磁気ダンパの有限要素解析*

金 森 満^{*1}, 石 原 好 之^{*2}

Finite Element Analysis of Electromagnetic Damper

Mituru KANAMORI and Yoshiyuki ISHIHARA

In this paper, fundamental characteristics of the electromagnetic damper are investigated by the finite element method. A reaction of the magnetic field caused by the eddy current is considered in the formulation. In the analysis, first, the eddy current in the conductor slab is calculated when the slab moves at a constant velocity perpendicular to the magnetic flux density, and the attenuation coefficients are obtained by the use of the calculated ones. Then the effects of the reaction of the magnetic field are analyzed with the finite element method and Runge-Kutta method regarding the analytical model as a coupled problem of the magnetic field and the vibration of the slab. Furthermore, the numerical results are verified by experiments, agreeing well with the experimental ones.

Key Words: Vibration, Electrical Engineering, Electromagnetic Damper, Finite Element Method, Eddy Current, Attenuation Coefficient

1. 緒 言

受動形制振装置として知られる磁気ダンパは、他のダンピング要素に比べ、いくつかの利点を有しているため⁽¹⁾、その応用研究がさかに行われている。なかでも、磁気ダンパの減衰係数の評価に関する研究は、萩原⁽²⁾、背戸・山之内⁽³⁾、小島・山川⁽⁴⁾、Weinberger⁽⁵⁾らおよび長屋・小島⁽⁶⁾により報告されている。しかし、これらの研究では、導体内に誘起される渦電流が磁場に及ぼす影響、フリンジング磁束、鉄心形状および鉄心の磁化特性の非線形性が考慮されていない。これらの要因を考慮して解析することは、磁気ダンパを設計するうえで極めて有意義であると考えられる。

有限要素法は、すでに磁場や渦電流の解析に用いられているが⁽⁷⁾、磁場中を導体が運動する場合を定式化した報告は、まだ見受けられないように思われる。

本研究は、長方形磁極を有する磁気ダンパを取り上げ、磁場中を導体板が振動する場合について、上述の要因を考慮して有限要素法による定式化を行い、その

基本特性を解析的に調べたものである。導体内の渦電流がさらに磁界をつくるいわゆる反抗磁界の影響については、鉄心と導体板との相対的な磁場振動の連成問題として扱い、有限要素法とルンゲクッタ法を併用して解析した。ついで、片持ばりと磁気ダンパから成る実験装置を作成し実験を行い、解析結果の妥当性を確認した。

2. 定 式 化

2.1 運動する導体を含む電磁場の方程式 電磁場を支配するマクスウェルの電磁方程式は、次式で表される。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{J}$ はそれぞれ磁束密度、磁界の強さ、電界の強さ、電流密度である。また σ , μ はそれぞれ導電率、透磁率を表す。図1に運動する導体を含む電磁場を表す。ここで $\mathbf{J}_0$ はコイルに与える励磁電流密度を、 $\mathbf{v}$ は磁場中を導体が運動する速度を、 $\mathbf{J}_e$ はこの運

* 昭和63年3月19日 関西支部第63期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年8月21日。

*¹ 正員、舞鶴工業高等専門学校 (〒625 舞鶴市字白屋234)。

*² 正員、同志社大学工学部 (〒602 京都市上京区今出川通烏丸東入)。

動によって生じる渦電流密度を表している。したがって式(1)の J は次式で表される。

$$J = J_0 + J_e \quad \dots\dots\dots (6)$$

J_e は磁束密度の時間的変化と速度起電圧によって生じ次式で表される。

$$J_e = \sigma(E_e + v \times B) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし E_e は磁束密度の時間的変化によって生ずる電界の強さを表す。

導体に生ずる磁束密度が既知で外部磁界として与えられる場合は、 J_0 を零とし式(1)、(6)、(7)より次式が得られる。

$$\text{rot } H = \sigma(E_e + v \times B) \quad \dots\dots\dots (8)$$

両辺に rot を作用させ、整理して式(2)を代入すれば

$$\nabla^2 H = \sigma \frac{\partial B}{\partial t} - \sigma \text{rot}(v \times B) \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。この方程式を解けば、速度 v で運動している導体に外部磁界が与えられた場合の渦電流密度を求めることができる。

