接着剤の粘弾性モデル定数の決定*

遠 藤 満^{*1}, 吉 場 健 史^{*2}

Determination of Constants of a Visco-Elastic Model of a Binding Agent

Mitsuru ENDO and Takeshi YOSHIBA

A method for determining the constants of a three-element visco-elastic model of a binding agent is shown. The frequency equation of a three-layer sandwich beam with a visco-elastic binding agent core is derived under the boundary condition of both ends free, and the damped free vibration frequency and time constant are measured experimentally, and these values are substituted into the frequency equation, resulting in the function of visco-elastic constants. Then, regarding the absolute value of the frequency equation as the estimation function to become zero, and considering visco-elastic constants as control variables, the visco-elastic constants of four kinds of binding agents are determined by the Rosenbrock nonlinear programming method. Then, the step impulsive response of a two-layer simple supported beam which is bound by those binding agents is analyzed by using three-layer beam theory, showing the fairly large damping effect of a binding agent.

Key Words: Vibration of a Continuous System, Binding Agent, Viscoelasticity, Three-Element Model, Determination of Visco-elastic Constants, Free and Forced Vibration

1. ま え が き

機械および構造物には複数の材料を張り合わせて作られた複合材料がさまざまな場所および用途に使用されている。この複合材料はしばしば接着剤によって二つ以上の材料を互いに接合させて作られているわけであるが、この材料は、厳密にみれば、接着剤の剛性が一般に弱いため、その張合せ面において不完全接着されていると考えることができる。このような不完全接着された構造物の振動特性については、これまでいろいろと研究されている^{(1)~(10)}。しかしながらこれらの研究は理論的な研究がそのほとんどであり、実際の接着剤の特性を力学的にモデル化して調べた研究はこれまでにないように思われる。

そこで本研究では、接着剤で接合した構造系の振動特性を知る基礎的研究として、数種の接着剤の特性を3要素粘弾性モデルでモデル化し、実際にその定数を決定することを目的とする。またそれらの接着剤の粘弾性特性を実際に考察するために、それらの接着剤で

接合された二層ばりがステップ衝撃荷重を受ける際の強制振動応答についても解析検討する。

2. 粘弾性モデル定数の決定

2.1 粘弾性モデルと定数決定法 はじめに接着剤のせん断変形に関し、これを図1に示すような3要素標準線形固体モデルでモデル化する。ここで G_1 , G_2 はばね要素の定数, $1/\mu$ は減衰要素の定数を表す。図1のモデルより、ラプラス変換領域での接着剤の横弾性係数 $G(s)$ は次式のように表される⁽¹¹⁾。

$$G(s) = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{1 + \frac{s}{\mu G_2}}{1 + \frac{s}{\mu(G_1 + G_2)}} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで s はラプラス変換の演算子を示す。

次に接着剤層を中間層とし、減衰の小さな金属を外

図1 3要素標準線形固体モデル

* 昭和63年3月19日 関西支部第63期定時総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年6月15日。

^{*1} 正員、東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1)。

^{*2} 東京工業大学大学院。

層とするサンドウィッチ形粘弾性三層ばり⁽¹¹⁾を考える。このような三層ばりの境界条件をいま両端自由と考えると、粘弾性三層ばり理論⁽¹²⁾により振動数方程式を導くことができる。いまこれを次のようにおく。

$$F=0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここでいまこの三層ばりを両端自由の境界条件のもとで自由振動させ、その実験結果より減衰自由振動数と振幅減衰の時定数を求め、それらの値を式(2)の左辺に代入したとすると、 F は粘弾性モデル定数 G_1, G_2, μ の関数と考えることができる。そこでいま一般にはり長さの異なる n 本の試料より得られた $F_i (i=1 \sim n)$ を考えるとき、近似的に $F_i=0 (i=1 \sim n)$ を満たすためには、 F_i の絶対値の和

$$J = \sum_{i=1}^n |F_i| \quad \dots\dots\dots (3)$$

を最小にするように粘弾性モデル定数を定めてやればよいことになる。そこで本研究では、この定数決定問題を粘弾性モデル定数を操作変数とし、 J を評価関数とする最適化問題とみなして、Rosenbrock の非線形計画法⁽¹³⁾により粘弾性モデル定数を決定した。

