移動荷重を受けるはりの動的最適設計*

日 野 順 市^{*1}, 芳 村 敏 夫^{*1}

An Optimum Dynamic Design for Beams Subject to a Moving Load

Junichi HINO and Toshio YOSHIMURA

This paper describes an optimum dynamic shape design of beams subject to a moving load. The influence of the dynamic behavior of the beams is considered in the proposed optimum design problem. The optimum shape of the beams is determined by the minimization of the following performance indices: (a) root mean square values of the displacements and accelerations of the beams under the equality constraint of a total mass, and (b) a total mass of the beams under the inequality constraint of the root mean square values of the displacements and accelerations of the beams. The optimization procedure is performed by the nonlinear programming on the basis of the exterior penalty function, because the performance indices and constraints have nonlinear relationships.

Key Words: System Engineering, Numerical Integration, Sensitivity Analysis, Optimum Shape Design, Beam, Moving Load, Nonlinear Programming, Penalty Function

1. 緒 言

近年, コンピュータの発達にともない有限要素法などの構造解析手法がますます発展するとともに, 感度解析などの新しい手法が構造物の設計法に導入されるようになった^{(1)~(6)}. しかしながら, 上で述べた構造物の設計法において大きな非定常外乱に対する動的な応答を考慮したものは, 最近山川ら⁽⁷⁾⁽⁸⁾によって逐次積分と傾斜投影法を用いた非定常な負荷に対する最適設計法が提案されているが数少ない.

本研究では, 移動荷重を受けるはりの最適な形状の設計問題を取扱う. この場合, はりに作用する移動荷重は当然ながら非定常なものとなるので, はりの動的応答解析⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を行うとともに, 得られた結果を設計条件と照合してはりの最適形状設計を行うものとする. すでに提案された最適設計に関する大部分の研究では, 許容応力または応答変位のみに着目した設計法であるが, 移動荷重を受ける場合は変位の大きさ以外に, 速度, 加速度なども考慮する必要があると考えられる. 例えば, 車両が橋りょうを通過する場合を考えれ

ば, 橋りょうの加速度の大きさが乗りごちに強い影響を与えるので, これを考慮した設計法が必要となる.

したがって, まず第1に総質量一定のもとで変位および加速度の二乗和を目的関数として選定し, それを最小にするようなはりの最適形状を決定する. ここで, 最適設計問題の制約条件式および目的関数は一般に非線形となることから, 非線形計画法の一種であるペナルティ関数法を用いる⁽¹¹⁾. また, 動的応答計算では逐次積分法を用いて応答と感度を計算する⁽⁷⁾⁽⁸⁾. しかしながら, 設計段階においては, まず部材の最大変位や応力が与えられる場合が多く, それらが与えられたときの最適形状を決定することが望まれる. そこで第2に, 移動荷重を受けるはりにおいて, はりの変位および加速度の二乗和を制約する場合の最小質量設計を行うものとする. 最適化の手法は, 第1の設計問題と同様にペナルティ関数法を用いる. この問題においてはより上の変位と加速度の二乗和を制約するが, ここではより上の点を指定した場合と, はり上の点を指定せずにはり全体について考慮した場合を扱う. はり全体の最大値を探索する場合には, 位置と時間の両者について行わなければならないので第1の場合に比較して計算時間が増大すると考えられる. そのために, 物理座

* 昭和62年11月28日 関西支部第247回講演会において講演, 原稿受付 昭和62年3月30日.

^{*1} 正員, 徳島大学工学部 (〒770 徳島市南常三島町2-1).