次に導体に生ずる磁束密度が未知の場合について示す。式(3)より次のベクトルポテンシャル A を定義できる。

$$B = \text{rot } A \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(2)、(10)より次式が得られる。

$$E_e = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで ϕ は電界の基準を決めるための電位である。式(1)に式(4)、(6)を代入すれば

$$\text{rot } vB = J_0 + J_e \quad \dots\dots\dots (12)$$

となり、式(12)、(7)、(10)、(11)より導体の運動を考慮した方程式が次のように求まる。

$$\text{rot } v \text{rot } A = J_0 + \sigma \left(-\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi + v \times \text{rot } A \right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし v は磁気抵抗率である。

2・2 離散化 本来は三次元で解析すべきであるが、ここではまず、外部磁界として与える磁束密度 B が X 方向成分のみと仮定し YZ 平面における渦電流密度分布を解析し、次に励磁電流密度、渦電流密度が Z 方向成分のみと仮定し、 XY 平面における磁束密度分布を解析する。次にその離散化について述べる。

2・2・1 渦電流密度分布 式(9)を YZ 平面の二次元の方程式として表すと次式となる。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma v_y B) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma v_z B) \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)にガラーキン法を適用する。部分積分し自然境界条件を考慮しさらに式(4)の関係を代入すると次式が得られる。

$$[A_{ij}][H_i] = [u_i] \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし A_{ij} , u_i は次式で表される。

$$A_{ij} = \frac{c_i c_j + d_i d_j}{4\Delta^{(e)}} + \sigma \mu_0 \frac{\Delta^{(e)}}{12\Delta t} (1 + \delta_{ij}) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$u_i = \frac{\sigma B}{2} (c_i v_y + d_i v_z) + \frac{\sigma \mu_0 \Delta^{(e)}}{12\Delta t} H_j^j (1 + \delta_{ij}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで c_i , d_i は、一次三角形要素の補関関数を y , z で偏微分することによって得られ次式のように表される。

$$c_i = z_j - z_k, \quad d_i = y_k - y_j \quad \dots\dots\dots (18)$$

i, j, k は循環する添字であり、 y, z は節点座標である。 $\Delta^{(e)}$ は e 番目の要素の面積を表し、 Δt は時間きざみ幅、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。 H_j^j は、 Δt [s] 前の H_j の値を表す。式(15)を解き、 H_i を求めれば渦電流密度は次式より求められる。

$$J_{ey} = \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{d_i H_i}{2\Delta^{(e)}}, \quad J_{ez} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{c_i H_i}{2\Delta^{(e)}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

2・2・2 磁束密度分布 導体内では電荷の蓄積が行われないことを考慮して、 XY 平面における二次元磁場の方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_y \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_x \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \\ & + \frac{\sigma}{S_i} \iint_{S_i} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial y} v_y + \frac{\partial A}{\partial x} v_x \right) dS \\ & - \sigma \frac{\partial A}{\partial y} v_y - \sigma \frac{\partial A}{\partial x} v_x = 0 \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

ただし S_i は運動する導体の断面積を表す。式(20)にガラーキン法を適用し、自然境界条件を考慮するとともに、磁化特性の非線形性を考慮するためにニュートンラプソン法を適用すると次式が得られる。

図 1 運動する導体を含む電磁場

$$\left[\frac{\partial G_i}{\partial A_j} \right] \cdot [\delta A_i] = [-G_i] \dots \dots \dots (21)$$

