境界適合座標系を用いた潤滑流れ計算の
はん用化に関する研究*
(第2報, 定常気体潤滑の場合)川 端 信 義^{*1}A Study on the Numerical Analysis of Fluid Film Lubrication
by the Boundary-fitted Coordinates System
(2nd Report, The Case of Steady Gas-lubrication)

Nobuyoshi KAWABATA

A new method on the discretization of the steady gas-lubricated Reynolds equation is presented. The present method is derived from applying the boundary-fitted coordinates system to the divergence formulation (DF) method. Generalized algebraic equations for node pressures derived by the present method can be widely used to represent for arbitrary film configuration and arbitrary bearing shape. This algebraic equation is shown by separating into three components of the Poiseuille flow, the Couette flow and the correcting component of slip flow by a rarefaction of gas. The Couette flow component is discretized by a new upstream scheme derived by an extension of the simple upstream scheme, and other components are discretized by an approximation of linearized distribution. Discretization of four representative boundary conditions are shown. Examples on a herringbone journal bearing used in a misaligned large eccentricity and a small number of grooves are shown.

Key Words: Numerical Analysis, Lubrication Theory, Direct Numerical Solution Methods, Divergence Formulation Method, Boundary-fitted Coordinates System, Gas Bearing, Static Characteristics

1. ま え が き

前報⁽¹⁾では、潤滑面上の微小要素に流入・流出する流量を差分近似して流量保存式を立てるダイバージェンスフォーミュレーション法⁽²⁾(以下DF法と略す)に、複雑な場を規則正しい格子に変換する境界適合座標系⁽³⁾を導入し、非圧縮性流体潤滑の場合について、圧力に対する離散式を導いた。DF法は有限要素法に比べ境界形状の柔軟さにおいてははん用性が劣るとされていたが⁽⁴⁾、この方法によって複雑な形状をした潤滑面を効率よく取扱うことが可能となり、はん用的なプログラムをDF法によって開発することができることを示した。

前報で扱った非圧縮性の場合には密度が一定であるため取扱いは比較的簡単であったが、本報では密度が圧力の関数となるような気体潤滑の場合を取扱う。気体潤滑の場合はすきまの流量式が圧力に対して非線形であるため離散式が非常に複雑になる。本研究では流量をポアズィユ流れ、クエット流れおよび気体の希薄性のためのスリップ流れによる修正成分に分離し、流量

保存式も同様に分離して離散化を行った。また非定常問題では密度(圧力)の時間微分が現れるため、時間積分の問題が生じる。そのため本報では定常の場合を取扱うことにする。

本論文で使われる主な記号および語句を以下に示す。

- h : 潤滑流体膜の厚さ
- i, j : 格子番号 (ξ, η 座標値でもある)
- M_ξ, M_η : ξ, η 方向の格子数
- p : 圧力
- p_a : 周囲圧力 (基準圧力)
- Q : 質量流量
- r, θ, z : 円柱座標系
- R : 圧力の関数 ($\rho = R(p)p$)
- s : 潤滑面上を $\theta = \text{Const.}$ 線に沿う座標
- ρ : 密度
- μ : 粘性係数
- λ_a : 周囲圧力における分子平均自由行程
- ω_1, ω_2 : 軸および受の回転角速度
- ω_p : (s, θ) 座標系の回転角速度
- ξ, η : 境界形状に滑らかに沿う一般曲線座標系
- DF 領域: DF 法によって流量の連続を満たす要素
- 格子間領域: 隣接する四つの格子点を頂点とする正方

* 昭和62年11月28日 関西支部第247回講演会において講演。原稿受付 昭和62年2月26日。

^{*1} 正員、福井大学工学部 (〒910 福井市文京3-9-1)。

形領域

添字

 P : ポアズィユ流れによる成分 C : クエット流れによる成分 S : スリップ流れによる修正成分

3章で用いる主な記号を以下に示す.

 c : 半径すきま D : 軸径 e, E : ラジアル偏心率, 偏心率 $E=e/c$ E_1, E_2 : 両軸端におけるラジアル偏心率 F : 無次元ラジアル負荷容量 $=f/p_a D^2$ L : 軸受長さ M : 無次元モーメント $=m/p_a D^3$ P : 無次元圧力 $=p/p_a$ ϕ_1, ϕ_2 : 両軸端における偏心方向 ϕ_f : $\theta=0$ と F の方向とのなす角度 ϕ_m : $\theta=0$ と M の方向とのなす角度 ω : 軸の回転角速度 Λ : 圧縮性定数 $=6\mu D^2 \omega / p_a c^2$ ε : 収束判定定数

2. 離散式

2.1 基礎式 前報と同じく, 図1のような任意形状の回転面上の潤滑面を考え, 円柱座標 (r, θ, z) と $\theta=\text{Const.}$ 面と潤滑面の交線に沿う s 座標を考える. また潤滑面上に, 周囲境界およびすきまの不連続境界などに座標線が滑らかに沿うように一般曲線座標系 (ξ, η) を考える. また, この (ξ, η) 座標系における計算格子の間隔を1とし, 格子線の ξ, η 座標値がそれぞれの格子番号 i, j に等しくなるように設定する.