標からモード座標に変換して、はりの応答と感度を計算し、運動方程式の自由度を減少して計算時間の短縮を計る。ここでは、以上二つの場合の最適設計に着目する。

2. 最適設計問題

2.1 最適化の方法 数理計画法を用いた最適設計問題は、第1および第2の問題に対して一般に次の形で表される。

$f(\mathbf{x})$ を最小化する。

ただし制約条件

$$\left. \begin{array}{l} g_1(\mathbf{x})=0 \quad (\text{第1の問題}) \\ g_n(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (\text{第2の問題}) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

を満たすものとする。

ここで、 $f(\mathbf{x})$ は目的関数、 $\mathbf{x}$ は設計変数 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ 、 n は設計変数の数、右肩添字 T は転置を示す。構造物の設計問題では目的関数と制約条件は一般に非線形関数になるので、非線形計画法により最適化する。

式(1)に示されたような制約条件を持つ最適化問題を解く方法は、関数のこの配を用いる方法に限定すれば、変換法と非変換法に大別できる⁽¹²⁾。しかし、一般的には目的関数および制約条件式が非線形になることを考えれば、変換法の中のペナルティ関数法を用いれば計算手順が簡単になるので、ここではこの手法により最適化を行うものとする。目的関数と制約条件より以下のような拡張目的関数 F を考える⁽¹¹⁾。

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{r}_l) = f(\mathbf{x}) + r_l \sum_{i=1}^m \Psi\{g_i(\mathbf{x})\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 m は制約条件の数、 Ψ はペナルティ関数、 r_l は単調増加する正数列 ($r_l, l=0, 1, 2, \dots$) とする。ある r_l の値に対して F が最小化されたならば、 r_l の値を増加させて F を最小化し、 $f(\mathbf{x})$ の変化が設定値以下になるまで反復させることにより最適値を得る。ここでは、 F の最小化には BFGS 公式⁽¹¹⁾を用いる。

2.2 制約条件と目的関数 移動荷重を受けるはりの最適設計の問題において、目的関数と制約条件は種々なものが考えられる。例えば、はりの応力やモーメント、質量、応答変位および固有振動数などである。ただし、移動荷重ははりに対して非定常な負荷となるので、変位のみではなく速度、加速度などについても考慮する必要があると思われる。特に加速度は乗りごこちに直接関係するものであるから、制約条件および目的関数に含めることにより (1) はりの全質量一定のもとで、はりの変位および加速度の rms (二乗平均値) を最小にする。 (2) はりの変位および加速度を制

約し、質量を最小にする。 (3) はりの固有振動数を制約し、変位および加速度を最小にする。などが考えられるが、本論文では (1) および (2) の場合について考えることにする。ここで、条件 (1) と (2) は応答変位および加速度に着目した場合の二つの形式の基本問題と考えられる⁽¹³⁾。

2.2.1 条件 (1) の場合 目的関数として、はりの変位および加速度の rms を最小にすることを考える。ただしはりの長さおよび移動荷重がはりを通過する時間について平均化するものとする。したがって、目的関数として以下の式が与えられる。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sqrt{\frac{1}{TL} \int_0^T \int_0^L [y(t, s)^2 + w_a \cdot \dot{y}(t, s)^2] ds dt} \\ &\dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで、 L ははりの長さ、 T は移動荷重がはりを通過するために必要な時間、 w_a は加速度に関する重み係数、 s ははりの長手方向の変数、 t は時間とする。

目的関数のこの配は、 $f(\mathbf{x})$ を $x_i, i=1, 2, \dots, n$ で偏微分することによって以下のように求めることができる。

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{Tf(\mathbf{x})} \int_0^T \left(y^* \cdot \frac{\partial y^*}{\partial x_i} \right) dt, \quad i=1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} y^* &= \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L [y(t, s)^2 + w_a \dot{y}(t, s)^2] ds} \\ \frac{\partial y^*}{\partial x_i} &= \frac{1}{Ly^*} \int_0^L \left[y(t, s) \frac{\partial y(t, s)}{\partial x_i} \right. \\ &\quad \left. + w_a \cdot \dot{y}(t, s) \frac{\partial \dot{y}(t, s)}{\partial x_i} \right] ds \end{aligned}$$

図1において荷重 W がはり上を左から右へ移動するモデルを与え、設計変数をはりの厚みとする。そして制約条件としてはりの全質量を一定とすれば、制約条件式は、

$$g(\mathbf{x}) = M - \sum_{i=1}^n \rho_i b_i l_i h_i = 0 \dots\dots\dots (5)$$

図1 最適化するはりのモデル

となる。ここで、 M ははりの全質量、 ρ_i は密度、 b_i は幅、 l_i は要素の長さ、 h_i は厚み (x_i) および n は分割数である。

2.2.2 条件(2)の場合 目的関数としてはりの質量を最小化するので、図1のはりのモデルにおいて

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \rho_i b_i l_i h_i \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。条件(1)と同様にはりの厚みを設計変数とする。

