認められない。

次に, 軸長 $L=267$ mm の軸と歯車対 H-21 を用い, 軸上での歯車対取付け位置を変化させたときの, 加速度応答の変化を図 6 に示す。 l はモータ側の軸受中心から歯車までの距離で, 5 箇所の取付け位置において, 被動歯車の円周方向加速度応答の実効値を測定した。これより, 軸上の歯車取付け位置により, 共振する回転数および共振時の応答のレベルが大きく変化するものと, あまり変化しないものがあり, 軸の全長のみではなく歯車の取付け位置も, 系の振動挙動に大きな影響を及ぼすことがわかる。

図 6 歯車取付け位置による振動挙動の変化

そこで各回転数における加速度応答の周波数分析を行い、かみあい周波数やその高調波の振幅が極大となることから、系の固有振動数を求めた結果を図7に、歯車対 H-21、軸長 $L=267\text{ mm}$ の場合について示す。横軸が固有振動数、縦軸が歯車取付け位置で、図中の各記号は円周、半径、傾きの各方向の連成の状態から、同じ共振モードと思われる固有振動数ごとに整理したものである。

●印はすべての方向で観測され、図5(a)の3100 rpm 付近のピークに対応しており、かみあい周波数と共振している。図6でも明らかなように、歯車取付け位置を軸中央としたときに共振周波数、レベルともに最も高くなるという特徴を持っている。また、○印は半径、傾き方向に連成を示すもの(2200 rpm 付近)であり、歯車位置に対する共振周波数の変化は●印とは逆の傾向を示す。

■印は主として回転方向振動が顕著で、歯車対をスリップリング側(図1中D、R側)へ近づけるに従って共振周波数が高くなってゆく。また、▽印や、▼、△印は歯車位置の影響をほとんど受けず、軸の振動モードも両端支持軸の一次の固有モードに近い。

4.2 計算結果 図7に対応する条件で、伝達マ

図7 歯車取付け位置による固有振動数の変化(実験)

図8 歯車取付け位置による固有振動数の変化(計算)

トリックス法によって計算した固有振動数を図8に示す。

歯車取付け位置による固有振動数の推移の挙動から、図に示した●印と○印は、図7の同じ記号に対応すると考えられる。そこで、実験で求めた軸の振動モードと計算から求めた正規モードとを比較して、図9に示す。歯車の両側で符号が反転する場合とそうでない場合があることが両者でよく対応している。

以上のようにしてすべての固有モードを対応づけることは困難であったが、解析結果と実験結果は、厳密な固有振動数の一致はみられないものの、全体の傾向がよく一致している。以上から、軸上の歯車取付け位置、軸長、歯車対を変えることによる、固有振動数の変化の挙動の推定、および正規モードの推定が可能であるといえる。これより、比較的長い軸を有する歯車系に、伝達マトリックス法を適用した本解析手法は、歯車系の多自由度解析法として歯車装置設計の際等に有効であると考えられる。

4.3 軸長に対する固有振動数の変化 本解析手法により固有振動数を求める方法は、従来の、歯車の歯のばねこわさと、歯車対の等価慣性質量から固有振動数が求められる1自由度の解析法に比べると、マトリックスの計算等に手間がかかる。そこで、どの程度まで軸の剛性がある場合に、1自由度による解が有効であるかを検討した。

ここでは軸径は一定として($=35\text{ mm}$)、軸長のみを変化させることにより剛性を変えて計算を行った。ただし、歯車対は H-21 とし軸の中央に取付けられているものとした。その結果を図10に示す。横軸に固有振動数を取り、縦軸には、軸を両端支持ばりと考えて、中央(歯車位置)での軸直角方向のばね定数(K_{shaft})を、

図9 軸の振動モードの比較(H-21, $L=267\text{ mm}$)

図 10 軸の剛性に対する固有振動数の変化

歯の作用線方向の平均ばねこわさ (K_g) で無次元化して示している。また図中 f_n は、歯のばねと歯車の慣性モーメントで構成される 1 自由度の振動系として求めた固有振動数である。図には、本研究で用いた軸長に対応する位置を表示している。この図より、軸のこわい場合には、 f_n に等しい固有振動数があるが、軸が柔らかくなるにつれ急速に低下し、実験を行った軸長ではかなり低い周波数になっている。一方、軸がこわい場合にも f_n 以外の固有振動数が現れているが、これは軸受の外側の要素の影響と考えられる。

以上から、軸の作用線方向のばね定数が、歯のばねこわさの 10 倍程度ある場合には、軸が十分に剛いとしてその軸直角方向への変位を無視した 1 自由度モデルによる固有振動数の計算で、十分に有効であるといえる。