気体潤滑の場合は, 圧縮性のため密度 ρ も未知量としなくてはならないが, 本研究では潤滑気体にバロトロピー性の仮定が成り立つとし, 密度 ρ を圧力 p の関数 $R(p)$ を用いて

$$\rho = R(p)p \quad (1)$$

と表すことにする. また, 気体潤滑に対しては一般に等温変化とすることが多いが, この場合は

図1 任意形状回転潤滑面

$$R(p) = \text{定数} \quad (2)$$

と置けばよい.

上記の条件に基づいて (ξ, η) 座標系における大きさ1の正方形のDF領域に流入・流出する質量流量の保存式を導くことにする. 前報から, $\xi=\text{Const.}$ 線上の $\eta=\eta_1 \sim \eta_2$ の区間を通過する質量流量 Q^ξ は

$$Q^\xi = Q_P^\xi + Q_C^\xi + Q_S^\xi \quad (3)$$

$$Q_P^\xi = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \rho(-Ap_\xi + Bp_\eta) d\eta \quad (4)$$

$$Q_C^\xi = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \rho D d\eta \quad (5)$$

$$Q_S^\xi = \int_{\eta_1}^{\eta_2} R(-Fp_\xi + Gp_\eta) d\eta \quad (6)$$

である. ここで $Q_P^\xi, Q_C^\xi, Q_S^\xi$ はそれぞれポアズィユ流れ, クエット流れ, 分子平均自由行程の影響によるスリップ流れによる修正項⁽⁵⁾である. また下付添字 ξ, η は偏微分を意味する. 同様に, $\eta=\text{Const.}$ 線上の $\xi=\xi_1 \sim \xi_2$ の区間を通過する質量流量 Q^η は

$$Q^\eta = Q_P^\eta + Q_C^\eta + Q_S^\eta \quad (7)$$

$$Q_P^\eta = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho(Bp_\xi - Cp_\eta) d\xi \quad (8)$$

$$Q_C^\eta = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho E d\xi \quad (9)$$

$$Q_S^\eta = \int_{\xi_1}^{\xi_2} R(Gp_\xi - Hp_\eta) d\xi \quad (10)$$

である. ここで A, B, C, D, E, F, G, H は次式である.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= s_\eta^2 + (r\theta_\eta)^2 \\ \beta &= s_\xi s_\eta + (r\theta_\xi)(r\theta_\eta) \\ \gamma &= s_\xi^2 + (r\theta_\xi)^2 \\ J &= s_\xi(r\theta_\eta) - s_\eta(r\theta_\xi) \\ A &= (h^3/12\mu)(\alpha/J) \\ B &= (h^3/12\mu)(\beta/J) \\ C &= (h^3/12\mu)(\gamma/J) \\ D &= -hs_\eta r\tilde{\omega} \\ E &= hs_\xi r\tilde{\omega} \\ \tilde{\omega} &= (\omega_1 + \omega_2)/2 - \omega_p \\ F &= (h^2/2\mu)p_a \lambda_a \alpha/J \\ G &= (h^2/2\mu)p_a \lambda_a \beta/J \\ H &= (h^2/2\mu)p_a \lambda_a \gamma/J \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

格子点 (i, j) を頂点とする4格子間領域を, 図2のようにそれぞれI, II, III, IVとすると, 破線で示したDF領域に流入・流出する流量の保存式は

$$Q_i^\xi - Q_{i+1}^\xi + Q_{i+1}^\eta - Q_i^\eta + Q_i^\eta - Q_{i+1}^\eta - Q_i^\eta = 0 \quad (12)$$

となる. ここで Q_i^ξ は領域Iの $\xi=i-1/2$ 境界を通過してDF領域へ流入する質量流量, Q_i^η は領域Iの $\eta=j-1/2$ 境界を通過してDF領域へ流入する質量流量を意