この問題においてはり上の変位と加速度の二乗和を制約するが、ここではり上の点を指定した場合と、はり上の点を指定せずにはり全体について考慮した場合の2とおり考える。はり上の指定した点に対する制約では、その点の変位および加速度を時間方向に探索し最大値を求めればよいが、はり全体の最大値に対する場合では時間方向だけでなく、はりの長手方向にも探索する必要がある。ここで動的応答の変位および加速度を以下のような形で最大値を求める。

$$g_{\max} = \sqrt{y(t, s)^2 + w_a \cdot \dot{y}(t, s)^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

また制約条件の設定値を g^* とすると、制約条件式は、

$$g(x) = g_{\max} - g^* \leq 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

であり、こう配は $g(x)$ を x_i で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{g_{\max}} & \left\{ y(t, s) \frac{\partial y(t, s)}{\partial x_i} \right. \\ & \left. + w_a \cdot \dot{y}(t, s) \frac{\partial \dot{y}(t, s)}{\partial x_i} \right\} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\partial y(t, s)/\partial x_i$ および $\partial \dot{y}(t, s)/\partial x_i$ は設計変数 x_i に対する応答変位および加速度の感度である。

2.3 応答および感度の計算 本論文で示された最適設計問題を解くためには、構造物の応答および設計変数に対する感度を計算する必要がある。したがって、系の動的応答および感度を解析するために、対象とする系を以下のようなベクトル-行列形で表すことにする。

$$M(x)\ddot{y}(x) + C(x)\dot{y}(x) + K(x)y(x) = P \quad (10)$$

ここで、 $M(x)$ 、 $C(x)$ 、 $K(x)$ は各々系の質量、減衰、剛性行列で、 $y(x)$ 、 P は変位ベクトルおよび外力ベクトルである。また、 $\dot{y}(x)$ および $\ddot{y}(x)$ は $y(x)$ の1階および2階の時間微分を示す。式(10)は、 M 、 C 、 K および y が、設計変数 x の関数となることを表している。したがって、 x が x_0 から微小量 δx だけ変化すれば、質量、減衰、剛性行列は、 M_0 から M 、 C_0 から C 、 K_0 から K に変化するので、 M 、 C 、 K をテイラー展開し、 $(\delta x)^2$ 以上の項を省略すると、

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 + \sum_{i=1}^n M'_i \delta x_i \\ C &= C_0 + \sum_{i=1}^n C'_i \delta x_i \\ K &= K_0 + \sum_{i=1}^n K'_i \delta x_i \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここで、 $M'_i = \partial M / \partial x_i$ 、 $C'_i = \partial C / \partial x_i$ 、 $K'_i = \partial K / \partial x_i$ である。ただし減衰については、設計変数の関数として直接決定することは困難である。したがって、簡単のため比例減衰と仮定すれば、質量および剛性行列は設計変数の関数として表すことができるので、減衰についても設計変数の関数となる。

2.3.1 条件(1)の場合 はりの質量、減衰および剛性行列は、有限要素法などにより計算できるので、式(10)および式(11)が得られる。したがって、目的関数とこの配を計算するために、変位および加速度の応答と感度を計算する。ここでは、物理座標の運動方程式に逐次積分法であるPC-12法⁽¹⁴⁾を適用して解を求めることにする。以下にその計算式を示す。

$$\begin{aligned} R w_{t+\tau} &= -\tau K y_t + c_1 M \dot{y}_t + \frac{\tau}{2} (P_{t+\tau} + P_t) \\ &\quad - \frac{c_1 \tau}{12} (P_{t+\tau} - P_t) \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$y_{t+\tau} = y_t + \text{Re}(w_{t+\tau}) - \sqrt{3} \text{Im}(w_{t+\tau}) \quad \dots\dots (13)$$

