交番電磁力が作用する弾性体の非線形強制振動の有限要素解析*

(第1報, 有限要素法と調和バランス法を用いた解析法とはりへの応用)

小 島 宏 行^{*1}

Finite Element Analysis of Nonlinear Forced Vibrations of an Elastic Body Subjected to Alternating Electromagnetic Force

(1st Report, Analytical Method by the Finite Element Method and the Harmonic Balance Method, and its Application to a Beam)

Hiroyuki KOJIMA

When an alternating electromagnetic force is applied to the mechanical vibration system, nonlinear forced vibrations such as superharmonic and subharmonic vibrations are generated owing to the nonlinearity of the electromagnetic force. In this report, the analytical method by the finite element method and the harmonic balance method is presented to investigate the nonlinear vibrations of a beam subjected to the alternating electromagnetic force. In the analysis, the equations of motion of the beam are obtained by the finite element method, and the nonlinear matrix equations which decide the force vibration amplitudes are derived in consideration of the second order superharmonic and the one-second order subharmonic by applying the harmonic balance method. Then, the nonlinear matrix equations are reduced, and three simultaneous equations are derived. Furthermore, the numerical results by use of the Newton-Rapson method agree well with the previous numerical results, and the present analytical method is confirmed.

Key Words: Vibration, Electromagnetic Force, Beam, Nonlinear Vibration, Finite Element Method, Harmonic Balance Method, Superharmonic Vibration, Subharmonic Vibration

1. 緒 言

交番電磁力が作用する機械振動系においては、電磁力の非線形性に起因する超調波振動や分数調波振動などの非線形振動特有の挙動が見られ、ばね質量系⁽¹⁾ならびにはり^{(2)~(5)}を対象とした研究が報告されている。また、非線形ばねで支持された場合のはりを取扱った研究⁽⁶⁾も行われている。このような非線形の周期的外力が作用する弾性体の強制振動の解析に有限要素法を適用することは、変断面はりや板などに対する取扱いが容易となり、実用上意義あるものと言えるが、このような研究は、いまだ見受けられないようである。

本研究は、交番電磁力が作用するはりの非線形強制振動を、有限要素法と調和バランス法を用いて求める解析法について述べたものである。解析においては、まず電磁力が作用するはりの運動方程式を、有限要素法を用いて求めるとともに、2次超調波あるいは1/2次分数調波振動を考慮した定常振動解を調和バランス法を用いて導いている。また、この定常振動解を与える非線形のマトリックス方程式の次元数は、はりの分

割数の6倍の値となるが、縮小インピーダンス法⁽⁷⁾により、このマトリックス方程式を縮小し、電磁力の作用する節点のたわみ変位だけに関する三元の非線形連立方程式に変換している。さらに、ニュートン・ラプソン法に基づく数値計算結果を既報の数値計算結果と比較照合し、本解析法の妥当性を吟味している。

2. 理 論 解 析

図1は、交番電磁力 f_m が作用するはりの有限要素モデルを示したものであり、はりの先端には集中質量 m が取り付けられている。一般に、はりを n 個の同一諸元の要素に分割すると、図1のはり質量系の運動方程式は、有限要素法を適用することにより、次式のような

図1 電磁力が作用するはりの有限要素分割図

* 昭和63年3月12日 東北支部第23期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和62年8月13日.

*1 正員, 群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1).

に書くことができる。

$$\begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}' \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ y \end{Bmatrix} = f_m \begin{Bmatrix} b' \\ b \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに

$$\begin{aligned} & \{\delta y'^T, \delta y^T\} \left[\begin{bmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}' \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ y \end{Bmatrix} \right] \\ &= m \ddot{w}_{n+1} \delta w_{n+1} + \sum_{i=1}^n \delta \{\phi\}_i^T \left[[M]_i \{\phi\}_i \right. \\ & \quad \left. + [K]_i \{\phi\}_i \right] \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{y'\} = \{w_1, \phi_1\}, \{b'\} = \{0, 0\} \\ & \{\phi\}_i = \{w_i, \phi_i, w_{i+1}, \phi_{i+1}\} \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \phi_n \\ \phi_{n+1} \\ w_{n+1} \end{Bmatrix}, \{b\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

であり、要素*i*の質量マトリックス $[M]_i$ ならびに剛性マトリックス $[K]_i$ は、次式で与えられる。

$$[M]_i = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ \text{sym.} & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$[K]_i = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e \\ & & 12 & -6l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$l_e = l/n \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(1)、(7)において、 M'_{11} 、 M'_{12} 、 M'_{21} 、 M ははりの全体の質量マトリックスの部分マトリックス、 K'_{11} 、 K'_{12} 、 K'_{21} 、 K は剛性マトリックスの部分マトリックス、 w 、 ϕ ははりのたわみならびに回転角、 ρ 、 A 、 l ははりの密度、横断面積および長さ、 E 、 I は縦弾性係数ならびに断面二次モーメントを表している。