味する。

式(12)の左辺をポアズユ流れ, クエット流れ, スリップ流れのそれぞれの成分 Q_P , Q_C , Q_S に分離し, 式(12)を

$$Q_P + Q_C + Q_S = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

のように表す。以下の各節において Q_P , Q_C , Q_S を求める。

2.2 ポアズユ流れの成分 Q_P 格子点 (i, j) を 0 番, $(i-1, j)$ を 1 番, 以下図 2 のように格子点に番号を付けて表し, その格子点上の圧力および関数 R の値にその番号の添字を付けて表すことにする。四つの格子点 5, 3, 1, 0 を頂点とする格子間領域内の圧力分布および密度分布を次のように線形に近似する。

$$p(\xi, \eta) = (j - \eta) \{ (i - \xi)p_5 + (\xi - i + 1)p_3 \} + (\eta - j + 1) \{ (i - \xi)p_1 + (\xi - i + 1)p_0 \} \quad \dots (14)$$

$$\rho(\xi, \eta) = (j - \eta) \{ (i - \xi)R_5p_5 + (\xi - i + 1)R_3p_3 \} + (\eta - j + 1) \{ (i - \xi)R_1p_1 + (\xi - i + 1)R_0p_0 \} \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(14), (15)を2.1節の式(4), (8)に代入して積分を行うのであるが, この積分を解析的に求めるのは困難である。そのため前報と同様に, A, B, C, D, E, F, G, H に対して各格子間領域の中点の値で代表する段付面近似を用い, 積分区間内で一定として積分を実行する。この中点の値に添字 I, II, III, IV を付けて表すことにする。

このようにしてポアズユ流れによって DF 領域に流入・流出する質量を求め, それらから DF 領域内の質量の増加分 Q_P を求めると次式のようにになる。

$$Q_P = \{ a_{00}p_0^2 + p_0(a_{01}p_1 + a_{02}p_2 + a_{03}p_3 + a_{04}p_4 + a_{05}p_5 + a_{06}p_6 + a_{07}p_7 + a_{08}p_8) + p_1(a_{11}p_1 + a_{13}p_3 + a_{14}p_4 + a_{15}p_5 + a_{17}p_7) + p_2(a_{22}p_2 + a_{23}p_3 + a_{24}p_4 + a_{26}p_6 + a_{28}p_8) + p_3(a_{33}p_3 + a_{35}p_5$$

図 2 計算面 (ξ, η) における格子点

$$\begin{aligned} & + a_{36}p_6 + p_4(a_{44}p_4 + a_{47}p_7 + a_{48}p_8) \\ & + a_{55}p_5^2 + a_{66}p_6^2 + a_{77}p_7^2 + a_{88}p_8^2 / 48 \\ a_{00} &= R_0 \{ -7(A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV} + C_I + C_{II} \\ & + C_{III} + C_{IV}) + 9(B_I - B_{II} - B_{III} + B_{IV}) \} \\ a_{01} &= 7(A_I + A_{III})(R_0 - R_1) \\ & - 2(C_I + C_{III})(R_0 + R_1) + 6(B_I - B_{III})R_1 \\ a_{02} &= 7(A_{II} + A_{IV})(R_0 - R_2) \\ & - 2(C_{II} + C_{IV})(R_0 + R_2) - 6(B_{II} - B_{IV})R_2 \\ a_{03} &= -2(A_I + A_{II})(R_0 + R_3) \\ & + 7(C_I + C_{II})(R_0 - R_3) + 6(B_I - B_{II})R_3 \\ a_{04} &= -2(A_{III} + A_{IV})(R_0 + R_4) \\ & + 7(C_{III} + C_{IV})(R_0 - R_4) + 6(B_{III} - B_{IV})R_4 \\ a_{05} &= 2(A_I + C_I)(R_0 - R_5) - 3B_I(3R_0 - R_5) \\ a_{06} &= 2(A_{II} + C_{II})(R_0 - R_6) + 3B_{II}(3R_0 - R_6) \\ a_{07} &= 2(A_{III} + C_{III})(R_0 - R_7) + 3B_{III}(3R_0 - R_7) \\ a_{08} &= 2(A_{IV} + C_{IV})(R_0 - R_8) - 3B_{IV}(3R_0 - R_8) \\ a_{11} &= R_1 \{ 7(A_I + A_{II}) - C_I - C_{II} + 3(B_I - B_{II}) \} \\ a_{13} &= 2(C_I - A_I)(R_1 - R_3) - 3B_I(R_1 + R_3) \\ a_{14} &= 2(A_{III} - C_{III})(R_1 - R_4) + 3B_{III}(R_1 + R_4) \\ a_{15} &= 2A_I(R_1 + R_5) + C_I(R_1 - R_5) - 6B_IR_1 \\ a_{17} &= 2A_{III}(R_1 + R_7) + C_{III}(R_1 - R_7) + 6B_{III}R_1 \\ a_{22} &= R_2 \{ 7(A_{II} + A_{IV}) - C_{II} - C_{IV} \\ & - 3(B_{II} - B_{IV}) \} \\ a_{23} &= 2(C_{II} - A_{II})(R_2 - R_3) + 3B_{II}(R_2 + R_3) \\ a_{24} &= 2(A_{IV} - C_{IV})(R_2 - R_4) - 3B_{IV}(R_2 + R_4) \\ a_{26} &= 2A_{II}(R_2 + R_6) + C_{II}(R_2 - R_6) + 6B_{II}R_2 \\ a_{28} &= 2A_{IV}(R_2 + R_8) + C_{IV}(R_2 - R_8) - 6B_{IV}R_2 \\ a_{33} &= R_3 \{ 7(C_I + C_{II}) - A_I - A_{II} + 3(B_I - B_{II}) \} \\ a_{35} &= A_I(R_3 - R_5) + 2C_I(R_3 + R_5) - 6B_IR_3 \\ a_{36} &= A_{II}(R_3 - R_6) + 2C_{II}(R_3 + R_6) + 6B_{II}R_3 \\ a_{44} &= R_4 \{ 7(C_{III} + C_{IV}) - A_{III} - A_{IV} \\ & - 3(B_{III} - B_{IV}) \} \\ a_{47} &= A_{III}(R_4 - R_7) + 2C_{III}(R_4 + R_7) + 6B_{III}R_4 \\ a_{48} &= A_{IV}(R_4 - R_8) + 2C_{IV}(R_4 + R_8) - 6B_{IV}R_4 \\ a_{55} &= R_5(A_I + C_I - 3B_I) \\ a_{66} &= R_6(A_{II} + C_{II} + 3B_{II}) \\ a_{77} &= R_7(A_{III} + C_{III} + 3B_{III}) \\ a_{88} &= R_8(A_{IV} + C_{IV} - 3B_{IV}) \\ & \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