$$\dot{y}_{t+\tau} = \dot{y}_t + \frac{4\sqrt{3}}{\tau} \text{Im}(w_{t+\tau}) \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{t+\tau} &= \ddot{y}_t + \frac{6}{\tau} (\dot{y}_{t+\tau} - \dot{y}_t) - \frac{12}{\tau^2} (y_{t+\tau} - y_t) \\ &\quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで、 $R = (c_1/\tau)M + C + (\tau/c_1)K$ 、 $c_1 = 3 + j\sqrt{3}$ 、 $j^2 = -1$ 、 τ は刻み時間、 $\text{Re}(\cdot)$ および $\text{Im}(\cdot)$ はそれぞれ実部および虚部を表す。また、動的応答の感度の計算については、まず式(12)を x_i で偏微分して

$$\begin{aligned} R \frac{\partial w_{t+\tau}}{\partial x_i} &= -\frac{\partial R}{\partial x_i} w_{t+\tau} - \tau \frac{\partial K}{\partial x_i} y_t \\ &\quad - \tau K \frac{\partial y_t}{\partial x_i} + c_1 \frac{\partial M}{\partial x_i} \dot{y}_t + c_1 M \frac{\partial \dot{y}_t}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial P_{t+\tau}}{\partial x_i} + \frac{\partial P_t}{\partial x_i} \right) - \frac{c_1 \tau}{12} \left(\frac{\partial P_{t+\tau}}{\partial x_i} - \frac{\partial P_t}{\partial x_i} \right) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

を得る。そして、それぞれ式(13)～(15)を x_i で偏微分すれば変位、速度、加速度の感度が得られる。

2.3.2 条件(2)の場合 条件(2)の場合、はり上のすべての点における変位および加速度の二乗和の最大値は位置と時間の両者について探索が必要なので、条件(1)の場合に比べて計算時間がかかなり増大すると考えられる。したがって、計算時間を短縮するために運動方程式を物理座標からモード座標に変換することにする。

C を比例減衰と仮定すると、式(10)の固有値問題は、

$$(K - \lambda_r M) \phi_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

となる。ただし、 N は系の自由度、 λ_r 、 ϕ_r はそれぞれ r 次の固有値と固有ベクトルである。ここで式(10)をモード座標に変換するために次式を与える。

$$y = \sum_{r=1}^p \phi_r \xi_r \quad (18)$$

ここで、 ξ_r はモード座標成分、 p は採用モード数 ($p \leq N$) である。 λ_r 、 ϕ_r もまた x_i の関数であるから、式(11)と同様にテイラー展開すると、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r &= \lambda_{0r} + \sum_{i=1}^n \lambda'_{ri} \delta x_i \\ \phi_r &= \phi_{0r} + \sum_{i=1}^n \phi'_{ri} \delta x_i \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となる。ここで、 $\lambda'_{ri} = \partial \lambda_r / \partial x_i$ 、 $\phi'_{ri} = \partial \phi_r / \partial x_i$ である。式(11)、(19)を式(17)に代入して δx_i に関して展開した後、 δx_i^2 以上の項を微小として省略する。そして δx_i の零次と一次の係数を零とすると、

$$(K_0 - \lambda_{0r} M) \phi_{0r} = 0 \quad (20)$$

$$(K_0 - \lambda_{0r} M) \phi'_{ri} = (\lambda_{0r} M'_i + \lambda'_{ri} M_0 - K'_i) \phi_{0r} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

が得られる。 M_0 、 K_0 は対称行列なので、式(21)を転置して右から ϕ_{0r} を乗じると、式(20)より左辺は零となるので、固有値の感度 λ'_{ri} が以下のように得られる⁽¹⁵⁾。

$$\lambda'_{ri} = \frac{\phi_{0r}^T (K'_i - \lambda_{0r} M'_i) \phi_{0r}}{\phi_{0r}^T M_0 \phi_{0r}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