ここで G_i , $\partial G_i / \partial A_j$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} G_i = & \frac{\nu_y c_i c_j + \nu_x d_i d_j}{4\Delta t^{(e)}} A_j^{t+\Delta t} - \frac{\Delta^{(e)}}{3} J_0 \\ & + \frac{\Delta^{(e)} \sigma}{12\Delta t} (A_j^{t+\Delta t} - A_j^t) (1 + \delta_{ij}) \\ & + \frac{\sigma}{6} (\nu_x c_j + \nu_y d_j) A_j \\ & - \frac{\sigma}{S_i} \left\{ \frac{1}{9\Delta t} \left(\sum_{e=1}^{NC} \Delta^{(e)} \sum_{j=1}^3 (A_j^{t+\Delta t} - A_j^t) \right) \right\} \\ & + \frac{1}{6} \left(\sum_{e=1}^{NC} (\nu_x c_j A_j + \nu_y d_j A_j) \right) \left(\sum_{e=1}^{NC} \Delta^{(e)} \delta_i \right) \end{aligned} \dots \dots \dots (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial A_j} = & \frac{\nu_y c_i c_j + \nu_x d_i d_j}{4\Delta t^{(e)}} + \frac{2}{\Delta t^{(e)}} \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \\ & \times \frac{c_i c_k + d_i d_k}{4\Delta t^{(e)}} A_k^{t+\Delta t} - \frac{c_j c_l + d_j d_l}{4\Delta t^{(e)}} A_l^{t+\Delta t} \\ & + \frac{\Delta^{(e)} \sigma}{12\Delta t} (1 + \delta_{ij}) + \frac{\sigma}{6} (\nu_x c_j + \nu_y d_j) \\ & - \frac{\sigma}{9\Delta t S_i} \left(\sum_{e=1}^{NC} \Delta^{(e)} \delta_j \right) \left(\sum_{e=1}^{NC} \Delta^{(e)} \delta_i \right) \\ & - \frac{\sigma}{6 S_i} \left\{ \sum_{e=1}^{NC} (\nu_x c_j + \nu_y d_j) \right\} \left(\sum_{e=1}^{NC} \Delta^{(e)} \delta_i \right) \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

ここではアインシュタインの総和規約を用いている。 NC は導体を構成する要素数を表し、 δ_{ij} はクロネツカのデルタを表す。 $A_i^t, A_i^{t+\Delta t}$ はそれぞれ時刻 t におけるポテンシャル値を、時刻 $t + \Delta t$ におけるポテンシャル値を表す。 c_i, d_i は式(18)と同様に次式より求められる。

$$c_i = y_i - y_k, \quad d_i = x_k - x_j \dots \dots \dots (24)$$

ここで x, y は節点座標である。式(21)より δA_i を求め、収束判定値 ε に対して $\delta A_i < \varepsilon$ を満足するまで繰返し計算を行い、ベクトルポテンシャル A_i を求めることができる。磁束密度は式(10)より求められる。運動する導体の e 番めの要素に生じる渦電流は z 方向成分のみとなり、次式より求められる。

$$\begin{aligned} I_e = & -\sigma \left\{ \frac{\Delta^{(e)}}{3\Delta t} \sum_{i=1}^3 (A_i^{t+\Delta t} - A_i^t) - \frac{\Delta^{(e)}}{S_i} \sum_{e=1}^{NC} \frac{\Delta^{(e)}}{3\Delta t} \sum_{i=1}^3 \right. \\ & \times (A_i^{t+\Delta t} - A_i^t) + \frac{\Delta^{(e)}}{S_i} \sum_{e=1}^{NC} \left(-\frac{d_i}{2} \nu_y - \frac{c_i}{2} \nu_x \right) A_i \\ & \left. + \frac{d_i A_i}{2} \nu_y + \frac{c_i A_i}{2} \nu_x \right\} \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

減衰力はフレミングの左手則より次式より求められる。

$$F_e = \int_l (I_e \times B_e) dl \dots \dots \dots (26)$$

2・2・3 渦電流の表皮効果 電流の表皮効果は一般に次式で与えられる。

$$E = E_0 \exp\{(-1-i)x\sqrt{\mu\sigma\omega/2} + i\omega t\} \dots \dots \dots (27)$$

x は導体の深さ、 ω は角振動数である。

$$\alpha = \sqrt{\mu\sigma\omega/2} \dots \dots \dots (28)$$

とおき、実数部分のみを考え、平均の電界の強さを求めると、

$$E_{ave} = \{2(1 - e^{\delta\alpha/2}) / \delta\alpha\} E_0 \dots \dots \dots (29)$$

となる。ここで δ は導体の厚さを表す。この表皮効果による電界の強さの減少は、式(5)より導電率を低下させることにより考慮することができる。したがって、表皮効果を考慮した見掛けの導電率の値を σ_s とすると、次式のように表せる。

$$\sigma_s = \{2(1 - e^{\delta\alpha/2}) / \delta\alpha\} \cdot \sigma \dots \dots \dots (30)$$

3. 解 析 例

3・1 減衰係数の評価 図2は、片持ばりに磁気ダンパを設置した実験装置を、図3は磁気ダンパを示している。鉄心には線径1.6φのコイルが750回巻かれており、直流電源によりこのコイルに励磁電流を流し、磁束を生じさせる。加速度ピックアップをはりに