2.3 クエット流れの成分 Q_C 次にクエット流れによる DF 領域内の質量の増加分 Q_C を求める。文献(6)に示されている上流化スキームをここでも適用する。このスキームは「クエット流れに対する DF 領域境界上の密度を上流側の格子点における密度に置き換える」というものであるが, この考えをさらに発展させ, 上流側の影響の程度を調節するパラメータを導入

し、領域 I の $\xi = i - 1/2$ 線に垂直方向のクエット流れに対し

$$\left. \begin{aligned} \rho D &= D_{1+} \{ (j-\eta) R_5 p_5 + (\eta-j+1) R_1 p_1 \} \\ &+ D_{1-} \{ (j-\eta) R_3 p_3 + (\eta-j+1) R_0 p_0 \} \\ D_{1+} &= (D_1 + \lambda^{\eta} |D_1|) / 2 \\ D_{1-} &= (D_1 - \lambda^{\eta} |D_1|) / 2 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

と表す。同様に $\eta = j - 1/2$ 線の垂直方向に対し

$$\left. \begin{aligned} \rho E &= E_{1+} \{ (i-\xi) R_5 p_5 + (\xi-i+1) R_3 p_3 \} \\ &+ E_{1-} \{ (i-\xi) R_1 p_1 + (\xi-i+1) R_0 p_0 \} \\ E_{1+} &= (E_1 + \lambda^{\xi} |E_1|) / 2 \\ E_{1-} &= (E_1 - \lambda^{\xi} |E_1|) / 2 \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

と表す。ここで λ^{ξ} , λ^{η} は上流側の影響の程度を調節するパラメータとなり、 λ^{ξ} は $\xi = \text{Const.}$ 線の直角方向、 λ^{η} は $\eta = \text{Const.}$ 線の直角方向のクエット流れに対するパラメータである。このパラメータは 0~1 の値をとり、1 のときに文献(6)と同じスキームとなり、零のときには線形近似と同じになる。式(17), (18)を式(5), (9)に代入し、前節と同様にして DF 領域周りについて積分し、クエット流れによる DF 領域内の質量の増加分 Q_C を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_C &= (a_{C0} p_0 + a_{C1} p_1 + a_{C2} p_2 + a_{C3} p_3 \\ &+ a_{C4} p_4 + a_{C5} p_5 + a_{C6} p_6 + a_{C7} p_7 \\ &+ a_{C8} p_8) / 8 \\ a_{C0} &= 3R_0(D_{1-} - D_{11+} + D_{111-} - D_{111+} \\ &+ E_{1-} + E_{11-} - E_{111+} - E_{111+}) \\ a_{C1} &= R_1(3D_{1+} + 3D_{111+} + E_{1-} - E_{111+}) \\ a_{C2} &= R_2(-3D_{11-} - 3D_{111-} + E_{11-} - E_{111+}) \\ a_{C3} &= R_3(3E_{1+} + 3E_{11+} + D_{1-} - D_{11+}) \\ a_{C4} &= R_4(-3E_{111-} - 3E_{111-} + D_{111-} - D_{111+}) \\ a_{C5} &= R_5(D_{1+} + E_{1+}) \\ a_{C6} &= R_6(-D_{11-} + E_{11+}) \\ a_{C7} &= R_7(D_{111+} - E_{111-}) \\ a_{C8} &= R_8(-D_{111-} - E_{111-}) \end{aligned} \right\} (19)$$