次に固有ベクトルの感度を計算する。 $(K_0 - \lambda_{0r} M_0)$ が特異であるから式(21)より直接 ϕ'_{ri} を得ることはできない。したがって、 M 直交性の式、 $\phi_r^T M \phi_r = m_r$ (m_r : モード質量) に式(11)の第1式と式(19)の第2式を代入し、 δx_i の一次の項の係数に関してまとめると、

$$2\phi_{0r}^T M_0 \phi'_{ri} + \phi_{0r}^T M'_i \phi_{0r} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

となる。式(21)、(23)を組合せると、

$$\left[\begin{array}{c} K_0 - \lambda_{0r} M_0 \\ 2\phi_{0r}^T M_0 \end{array} \right] \phi'_{ri} = - \left[\begin{array}{c} K'_i - \lambda'_{ri} M_0 - \lambda_{0r} M'_i \\ \phi_{0r}^T M'_i \end{array} \right] \phi_{0r} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

を得る。ここで式(24)を $A \phi'_{ri} = -B \phi_{0r}$ と表すと、 A は正方行列ではないので以下のように変形して固有モードの感度 ϕ'_{ri} を得る⁽¹⁵⁾。

$$\phi'_{ri} = -(A^T A)^{-1} A^T B \phi_{0r} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

y および ξ_r に対しても一次の項までテイラー展開 $y = y_0 + \sum_{i=1}^n y'_i \delta x_i$ 、 $\xi_r = \xi_{0r} + \sum_{i=1}^n \xi'_{ri} \delta x_i$ して、式(19)の第2式とともに式(18)に代入すると、

$$y_0 = \sum_{r=1}^p \phi_{0r} \xi_{0r} \quad (26)$$

$$y'_{ri} = \sum_{r=1}^p (\phi'_{ri} \xi_{0r} + \phi_{0r} \xi'_{ri}) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

となる。したがって、式(10)をモード座標に変換して、先の逐次積分を用いて応答および感度を計算する。

3. 数値計算例

ここでは、すでに述べた最適設計法の妥当性を検討するために数値計算を行った。はりとは全長 1.0 m、幅 0.15 m とし、密度およびヤング率は一様でそれぞれ $7.87 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ および $2.06 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ とした。また減衰ははりの加速度に対し影響を与えられ、減衰係数をパラメータとして最適形状を求めることも考えられる。したがって、本数値計算例では簡単のために零とおくことにする。また荷重 $2N$ が、図1において 0s の方向へ一定速度 1.0 m/s で移動するものとする。ここでペナルティ関数は外点法を用いるものとし、逐次積分法の刻み時間は $\tau = 0.01 \text{ s}$ とした。しかしながら、外点法を用いた場合に拡張目的関数 $F(x)$ は $g_i(x_0) = 0$ のとき微分不可能となる。しかし F が x_0 のまわりで凸関数とすれば、 x_0 でのこの配 $\nabla F(x_0)$ が

$$F(x) \geq F(x_0) + \nabla F(x_0)(x - x_0) \quad (28)$$

を満たせば最適解を得ることができる⁽¹²⁾ ので、 $\nabla F(x_0) = \nabla f(x_0)$ と与えた。以上の計算手順より最適なはりの形状を得ることができる。

3.1 条件(1)の場合 要素数を4個または6個とし、目的関数中の加速度の重み係数 w_a の値を変化させて、加速度がはりの形状に与える影響について調べた。ただし、はりの初期形状は4要素の場合の $w_a = 0$ のときのみ一様な厚みとし、 w_a を離散的に増加させた場合は、前の段階での w_a に対して計算された最適形状の厚みを用いた。また6要素の場合は4要素の最適値より概算して初期形状を与えた。表1、2および表3に、それぞれ単純支持、片持および両端固定の場合を示す。ただし、片持ばりについては左端を固定するものとした。

以上の結果より、単純支持および両端固定ばりの場合において加速度を考慮しないときは、はり是对称な形状となったが、 w_a を増加させると非対称な形状となり変位のみを考慮した場合に比較してかなり異なった形状が得られた。また山川らの方法⁽⁷⁾ との比較を4要素の場合について行ったが、はりの最適形状はほぼ一致した。