2・2 振動数方程式 ここで実際に両端自由粘弾性三層ばりの振動数方程式を求めよう。粘弾性層を中間層とする三層ばりの基礎方程式は次式によって表される⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - gY \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g \frac{E_1 h_1 db}{D_t} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ = \frac{1}{D_t} \left\{ -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(x, t) \right\} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - gu_1 = -gY \frac{D_t}{E_1 h_1 db} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで

$$g = \frac{G}{h_2} \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_3 h_3} \right), \quad Y = \frac{bd^2}{D_t} \left(\frac{E_1 h_1 E_3 h_3}{E_1 h_1 + E_3 h_3} \right)$$

$$d = h_2 + \frac{1}{2}(h_1 + h_3), \quad D_t = \frac{b}{12}(E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3)$$

上式において x ははり中央を原点とした空間座標、 t は時間、 w ははりの曲げ変位 (三つの層で同一と考える)、 $b, m, p(x, t)$ はそれぞれはりの幅、単位長さ当たり質量および外荷重を表す。またサフィックス $i=1 \sim 3$ の 1 と 3 は外層の、また 2 は中間層の量を示すものとして、 h_i は肉厚、 E_i は縦弾性係数、 u_i は外層の中心面の x 方向変位を表す。また G は中間層の横弾性係数を表す。式(4)において外荷重 $p(x, t)$ を零とおき、さらに u_1 を消却すると次式となる。

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1+Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D_t} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - g \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで $w = W(x)e^{i\omega t}$ と仮定し、これを上式に入れると

$$\frac{d^6 W}{dx^6} - g(1+Y) \frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{m\eta^2}{D_t} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} - gW \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここで上式中の G としては式(1)の s を η でおきかえたものを考える。いまさらに $W = Ae^{\lambda x}$ とおくと、特性方程式が次のように求まる。

$$\lambda^6 - g(1+Y)\lambda^4 - \frac{m\eta^2}{D_t}\lambda^2 - \frac{m\eta^2}{D_t}g = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

この方程式の特性根を $\lambda = \pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3$ とすると W は次のように表される。

$$W = \sum_{i=1}^3 (A_{1i}e^{\lambda_i x} + A_{2i}e^{-\lambda_i x})$$

$$= A_1 \sinh \lambda_1 x + A_2 \cosh \lambda_1 x + A_3 \sinh \lambda_2 x$$

$$+ A_4 \cosh \lambda_2 x + A_5 \sinh \lambda_3 x + A_6 \cosh \lambda_3 x$$

$$\quad \dots\dots\dots (8)$$

そこでいま対称モードのみ考えることにすると

$$W = A_2 \cosh \lambda_1 x + A_4 \cosh \lambda_2 x + A_6 \cosh \lambda_3 x$$

$$\quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。

一方両端自由の境界条件は、式(9)より一端のみの境界条件を考えればよいから、はりの長さを l として、 $x=l/2$ で曲げモーメント $M=0$ 、せん断力 $S=0$ 、軸力 $P_1=P_3=0$ を考えればよい。曲げモーメントは

$$M = \frac{D_t}{g} \left\{ -\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + g(1+Y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{m}{D_t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\}$$

$$\quad \dots\dots\dots (10)$$

であるから⁽¹¹⁾、条件 1 として

$$\left[-\frac{d^4 W}{dx^4} + g(1+Y) \frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{m\eta^2}{D_t} W \right]_{x=l/2} = 0$$

$$\quad \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。同様にせん断力および軸力が零という条件より、条件 2 および 3 が次のように求まる⁽¹¹⁾。

$$\left[-\frac{d^5 W}{dx^5} + g(1+Y) \frac{d^3 W}{dx^3} - \frac{m\eta^2}{D_t} \frac{dW}{dx} \right]_{x=l/2} = 0$$

$$\quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left[\frac{d^4 W}{dx^4} - gY \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{m\eta^2}{D_t} W \right]_{x=l/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

上で得られた式(11)および(13)から次の 2 式が得られる。

$$\left[\frac{d^2 W}{dx^2} \right]_{x=l/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\left[\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{m\eta^2}{D_t} W \right]_{x=l/2} = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