2.4 スリップ流れによる修正項 Q_S 本節では、極小すきまたは希薄雰囲気中の場合に顕著になる分子平均自由行程の影響による修正項について考える。この修正項についてはいくつか示されているが、本研究では古くからよく用いられている Burgdorfer⁽⁵⁾による修正項(6), (10)を扱うことにする。

圧力 p および R の格子間領域内の分布を式(14)と同様に線形に近似し、式(6), (10)に代入し、以下2.3節と同様にして DF 領域内の質量増加分のスリップ流れによる修正量 Q_S を求めると、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_S &= (a_{S0} p_0 + a_{S1} p_1 + a_{S2} p_2 + a_{S3} p_3 \\ &+ a_{S4} p_4 + a_{S5} p_5 + a_{S6} p_6 + a_{S7} p_7 \\ &+ a_{S8} p_8) / 48 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{S0} &= -F_I(7R_0 + 7R_1 + 2R_3 + 2R_5) \\ &- F_{II}(7R_0 + 7R_2 + 2R_3 + 2R_6) \\ &- F_{III}(7R_0 + 7R_1 + 2R_4 + 2R_7) \\ &- F_{IV}(7R_0 + 7R_2 + 2R_4 + 2R_8) \\ &- H_I(7R_0 + 2R_1 + 7R_3 + 2R_5) \\ &- H_{II}(7R_0 + 2R_2 + 7R_3 + 2R_6) \\ &- H_{III}(7R_0 + 2R_1 + 7R_4 + 2R_7) \\ &- H_{IV}(7R_0 + 2R_2 + 7R_4 + 2R_8) \\ &+ G_I(9R_0 + 6R_1 + 6R_3 + 3R_5) \\ &- G_{II}(9R_0 + 6R_2 + 6R_3 + 3R_6) \\ &- G_{III}(9R_0 + 6R_1 + 6R_4 + 3R_7) \\ &+ G_{IV}(9R_0 + 6R_2 + 6R_4 + 3R_8) \\ a_{S1} &= F_I(7R_0 + 7R_1 + 2R_3 + 2R_5) \\ &+ F_{III}(7R_0 + 7R_1 + 2R_4 + 2R_7) \\ &- H_I(2R_0 + R_1 + 2R_3 + R_5) \\ &- H_{III}(2R_0 + R_1 + 2R_4 + R_7) \\ &+ 3G_I(R_1 - R_3) - 3G_{III}(R_1 - R_4) \\ a_{S2} &= F_{II}(7R_0 + 7R_2 + 2R_3 + 2R_6) \\ &+ F_{IV}(7R_0 + 7R_2 + 2R_4 + 2R_8) \\ &- H_{II}(2R_0 + R_2 + 2R_3 + R_6) \\ &- H_{IV}(2R_0 + R_2 + 2R_4 + R_8) \\ &- 3G_{II}(R_2 - R_3) + 3G_{IV}(R_2 - R_4) \\ a_{S3} &= -F_I(2R_0 + 2R_1 + R_3 + R_5) \\ &- F_{II}(2R_0 + 2R_2 + R_3 + R_6) \\ &+ H_I(7R_0 + 2R_1 + 7R_3 + 2R_5) \\ &+ H_{II}(7R_0 + 2R_2 + 7R_3 + 2R_6) \\ &- 3G_I(R_1 - R_3) + 3G_{II}(R_2 - R_3) \\ a_{S4} &= -F_{III}(2R_0 + 2R_1 + R_4 + R_7) \\ &- F_{IV}(2R_0 + 2R_2 + R_4 + R_8) \\ &+ H_{III}(7R_0 + 2R_1 + 7R_4 + 2R_7) \\ &+ H_{IV}(7R_0 + 2R_2 + 7R_4 + 2R_8) \\ &+ 3G_{III}(R_1 - R_4) - 3G_{IV}(R_2 - R_4) \\ a_{S5} &= F_I(2R_0 + 2R_1 + R_3 + R_5) \\ &+ H_I(2R_0 + R_1 + 2R_3 + R_5) \\ &- G_I(9R_0 + 6R_1 + 6R_3 + 3R_5) \\ a_{S6} &= F_{II}(2R_0 + 2R_2 + R_3 + R_6) \\ &+ H_{II}(2R_0 + R_2 + 2R_3 + R_6) \\ &+ G_{II}(9R_0 + 6R_2 + 6R_3 + 3R_6) \\ a_{S7} &= F_{III}(2R_0 + 2R_1 + R_4 + R_7) \\ &+ H_{III}(2R_0 + R_1 + 2R_4 + R_7) \\ &+ G_{III}(9R_0 + 6R_1 + 6R_4 + 3R_7) \\ a_{S8} &= F_{IV}(2R_0 + 2R_2 + R_4 + R_8) \\ &+ H_{IV}(2R_0 + R_2 + 2R_4 + R_8) \\ &- G_{IV}(9R_0 + 6R_2 + 6R_4 + 3R_8) \end{aligned} \right\} (20)$$

2.5 境界条件 前報と同様に次の四つの代表的な境界条件について考える。

- (1) 境界上の圧力が既知.
- (2) 境界を通過する流量 q_{nb} が既知.
- (3) 周期境界条件.
- (4) 境界に沿って圧力が一定かつ境界を通過する総流量が既知.