3.2 条件(2)の場合 この場合の制約条件式中のはりの変位および加速度の空間方向の最大値の探索

には、直線探索法の一種であるDavidonの三次補間法⁽¹¹⁾を用いた。まず各有限要素の節点値とその導関数の値より各要素の最大値を求めることによりはりの全区間の最大値が得られる。そしてこれを全時間について行うことにより、空間方向および時間方向の最大値が得られる。はりの分割数を4個とした場合の結果を以下に示す。表4(a), (b)には、それぞれはり上の1点の変位を制約した場合とはり全体での変位を制約した場合の単純支持ばりの最適形状を与える。ただし $w_a=0$ の場合であり、表4(a)の S_{cp} は制約される点の原点からの距離である。

表5(a), (b)には、 w_a を変化させた場合の両端固定ばりの形状を与える。

表6には、左端を固定した片持ばりの最適形状を与える。ただしこの場合、はりの自由端($S_{cp}=1000$)での最大値ははり全体の最大値は一致するので、両者の形状は同じになった。

以上の結果より条件(2)の場合に関しては、条件(1)の場合と同様に w_a を増加させてゆくと、はりの形状が変化することがわかるが、 w_a を大きくしても制約値の大きさを変えなかったため、はりの総質量は増加した。また図2は、表6に示した最適形状ばり

($w_a=1 \times 10^{-7}$)と総質量が同じである均一な片持ばりの先端の応答変位についての比較を示す。これより、最適形状ばりの変位が均一ばりの変位の2/3以下になっていることがわかる。

4. 結 言

移動荷重を受けるはりについて、総質量一定のもとではりの変位および加速度の二乗和を最小とする最適設計問題と、はりの変位および加速度の二乗和を制約

表3 両端固定ばりの最適形状 (単位: mm)

n=4					
w_a	h_1	h_2	h_3	h_4	
0	8.10	3.90	3.90	8.10	
1×10^{-10}	8.10	3.90	3.90	8.10	
1×10^{-8}	8.09	3.90	3.91	8.10	
2.5×10^{-7}	7.88	3.93	4.15	8.04	
1×10^{-6}	6.31	5.33	5.41	6.95	

n=6

w_a	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
0	8.11	6.08	3.85	3.85	6.00	8.11
1×10^{-10}	8.10	6.06	3.87	3.87	6.00	8.10
1×10^{-8}	8.09	5.99	3.91	3.91	6.00	8.10
2.5×10^{-7}	7.88	5.90	3.93	4.15	6.10	8.04
1×10^{-6}	6.27	5.78	5.37	5.44	6.15	6.99

表4 変位制約を受ける単純支持ばり (単位: mm)
(制約値 1.8×10^{-4} , $w_a=0$)

(a) 1点を制約する場合

S_{cp}	h_1	h_2	h_3	h_4
250	6.80	9.51	9.29	6.68
500	6.98	10.59	10.57	7.02
750	6.68	9.29	9.53	6.81

(b) はり全体の最大変位を制約する場合

h_1	h_2	h_3	h_4
7.05	10.54	10.54	7.05

表5 加速度を考慮した制約を受ける両端固定ばり
(制約値 1.4×10^{-4} , 単位: mm)

(a) 中央部を制約する場合 ($S_{cp}=500$)

w_a	h_1	h_2	h_3	h_4
0	7.36	5.71	5.71	7.36
1×10^{-8}	7.36	5.71	5.71	7.36
1×10^{-7}	7.34	5.74	5.74	7.34
1×10^{-6}	7.42	5.77	5.75	7.39

(b) はり全体の最大値を制約する場合

w_a	h_1	h_2	h_3	h_4
0	7.35	5.73	5.73	7.35
1×10^{-8}	7.35	5.73	5.73	7.35
1×10^{-7}	7.34	5.74	5.74	7.34
1×10^{-6}	7.56	5.84	5.82	7.52