したがって境界条件としては式(12)、(14)、(15)を考えればよいことになる。そこでいま式(9)を上 3 式に代入してその係数行列式を零とおくことにより次の

ような振動数方程式が求まる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv F = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで $i=1\sim 3$ として

$$\begin{aligned} a_{1i} &= \lambda_i^2 \cosh\left(\lambda_i \frac{l}{2}\right) \\ a_{2i} &= \lambda_i^4 \cosh\left(\lambda_i \frac{l}{2}\right) + \frac{m\eta^2}{D_i} \cosh\left(\lambda_i \frac{l}{2}\right) \\ a_{3i} &= g(1+Y)\lambda_i^3 \sinh\left(\lambda_i \frac{l}{2}\right) \\ &\quad - \lambda_i^5 \sinh\left(\lambda_i \frac{l}{2}\right) - \frac{m\eta^2}{D_i} \lambda_i \sinh\left(\lambda_i \frac{l}{2}\right) \end{aligned}$$

上式 F における η を

$$\eta = \eta_1 + i\eta_2 \quad (i = \sqrt{-1}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

のようにおくと、減衰自由角振動数 ω と振幅減衰の時定数 T_c は

$$\omega = \eta_2, \quad T_c = -\frac{1}{\eta_1} \quad \dots\dots\dots (18)$$

と表すことができる。

2.3 モデル定数の決定 2.2 節で振動数方程式が求まったので、2.1 節の方法によりモデル定数を実際に求めることができる。本研究では4種類の金属用接着剤について定数を求めた。これらの商品名はそれぞれ TB 2082, ボンド E セット, バンド-15 A, ボンド G 103 であり、本研究ではこれらをそれぞれ接着剤 A, B, C, D とよぶことにする。接着剤 A と B はエポキシ樹脂系の接着剤であり、C と D は合成ゴム系の接着剤である。

作成した試料の金属層はアルミニウム製であり、厚さは $h_1 = h_3 = 3$ mm, 幅 b は 20 mm である。また接着剤層の厚さ h_2 は 0.5~0.6 mm になるように作成した。長さ l については、できるだけ広い周波数帯域にわたってモデル定数が有効となるように、各接着剤について $l = 200, 250, 300, 350, 400$ mm の 5 本を作成した。すなわち式(3)の n は 5 である。

実験では試料を糸でつり下げ、その中央に鋼球を衝突させて、そのときの自由振動を加速度計ピックアップで検出し、バンドパスフィルタを通すことにより一次の対称モードの自由振動波形をとりだし、その波形より減衰自由振動数と振幅減衰の時定数を求めた。

以上のようにして実際に求めた粘弾性モデル定数の値を表 1 に示す。表 1 中の $G_1 G_2 / (G_1 + G_2)$ は式(1)において $s=0$ とおいた場合の値であり、いわば静的変形に対する接着剤の横弾性係数を表す。いま実際に求められた定数の有効性を検証するために、これらの定数を振動数方程式に代入し、逆に減衰自由振動数と振

幅減衰の時定数を求め、実験値と比較したのがそれぞれ図 2, 3 である。減衰自由振動数については、いずれの場合も十分よく一致していることがわかる。振幅減衰の時定数については、接着剤 A の場合にやや差がみられるが、減衰要素を一つしかもたない 3 要素線形固体モデルとしてはほぼ満足のいく結果が得られているものとする。

3. 不完全接着二層ばりのステップ衝撃応答

ここで 2 章で求めた接着剤の粘弾性特性の効果を実際に考察するために、これらの接着剤で接合された二層ばりが両端単純支持され、等分布ステップ衝撃荷重を受ける際の強制振動応答について解析する。

3.1 解析 ここでは接着剤で接合された二層ばりを粘弾性三層ばり⁽¹¹⁾と考え、基礎方程式として式(4)を考える。ただしここでは空間座標 x の原点をばりの一端にとる。いま $p(x, t) = q_0 H(t) [H(t)$ はステップ関数] において式(4)を無次元化すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} - g^* Y^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + g^* Z^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x^*} \\ + R^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau^{*2}} = Q^* H(\tau^*) \quad \dots\dots\dots (19 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x^{*2}} - g^* u_1^* = \frac{g^* Y^*}{Z^*} \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \quad \dots\dots\dots (19 \cdot b)$$