(1) の場合は主に周囲境界に対して適用されることが多く, $p = p_b$ と置けばよい.

(2) の場合は $q_{nb} = 0$ として対称境界に用いられることが多い. この条件を $\xi = M_\xi$ 周囲境界に適用する場合, すなわち, 図2の格子点0, 3, 4上に周囲境界線がくる場合を考えてみる. この場合は格子点2, 6, 8, 領域IIおよびIVが存在しないため, 式(16), (19), (20)における p_2, p_6, p_8 を零と置き, さらに添字II, IVのついた A, B, C, D, E, F, G, H を零と置いたものをそれぞれ Q_{pb}, Q_{cb}, Q_{sb} とする. q_{bj} を $\xi = M_\xi$ 境界線上の $\eta = j-1/2 \sim j+1/2$ の区間を通過する質量流量とすると, 圧力 p に対する離散式は質量保存式

$$Q_{pb} + Q_{cb} + Q_{sb} = q_{bj} \quad \dots\dots\dots (21)$$

から得られる.

(3) の周期条件に対しては, 対応する境界上の圧力を等しくおき, 内部領域と同じ離散式を適用すればよい.

(4) の条件は総流量を零と置いてスラスト軸受の中心点 ($r=0$) に対して用いられることが多い. この条件を図3のように $\xi = M_\xi$ 境界に適用する場合を考え, 破線で示した領域に流入・流出する流量の保存式を導く. $\xi = M_\xi$ 境界から流出する総流量を Q_b とし, $j=1$ の境界から流入する質量流量を Q_1^j および $j=M_\eta$ 境界から流出する質量流量を Q_2^j とし, さらに $\xi = M_\xi - 1/2$ 線から流入する質量流量のポアズユ成分を Q_{1b} , クエット成分を Q_{1b}^s , スリップ流れの修正成分を

Q_{1b}^s とすると, 質量保存式は次式のようなになる.

$$Q_{1b}^s + Q_{1b}^c + Q_{1b}^p = Q_b - Q_1^j + Q_2^j \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{1b}^s &= \left(c_{bb} p_b^2 + p_b \sum_{k=1}^{M_\eta} c_{bk} p_k + \sum_{k=1}^{M_\eta} c_{kk} p_k^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{M_\eta-1} c_{kk+1} p_k p_{k+1} \right) / 24 \\ c_{bb} &= -12 \sum_{k=1}^{M_\eta-1} A_k \\ c_{b1} &= 6 \{ A_1 (R_b - R_1) - B_1 R_b \} \\ c_{bk} &= 6 \{ (A_{k-1} + A_k) (R_b - R_k) + (B_{k-1} - B_k) R_b \} \\ c_{bM_\eta} &= 6 \{ A_{M_\eta-1} (R_b - R_{M_\eta}) + B_{M_\eta-1} R_b \} \\ c_{k1} &= R_1 (4A_1 - 3B_1) \\ c_{kk} &= R_k \{ 4(A_{k-1} + A_k) + 3(B_{k-1} - B_k) \} \\ c_{kM_\eta} &= R_{M_\eta} \{ 4A_{M_\eta-1} + 3B_{M_\eta-1} \} \\ c_{kk+1} &= 2A_k (R_k + R_{k+1}) + 3B_k (R_k - R_{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{1b}^c &= \left(c_{cb} p_b + \sum_{k=1}^{M_\eta} c_{ck} p_k \right) / 2 \\ c_{cb} &= 2R_b \sum_{k=1}^{M_\eta-1} D_{k-} \\ c_{c1} &= R_1 D_{1+} \\ c_{ck} &= R_k (D_{k-1+} + D_{k-}) \\ c_{cM_\eta} &= R_{M_\eta} D_{M_\eta-1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{1b}^p &= \left(c_{sb} p_b + \sum_{k=1}^{M_\eta} c_{sk} p_k \right) / 24 \\ c_{sb} &= -6 \sum_{k=1}^{M_\eta-1} F_k (2R_b + R_k + R_{k+1}) \\ c_{s1} &= 2F_1 (3R_b + 2R_1 + R_2) \\ &\quad - 3G_1 (2R_b + R_1 + R_2) \\ c_{sk} &= 2F_{k-1} (3R_b + 2R_{k-1} + R_k) \\ &\quad + 3G_{k-1} (2R_b + R_{k-1} + R_k) \\ &\quad + 2F_k (3R_b + 2R_k + R_{k+1}) \\ &\quad - 3G_k (2R_b + R_k + R_{k+1}) \\ c_{sM_\eta} &= 2F_{M_\eta-1} (3R_b + 2R_{M_\eta-1} + R_{M_\eta}) \\ &\quad + 3G_{M_\eta-1} (2R_b + R_{M_\eta-1} + R_{M_\eta}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし p, R に対する添字 b は $\xi = M_\xi$ 境界上の値を, 添字 $1, 2, \dots, M_\eta$ は $\xi = M_\xi - 1$ 線上の格子点における値を意味し, A, B, C, D, E, F, G に対する添字 $1, 2, \dots, M_\eta - 1$ は $\xi = M_\xi$ 境界に接する格子間領域内の中心の値を意味する. (図3)