5. 結 論

歯車軸の剛性が、歯車系の振動挙動に及ぼす影響について、実験および伝達マトリックス法による解析を

行い、以下の結論を得た。

(1) 系の固有振動数は、それぞれ複雑な共振モードをもつ。特に軸上の歯車取付け位置により固有振動数およびピークのレベルが変化するものと変化しないものが存在する。

(2) 軸長、すなわち軸の剛性は系の固有振動数の変化には大きな影響を及ぼすが、振動レベルには影響を及ぼさない。したがって、振動レベル低減化のためには、かみあい率平面上での評価等により、歯車対そのものの振動性能の向上を行う必要がある。

(3) 本研究で用いた、歯車系を多自由度系として伝達マトリックス法を適用する解析手法は、系の固有振動数、および共振モードをよく推定しており、歯車装置設計の際の有効な指針となり得る。

(4) 作用線方向で考えた軸のばねが、歯車の歯のばねこわさの 10 倍程度あれば、従来の 1 自由度系による振動解析が可能である。

終わりに、実験の際多大なる協力をいただいた朝倉里司氏、伊藤達也氏に感謝する。

また本研究は、昭和 61 年度文部省科学研究費一般研究(B)61460097 の補助を受けて行われたものの一部であり、計算は東京工業大学情報処理センター M-280 H を使用したことを付記する。

文 献

- (1) 梅澤・佐藤・石川, 機論, 49-441, C (昭 58), 749.
- (2) 梅澤・佐藤・河野, 機論, 49-443, C (昭 58), 1217.
- (3) 鈴木・梅澤, 機論, 53-490, C (昭 62), 1249.
- (4) 福岡・古川・会田, 機論, 38-315 (昭 47), 2988.
- (5) 清野・会田・藤井, 機論, 43-373 (昭 52), 3556.
- (6) 飯田・田村・菊池・阿片, 機論, 46-404, C (昭 55), 375.
- (7) 井田・松下・菊池・矢鍋, 機論, 50-451, C (昭 59), 479.
- (8) 岩壺・川井・有井・中村, 機論, 52-481, C (昭 61), 2343.
- (9) 梅澤・鈴木・北條・佐藤, 機論, 50-456, C (昭 59), 1458.
- (10) ベステル, E. C., レキー, F. A. (加川訳), マトリクス法による振動解析, (昭 59), プレイン図書出版.

討 論

〔質問〕 加藤 正名, 高津 宣夫

〔東北大学工学部〕

実験で歯車の半径方向振動を測定しているが、これは歯車本体を剛体と考えたときのその軸直角方向振動を測定しようとしているものと思う。この実験方法では、歯車の振動方向と図 2 に示されている Acc. P. U. I と Acc. P. U. II とを結ぶ直径と垂直な直径とが一致する瞬間のみ正しい値が得られ、他の回転方向位置での測定値は補正を施す必要があると思われる。これは

振動の rms 値のみを問題にしているからか。(傾き方向加速度についても同様)

〔回答〕 ご指摘のとおりで、本研究で用いた測定方法では、軸や歯車の振動方向と加速度ピックアップの向きとが一致したときにその振動を正しく測ることができ、両者が直交すると加速度ピックアップの信号は零となって全く測れなくなる。最も簡単な例として、角周波数 ω_r で回転している軸が、外部から観測したときに ω_s で軸直角方向に振動しているとする、本

研究の方法で観測される加速度の信号は軸の回転による変調を受け、

$$\sin \omega_s t \cdot \sin \omega_r t$$

のように記述できる。この場合には、計測した振動の rms 値は真の振動の rms 値の $1/\sqrt{2}$ になる。

以上は、軸の振動の方向が空間的に固定されている場合の議論であるが、現実には振動の方向が軸といっしょに回転するような場合も生じていると考えられ、

これらの挙動が複合されて観測されている。これらを考慮にいれて測定結果に補正を加えるのは困難であるので、本論文では測定した値をそのまま表示した。ここでは、共振のようすや振動の大きさを種々の条件で比較することに主眼をおいているので、特に問題はないと考えている。

なお、振動の rms 値の測定の際には常に波形を観察しており、上述のような特徴を確認している。

53 巻 495 号, C 編 (昭 62-11) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
田村英之ほか	2202	右	式(13)	$b^1_m y^m$	$b^1_m y^m$

54 巻 497 号, C 編 (昭 63-1) 正誤表

執筆者名	ページ	欄	行	誤	正
山田 元ほか	25	左	41	次式を挿入 $\tilde{U}_{53} = -\tilde{U}_{54} = \frac{n^2(1-\nu^2)}{\xi \bar{r}^2} - \frac{n^2(1-\nu) A_2(1-B)}{\bar{r}^2}$	
	"	右	11	次式を挿入 $\tilde{U}_{77} = -\frac{2}{\xi} - \left(\frac{\bar{h}^2}{12\xi \bar{r}_1^2} + \frac{\bar{\psi}_s}{\bar{r}_1} \right) (1-\beta)$	
朴 錫 柱ほか	54	英文概要	5	machines of	machines and
庄 司 彰	268	英文概要	下 2	obtained	obtained