表1 質量、ばね定数および導電率の値

	Aluminium	Copper
Mass m kg	4.070	7.087
Spring constant k N/m	6789	
Conductivity σ 1/Ωm	0.19×10^8	0.46×10^8

図2 片持ばりと磁気ダンパから成る実験装置

図3 磁気ダンパ

図4 YZ平面の解析モデル

取付け、振動波形を実測する。表1に導体板をアルミニウムおよび銅にした場合の質量、ばね定数、導電率の値を示す。導電率の値は、実験に使用するものと同じ材質の5mm角の試験片を作成し、電流を流したときの電圧降下を測定して求めた。質量は、片持ばりを一自由度の振動系とみなし、ばね定数と固有振動数より等価な質量を求めた。渦電流密度分布の解析は次のようにして行った。図4は解析モデルを表しており、四角形ABCDは磁極を表している。導体板がY方向に ΔY 運動することにより $\Delta t[s]$ 後には磁極が四角形EFGOへ移動する。このように時間ステップごとに磁極の位置を移動させて、 $\partial B/\partial t$ の項を考慮して解析した。磁極部のX方向の磁束密度は、導体板が動かないと仮定して求めたXY平面での磁束密度の解析結果の値を用いた。

励磁電流が2A、導体板が動かないと仮定した場合

のXY平面における磁束分布の解析結果を図5に示す。ギャップ部の磁束密度は0.402Tで、実験値と比較して2.4%と良く一致している。この値を用いて、導体板が0.13m/sの速度で運動するときのYZ平面における渦電流密度分布の解析結果を図6に示す。式(26)より減衰力を算出し、減衰係数を求め図7および表2に示す。実験値は、加速度の自由減衰振動波形の複振幅の比より求めた。実験値と計算値は良く一致しており、本解析手法の妥当性を示しているものと思われる。しかし励磁電流が大きくなるにしたがって両者の差が増加している。この原因は、ジュール熱の損失や、導体板のインダクタンスによる損失および反抗磁界の磁化エネルギーによる損失が、励磁電流の増加に伴い大きくなったためと考えられる。

3.2 XY平面の磁場解析における導電率の補正

図8は励磁電流2A、速度0.13m/s、純銅の導電率

表2 減衰係数

I A	Attenuation coefficient C Ns/m					
	Aluminium			Copper		
	Experimental value	Calculated value	Error %	Experimental value	Calculated value	Error %
0.5	0.86	0.93	8.1	1.96	2.22	13.3
1.0	3.77	3.75	0.5	9.08	8.94	1.5
1.5	8.46	8.63	1.7	20.36	20.58	1.2
2.0	14.55	15.61	7.2	35.50	37.21	4.8
2.5	23.03	24.73	7.3	53.29	58.42	9.6

図5 磁束線図(XY線図)

図6 渦電流密度の分布(YZ平面、銅板の場合)

図7 減衰係数

図8 磁極部の渦電流密度の解析結果

図9 渦電流密度分布の変化(銅板表皮効果を考慮)

$0.58 \times 10^8 \text{ 1}/\Omega\text{m}$ の場合の渦電流密度の Z 方向成分の XY および YZ 平面における解析結果を示している。横軸は Y 方向の磁極の幅を表す。図 8 より、 XY 平面での解析結果は YZ 平面の結果より大きい。これは、二次元磁場としたために、磁極および導体板の Z 方向の寸法が単位厚さと仮定されたことが原因と考えられる。この影響を導電率で補正することが可能であり、補正係数は 0.67 であった。図 9 には導体の Z 方向の渦電流密度の y 方向の分布を、図 4 に示すように、中心線から Z 方向への距離 l をパラメータとして表している。図 4 から明らかなように、中心線から離れるに従って、 Z 方向の渦電流密度は減少する。 XY 平面の磁場解析においては、図 4 の中心線付近の渦電流密度の分布が Z 方向に均一であるとして解析するため、誤差が生じる。この誤差は、 XY 平面の解析において、 Z 方向の厚さ〔式(26)の l に相当する〕によって補正することが可能であり、補正係数は 0.895 であった。