3. 計算例

本章では, 本手法に基づいて開発したはん用的なプログラムによる計算例として, 図4に示されるようなヘリングボーンジャーナル軸受の静特性について示す. 扱った軸受は, 溝模様は左右対称で受側 (静止側) に設けてある. また各諸元は次である.

図3 境界条件 (4)

表1 格子数 M_θ , M_r の影響 ($E_1=E_2=0.4$, $\phi_1=\phi_2=0^\circ$, $\Lambda=10$)

M_θ	11	15	21	31	41	61	81	31					
M_r	41							31	41	61	81	101	121
F	0.1568	0.1611	0.1636	0.1651	0.1657	0.1660	0.1662	0.1605	0.1651	0.1696	0.1717	0.1729	0.1737
ϕ_r	133.9	134.9	135.4	135.7	135.8	135.9	135.9	134.7	135.7	136.7	137.1	137.3	137.5
Number of iteration	198	237	304	460	665	1233	1995	376	460	676	972	1333	1765
Cpu time (PC98XA)	2m40s	4m36s	8m35s	19m45s	38m25s	1h46m51s	3h51m11s	12m08s	19m45s	43m25s	1h22m59s	2h22m0s	3h45m59s

図4 ヘリングボーンジャーナル軸受

溝本数=5本

溝角度=30°

溝深さ/半径すきま=1

 $L/D=1$

溝部円周長さ/丘部円周長さ=1

また潤滑気体は等温変化すると仮定し、 ξ 軸は溝・丘境界線に沿うように、 η 軸は θ 方向に沿うように設定した。格子間隔は η 方向には等間隔に、 ξ 方向には両軸端および中央 ($z=0$) の近くは間隔が狭くなるようにした。境界条件は $\xi=1$, M_ξ の両軸端 ($z=\pm L/2$) では $p=p_a(I)$, $\eta=1$, M_η ($\theta=0, 2\pi$) では周期条件 (3) を適用した。 $\xi=\text{Const.}$ 線に直角方向のクエット流れの成分は存在しないため、上流化のパラメータは $\lambda^s=0$, $\lambda^r=1$ とした。なお本節の計算例ではスリップ流れによる修正項は考慮していない。

2章にて示した離散式は格子点圧力 p_0 について二次式であるが、繰返し計算において1ステップ前の格

図5 収束判定定数 ϵ の影響子点圧力 p_0^* を用いて

$$p_0 = -c_0 / (c_1 + c_2 p_0^*) \quad (26)$$

のように線形化して、SOR法を用いて解いた。ただし二次方程式の p_0^* , p_0 の係数および定数項をそれぞれ c_2 , c_1 , c_0 とした。またSOR法の繰返しは、1ステップの繰返しによる圧力の修正量を $\Delta p_{i,j}$ とし、

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{M_\theta} \sum_{j=1}^{M_r} (\Delta p_{i,j} / p_a)^2} < \epsilon \quad (27)$$

を満たしたときに収束したと判定した。

表1に格子数 M_θ , M_r のラジアル負荷容量 F およびその方向角 ϕ_r に対する影響を示した。 M_r を41に固定し、 M_θ を11~81まで変えた結果、 $M_\theta=81$ を基準にして $M_\theta=31$ は0.7%程度の違いとなった。次に $M_\theta=31$ に固定し、 M_r を31~121まで変えると、 $M_r=121$ を基準にして $M_r=81$ は約1%の違いとなった。また表1には、SOR反復の初期圧力分布を $P=1$ とし、収束判定定数 ϵ を 10^{-5} としたときの反復回数とパーソナルコンピュータ (PC98XA) による計算時間も示した。また図5に $M_\theta=31$, $M_r=81$ とした場合の F , ϕ_r および反復回数に対する収束判定定数 ϵ による変化を示す。図5から、 $\epsilon=10^{-5}$ のときの値を基準

にして F の誤差が 0.1% 以下になるのは $\varepsilon = 3 \times 10^{-4}$ 以下であり, ϕ_f については $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$ 以下である. また反復回数はほぼ $\log \varepsilon$ に反比例して増加することがわかる. なお格子数の増大および ε の減小に伴い反復回数が急激に増加するが, SOR 法を用いているため誤差の集積は起こらない. 表 1 と図 5 から以下の計算では $M_\varepsilon = 31$, $M_\eta = 81$ および $\varepsilon = 10^{-4}$ とした.