ここで

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad b^* = \frac{b}{l}, \quad h_i^* = \frac{h_i}{l}$$

$$w^* = \frac{w}{h_1 + h_2}, \quad u_i^* = \frac{u_i}{h_1 + h_3}$$

$$g^* = l^2 g, \quad \bar{D}_i = \frac{1}{l^4} D_i, \quad d^* = \frac{d}{l}$$

$$Y^* = \frac{b^* d^{*2}}{\bar{D}_i} \left(\frac{E_1 h_1^* E_3 h_3^*}{E_1 h_1^* + E_3 h_3^*} \right), \quad Z^* = \frac{E_3 h_3^* d^* b^*}{\bar{D}_i}$$

$$R^* = \frac{m \omega_0^2}{\bar{D}_i}, \quad Q^* = \frac{q_0}{\bar{D}_i (h_1 + h_3)}, \quad \tau^* = \omega_0 t$$

上式において ω_0 は厚さ $(h_1 + h_3)$ のはりの最低次の角振動数とする。

いま式(19・a, b)の解として、両端単純支持の境界条件を満たす標準関数を用いて次のようにおく。

表 1 接着剤の粘弾性モデル定数

Sinching agent	G_1 (Pa)	G_2 (Pa)	μ (1/Pa·s)	$\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ (Pa)
A	3.694×10^7	1.263×10^9	3.336×10^{-5}	3.589×10^7
B	3.435×10^7	5.788×10^7	2.185×10^{-4}	2.156×10^7
C	3.208×10^7	7.737×10^7	7.547×10^{-5}	2.268×10^7
D	8.020×10^6	3.747×10^6	4.876×10^{-4}	2.554×10^6

$$\left. \begin{aligned} w^* &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\tau^*) \sin \alpha_n x^* \\ u_1^* &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\tau^*) \cos \alpha_n x^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで $\alpha_n = (2n-1)\pi$ ($n=1, 2, \dots$)

いま式(20)を式(19・a)に代入し、さらに規準関数の直交性を用いて一般化座標 a_n, b_n に関する方程式を導くと

$$\begin{aligned} a_n(\tau^*) \ddot{a}_n + g^* Y^* a_n(\tau^*) \alpha_n^2 - g^* Z^* b_n(\tau^*) \alpha_n \\ + R^* \ddot{a}_n(\tau^*) = \frac{4Q^*}{\alpha_n} H(\tau^*) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで $\dot{} = d/d\tau^*$

となる。同様に式(20)を式(19・b)に代入して、規準関数の直交性を利用すると次式が得られる。

$$b_n(\tau^*) \ddot{a}_n + g^* b_n(\tau^*) = \frac{g^* Y^*}{Z^*} a_n(\tau^*) \alpha_n \dots\dots\dots (22)$$

式(21), (22)から $b_n(\tau^*)$ を消却すると

$$\begin{aligned} a_n(\tau^*) \ddot{a}_n + g^* Y^* a_n(\tau^*) \alpha_n^2 - \frac{g^{*2} Y^* \alpha_n^2}{\alpha_n^2 + g^*} a_n(\tau^*) \\ + R^* \ddot{a}_n(\tau^*) = \frac{4Q^*}{\alpha_n} H(\tau^*) \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

(a) 接着剤 A

(c) 接着剤 C

(b) 接着剤 B

(d) 接着剤 D

図 2 減衰自由振動数

となる。ここで式(23)をラプラス変換すると

$$\left\{ a_n^4 + g^*(s^*) Y^* a_n^2 - \frac{g^{*2}(s^*) Y^* a_n^2}{a_n^2 + g^*(s^*)} + R^* s^{*2} \right\} \bar{a}_n(s^*) = \frac{4Q^*}{a_n} \frac{1}{s^*} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで s^* は無次元化されたラプラス演算子である。上式の $g^*(s^*)$ 中にある G は式(1)の s を $\omega_0 s^*$ で置きかえることによって与えられる。いまこれらの関係を式(24)に代入して整理すると、 $\bar{a}_n(s^*)$ は次のようになる。

$$\bar{a}_n(s^*) = \frac{N(s^*)}{M(s^*)} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで $M(s^*) = s^{*4} + \beta_1 s^{*3} + \beta_2 s^{*2} + \beta_3 s^*$