表1 単純支持ばりの最適形状 (単位: mm)

n=4					
w_a	h_1	h_2	h_3	h_4	
0	4.92	7.08	7.08	4.92	
1×10^{-8}	4.92	7.08	7.08	4.92	
1×10^{-6}	5.24	7.02	6.94	4.80	
2.5×10^{-5}	6.41	6.69	6.22	4.68	
1×10^{-4}	7.07	7.01	5.64	4.28	

n=6

w_a	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
0	4.92	6.00	7.08	7.08	6.00	4.92
1×10^{-8}	4.92	6.00	7.08	7.08	6.00	4.92
1×10^{-6}	5.24	6.13	7.02	6.94	5.87	4.80
2.5×10^{-5}	6.37	6.52	6.70	6.20	5.50	4.71
1×10^{-4}	7.00	6.97	7.06	5.62	5.03	4.32

表2 片持ばりの最適形状 (単位: mm)

n=4					
w_a	h_1	h_2	h_3	h_4	
0	9.02	7.24	5.12	2.62	
1×10^{-8}	9.01	7.23	5.11	2.65	
1×10^{-6}	8.46	6.71	5.20	3.63	
2.5×10^{-5}	6.95	5.57	5.57	5.91	
1×10^{-4}	6.18	5.02	5.66	7.14	

n=6

w_a	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
0	9.02	8.13	7.24	5.13	3.87	2.61
1×10^{-8}	9.00	8.10	7.24	5.13	3.89	2.64
1×10^{-6}	8.46	7.58	6.71	5.20	4.42	3.63
2.5×10^{-5}	6.92	6.23	5.58	5.57	5.76	5.94
1×10^{-4}	6.14	5.56	5.05	5.67	6.41	7.17

表 6 加速度を考慮した制約を受ける片持ばり
(制約値 3×10^{-4} , $S_{cp}=1000$, 単位: mm)

w_a	h_1	h_2	h_3	h_4
0	25.10	20.61	16.59	8.40
5×10^{-4}	25.52	21.02	16.83	7.89
1×10^{-3}	25.99	21.43	17.02	7.58
2×10^{-3}	26.45	21.74	17.37	7.38

図 2 片持ばり先端の応答変位 (実線: 最適形状ばり, 点線: 均一ばり, $w_a=1 \times 10^{-7}$)

しはりの質量を最小にする最適設計問題を考え、ペナルティ関数法により最適形状を求めた。はりの変位および加速度の応答と感度を求めるために逐次積分法を用いた。得られた結果は変位のみを考慮した場合に比

較して、加速度の影響を増してゆけば最適形状はかなり異なることがわかった。

最後に本研究の遂行に当たり、終始ご指導いただいた東京工業大学工学部 長松昭男教授に謝意を表する次第である。また数値計算の一部をご助力いただいた本学工学部大学院生 東本真和君に感謝します。

文 献

- (1) Wallace, D. and Seireg, A., *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, (1971), 659.
- (2) Cheng, F. Y. and Botkin, M. E., *ASCE ST-3* (1976), 609.
- (3) 遠藤・ほか 3 名, 機論, 44-385 (昭 53), 1.
- (4) Feng, T. T., Arora, J. S. and Haug, E. J., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11-1 (1977), 39.
- (5) R. H. ギャラガー・O. C. ツィエンキーヴィッツ, 最適構造設計基礎と応用, (昭 52), 培風館.
- (6) 長松, モード解析, (昭 60), 251, 培風館.
- (7) 山川・若林, 機論, 48-435, C (昭 57), 1738.
- (8) 山川・ほか 3 名, 機論, 48-435, C (昭 57), 1750.
- (9) Fryba, L., *Vibration Solid and Structure under Moving Loads*, (1972), Noordhoff.
- (10) Hino, J. and Yoshimura, T., *J. Sound Vib.*, 91-4 (1984), 45.
- (11) 今野・山下, 非線形計画法, (昭 53), 日科技連.
- (12) 志水・相吉, 数理計画法, (昭 59), 昭晃堂.
- (13) 山川, 機械学会第 594 回講習会資料, (昭 60), 107.
- (14) 清水・ほか 4 名, 機論, 43-368, C (昭 52), 1272.
- (15) Fox, R. L. and Kapoor, M. R., *AIAA J.*, 6-12 (1968), 2426.