(a) 負荷容量 F (b) 方向角 ϕ_f 図6 負荷容量 F およびその方向角 ϕ_f に対する圧縮性定数 Λ および半径偏心率 E の影響

図 6 に軸中心軸と受中心軸が平行に偏心する場合の図 6(a) ラジアル負荷容量 F と図 6(b) その方向角 ϕ_f の圧縮性定数 Λ による変化を示す. 図 6(a) から, 破線で示した非圧縮の場合の F は Λ に比例して増加するが, 気体潤滑の場合では, F は Λ が 10 程度までは Λ に比例し非圧縮の場合と一致するが, それ以上では徐々に増加の割合が減少することがわかる. 図 6(b) からは, 非圧縮の場合の ϕ_f は Λ によって変化せず一定となるが, 気体潤滑では F の場合に比べて低い Λ でも非圧縮の場合との違いが大きく現れ, Λ が大きくなるにつれ 180° に近付くことがわかる. また, その傾向は偏心率 E が大きいほど強い.

軸端 1 ($z = -L/2$) における偏心率 $E_1 = 0.4$, 偏心率 $\phi_1 = 0^\circ$, 軸端 2 ($z = L/2$) における偏心率 $E_2 = 0.4$, 偏心率 ϕ_2 = 可変とした, ミスアライメント状態のラジアル負荷容量 F , その方向角 ϕ_f と軸の傾きによって発生するモーメント M , その方向角 ϕ_m ($z = 0$ 面内で時計回りを正とする) の変化を図 7 に示す. 方向角 ϕ_f , ϕ_m はほぼ ϕ_2 に比例して増加することがわかる. また F は $\phi_2 = 0$ (軸が軸受に平行) のときに最大になり, $\phi_2 = 180^\circ, -180^\circ$ (軸中心軸と受軸が交差する) のときに零になる. モーメント M については, F の場合とは逆に, $\phi_2 = 0$ のときに零になり, $\phi_2 = 180^\circ, -180^\circ$ のとき絶対値が最大になる. また, 常に軸の傾きを修正するモーメントの成分があることがわかる.

図 8 はミスアライメント状態の等圧力線図を, 図 8(a) $\phi_2 = 0^\circ$, (b) $\phi_2 = 90^\circ$, (c) $\phi_2 = 180^\circ$ の場合につ

図7 ミスアライメント状態時の静特性

図8 ミスアライメント状態時の等圧力線図 ($\Delta p/p_a = 0.05$, $\Lambda = 10$, $E_1 = E_2 = 0.4$, $\phi_1 = 0^\circ$)

いて、プロット間隔 $\Delta p/p_a = 0.05$ にて示したものである。図8中の破線は最小すきまの位置を示している。図8(a)の軸心が平行に偏心する場合は等圧力線の間隔が密になり局部的に高圧が発生するが、軸心が傾くにつれ等圧力線の間隔が広がり最高圧力も低下することがわかる。

4. ま と め

以上をまとめると次のようになる。

(1) 気体がバロトロピー性の仮定を満たすとした定常気体潤滑の場合に対して、前報で導いた境界適合座標系を用いた流量式から、はん用的な質量保存式の離散化を、ポアズユ流れ、クエット流れおよび気体の希薄性のためのスリップ流れによる修正成分に分離して示した。

(2) クエット流れに対して、上流化スキームを發展させ、上流側の影響の程度を調節できるパラメータ

を導入したスキームを新しく導入した。

(3) 本手法に基づいてはん用的なプログラムを作成し、ヘリングボーンジャーナル軸受について計算を行い、次のことがらを示した。

(i) 従来、大規模な計算が必要と考えられていた有限偏心・有限溝本数の場合の解析をパーソナルコンピュータを用いて行い、本手法が計算効率の高い解法であることを示した。

(ii) ミスアライメント状態の静特性および詳細な圧力分布を示した。

文 献

- (1) 川端, 機論, 53-494, C (昭62), 2155.
- (2) Wilcock, D. F., *Des. Gas Bearing, MTI*, (1972), 4. 2. 2.
- (3) Thompson, J. F., ほか2名, *NASA CR-2729*, (1977).
- (4) 金子・三矢, 潤滑, 20-12 (昭50), 883.
- (5) Burgdorfer, A., *Trans. ASME, Ser. D*, 81-1 (1959), 94.
- (6) 川端, 機論, 52-484, C (昭61), 3277.