$$N(s^*) = \gamma_1 s^* + \gamma_2$$

$$\beta_1 = \frac{\mu(G_1 G_2 k + (G_1 + G_2) a_n^2)}{\omega_0(G_1 k + a_n^2)}$$

$$\beta_2 = \frac{a_n^4(G_1 k(1 + Y^*) + a_n^2)}{R^*(G_1 k + a_n^2)}$$

$$\beta_3 = \frac{\mu a_n^4(G_1 k(1 + Y^*) + a_n^2)}{\omega_0 R^*(G_1 k + a_n^2)}$$

$$\gamma_1 = \frac{4Q^*}{a_n R^*}$$

$$\gamma_2 = \frac{4\mu Q^* \{(G_1 + G_2) a_n^2 + G_1 G_2 k\}}{a_n R^* \omega_0 (G_1 k + a_n^2)}$$

$$k = \frac{1}{h_2^*} \cdot \frac{E_1 h_1^* + E_3 h_3^*}{E_1 h_1^* E_3 h_3^*}$$

式(25)をラプラス逆変換すると

$$a_n(\tau^*) = \sum_{r=1}^4 \frac{N(p_r)}{M'(p_r)} e^{p_r \tau^*} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし $p_1 \sim p_4$ は $M(s^*) = 0$ の4根を表し、 $M'(p_r) = [dM/ds^*]_{s^*=p_r}$ を表す。したがって解 w^* は式(20)によって求めることができる。

3.2 計算結果および考察 接着剤A～Dによっ

(a) 接着剤 A

(c) 接着剤 C

(b) 接着剤 B

(d) 接着剤 D

図 3 振幅減衰の時定数

図 4 曲げ変位のステップ衝撃応答 (はり中央)
($h_1^* = h_3^* = 0.02$, $h_2^* = 0.0002$)

て接合された不完全接着二層ばりが両端単純支持され、等分布衝撃荷重を受ける際の応答 w^* を図 4 に示す。ここで金属層の材質はアルミニウムとし、 $h_1^* = h_3^*$ 、 $Q^* = 1.57$ とおいている。図 4 にはまた厚さ $2h_1^*$ の単板の場合の結果も比較のために示してある。図 4 の結果は $l = 300 \text{ mm}$ とすれば $h_1 = h_3 = 6 \text{ mm}$ 、また接着剤層は $h_2 = 0.06 \text{ mm}$ で、時間は約 0.2 s 間の波形に相当する。図 4 よりわかるように、単板の場合には当然減衰はないが、接着剤が A $\rightarrow$ D となるにしたがって減衰効果が次第に大きくなっていることが観察される。

このようにエポキシ樹脂系に比べ、合成ゴム系の接着剤では一般に減衰効果が大きく、接着剤により制振効果をもたせることも可能であることがわかる。

4. む す び

接着剤を 3 要素粘弾性モデルでモデル化し、粘弾性三層ばり理論と Rosenbrock の非線形計画法を用いることにより、その粘弾性モデル定数を決定する方法を示した。

また実験の接着剤に関し、減衰効果の大きな接着剤を用いて複合材を構成すれば、実際に制振効果をもたせることも可能であることを示した。

文 献

- (1) Jones, J. P. and Whittier, J. S., *Trans. ASME*, Ser. E, 34-4 (1967), 905.
- (2) Scott, R. A., *J. Sound Vib.*, 26-3 (1973), 321.
- (3) Benveniste, Y. and Aboudi, J., *J. Sound Vib.*, 46-4 (1976), 473.
- (4) Nayfeh, A. H. and Nassar, E. A. M., *Trans. ASME*, Ser. E, 45-4 (1978), 822.
- (5) Chonan, S., *Ing. Arch.*, 49-2 (1980), 97.
- (6) Chonan, S., *J. Acoust. Soc. Am.*, 69-4 (1981), 1015.
- (7) Chonan, S., *J. Sound Vib.*, 78-2 (1981), 257.
- (8) Chonan, S., *J. Acoust. Soc. Am.*, 72-1 (1982), 208.
- (9) Chonan, S., *J. Sound Vib.*, 85-4 (1982), 525.
- (10) Chonan, S., *J. Sound Vib.*, 85-4 (1982), 539.
- (11) Flügge, W. (堀訳), 粘弾性学, (昭 48), 18, 培風館.
- (12) Mead, D. J. and Markus, S., *J. Sound Vib.*, 10-2 (1969), 163.
- (13) Kowalik, J. and Osborne, M. R. (山本・小山訳), 非線形最適化問題, (昭 46), 25, 培風館.