3・3 反抗磁界の影響を考慮した磁場解析 図 2 に示した実験モデルを一自由度の振動系とみなせば、運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{Y} + c\dot{Y} + kY = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで m, c, k はそれぞれ質量、減衰係数およびばね定数である。振動の速度、変位は式(31)をルンゲ-クッタ法により数値積分して求めた。減衰力 $c\dot{Y}$ は、各時間ステップごとに式(21), (25), (26)より計算した。ただし、導電率と Z 方向の厚さは、3.2 節で述べた補正值を用いた。磁化特性は、けい素鋼板 (S 50, 0.5 mm) のデータを用いた。 $\partial A/\partial t$ の項を考慮するために、時間ステップごとに導体板の変位量だけ、導体板の節点座標を修正して解析した。時間きざみ幅は 4.56 ms とした。励磁電流 2 A、初期変位 -5 mm、銅板を用いた場合の、渦電流密度の変化を図 10 に示す。同様に磁束密度の変化を図 11 に示す。ここで縦軸は導体板の Y 方向の幅を表す。図 10 において、渦電流密度分布は磁

図 10 渦電流密度 (Z 方向) の変化

図 11 磁束密度の変化

図 12 変位, 速度, 減衰力の波形 (計算結果)

極の端部付近でピークを示している。これは磁極の端部では、磁束密度が急激に変化するため、 $\partial B/\partial t$ の項が大きくなったためと考えられる。図 11 において、ギャップ付近の磁束密度が変動している。これは、渦電流による反抗磁界の影響を表していると考えられる。しかしこの変動は 4.9% と小さい。励磁電流を 1 A にして同様の解析を行ったところ、この変動は 5.2% と増加した。これは、励磁電流を 1 A にした場合、導体板の速度が増加したためと考えられる。したがって、導体板が高速度で運動する場合や高周波数の振動では、この反抗磁界の影響を考慮する必要があると考えられる。図 12 には、この解析で得られた変位, 速度, 減衰力の波形を示した。図 11 の磁束密度の変動の解析結果を検証するためにホール素子を用いて実験を行った。ホール素子を磁極の上端部に取付け、励磁電流 2 A, 初期変位 -5 mm, 銅板を用いた場合のホール電圧の変動を図 13 に示す。ホール電圧と磁束密度との校正を行い、磁束密度の変動を求めた結果 3.3% であった。また変動周期は 0.203 s と導体板の周期と一致している。励磁電流を 1 A にした場合の磁束密度の変動は 4.5% と増加した。これらの実験結果より、反抗磁界の影響を考慮した解析手法の妥当性が確認されたものと思われる。

4. 結 言

長方形磁極を有する磁気ダンパを取り上げ、その基本特性を解析した結果、次の結論が得られた。

- (1) 運動する導体を含む電磁場の方程式を導出

図 13 ホール電圧の変動

し、有限要素法により定式化を行い、導体に誘起される渦電流の反抗磁界の影響を考慮した解析手法を示した。

- (2) 渦電流による反抗磁界は、ギャップ部の磁束密度を変動させ、その周期は導体板の振動の周期に等しい。

- (3) 渦電流の反抗磁界による磁束密度の変動の結果、ギャップ部の磁束密度分布は、導体板の運動方向へかたよる傾向がある。

- (4) 減衰係数の解析結果と実験結果は良く一致し、反抗磁界による磁束密度の変動の解析結果は、実験結果と定性的に一致し、本解析手法の妥当性が明らかとなった。

最後に、実験装置の作成には舞鶴高専 61 年度卒業研究生秋田幸生氏、武部昌英氏の熱心な協力があった。ここに感謝の意を表す。なお、本研究の解析は、京都大学大型計算機を利用したことを付記する。

文 献

- (1) 小島, 潤滑, 28-3 (昭 58), 177.
- (2) Hagiwara, T., *Bull. Earthquake Res. Inst.*, 12 (1934), 482.
- (3) 背戸・山之内, 機論, 44 (昭 52), 542.
- (4) 小島・山川, 精密機械, 46 (昭 55), 1395.
- (5) Weinberger, M. R., *IEEE Trans. Aerosp. Electr. Syst.*, AES 13-2 (1977), 197.
- (6) 長屋・小島, 機論, 47-424, C (昭 56), 1620.
- (7) 中田・石原・ほか 2 名, 電気学会情報処理研究会資料, IP-80-9 (昭 55).