はりの境界条件

$$\{y'\} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

を式(1)に代入すると

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = f_m \{b\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

一方、交流電流 u で励磁された電磁石による電磁力 f_m は、次式のように書くことができる。

$$f_m = a_0(1 + a_1 y_N + a_2 y_N^2 + a_3 y_N^3) u^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに

$$u = U \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (11)$$

であり、 ω 、 U は励磁電流の角振動数ならびに振幅である。

交番電磁力の振動数は、式(10)より 2ω となるので、まず二次超調波振動と基本調波振動を考慮した場合の式(9)の定常振動解を、次式のように置く。

$$\{y\} = \{Y\} + \{Y^2\} \cos 2\omega t + \{Y^4\} \cos 4\omega t \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を式(9)に代入し、調和バランス法を適用するとともに、電磁力が作用するたわみ変位成分とそれ以外の成分に変位ベクトルを分離すると、次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y} \\ X \end{Bmatrix} = s \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - 4\omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}^2 \\ X_2 \end{Bmatrix} = s_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - 16\omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}^4 \\ X_4 \end{Bmatrix} = s_4 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = [K], \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = [M] \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{Y} \\ \vdots \\ Y_{N-1} \\ \vdots \\ X \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{N-1} \\ \vdots \\ Y_N \end{Bmatrix} = \{Y\}, \begin{Bmatrix} \bar{Y}^2 \\ \vdots \\ Y_{N-1}^2 \\ \vdots \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{Y^2\}, \begin{Bmatrix} \bar{Y}^4 \\ \vdots \\ Y_{N-1}^4 \\ \vdots \\ X_4 \end{Bmatrix} = \{Y^4\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{Y}^4 \\ \vdots \\ Y_{N-1}^4 \\ \vdots \\ X_4 \end{Bmatrix} = \{Y^4\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$f_m = s + s_2 \cos 2\omega t + s_4 \cos 4\omega t \quad \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 s 、 s_2 、 s_4 は X 、 X_2 、 X_4 による多項式を表している。また、式(13)～(15)は、 $3N$ 元すなわち $6n$ 元の非線形マトリックス方程式を表しているが、これらの式は、縮小インピーダンス法⁽⁷⁾を用いて $\{\bar{Y}\}$ 、 $\{\bar{Y}^2\}$ 、 $\{\bar{Y}^4\}$ を消去することにより、電磁力が作用している節点のたわみ変位だけに関する 3 元の非線形連続方程

式に変換することができる。すなわち

$$f_1 = 1 + \left(\alpha_1 - \frac{2Q}{\alpha_0 U^2} \right) X + \frac{\alpha_1 X_2}{2} + \alpha_2 \left\{ X^2 + XX_2 + \frac{1}{2} (X_2^2 + X_4^2 + X_2 X_4) \right\} + \alpha_3 \left\{ X^3 + \frac{3}{2} (XX_2^2 + XX_4^2 + X^2 X_2 + XX_2 X_4) + \frac{3}{4} (X_2^2 X_4 + X_2 X_4^2) + \frac{3X_2^3}{8} \right\} = 0 \quad (20)$$

$$f_2 = 1 + \left(\alpha_1 - \frac{2Q_2}{\alpha_0 U^2} \right) X_2 + \alpha_1 \left(X + \frac{X_4}{2} \right) + \alpha_2 \left\{ X^2 + \frac{3X_2^2}{4} + \frac{X_4^2}{2} + 2XX_2 + X_2 X_4 + XX_4 \right\} + \alpha_3 \left\{ \frac{3}{2} (X_2 X_4^2 + X_2^2 X_4 + XX_4^2 + X^2 X_4) + 3X^2 X_2 + \frac{3X_2^3}{4} + 3XX_2 X_4 + X^3 + \frac{9XX_2^2}{4} + \frac{3X_4^3}{8} \right\} = 0 \quad (21)$$

$$f_3 = \left(\alpha_1 - \frac{2Q_4}{\alpha_0 U^2} \right) X_4 + \frac{\alpha_1 X_2}{2} + \alpha_2 \left(\frac{X_2^2}{2} + 2XX_4 + XX_2 + X_2 X_4 \right) + \alpha_3 \left\{ \frac{3}{2} (XX_2^2 + X_2^2 X_4 + X^2 X_2) + 3X^2 X_4 + \frac{3X_4^3}{4} + \frac{X_2^3}{2} + 3XX_2 X_4 + \frac{9X_2 X_4^2}{8} \right\} = 0 \quad (22)$$

ここに

$$Q = K_{22} - \{K_{21}\} [M_{11}]^{-1} \{K_{12}\} \quad (23)$$

$$Q_2 = K_{22} - 4\omega^2 M_{22} - \{K_{21} - 4\omega^2 M_{21}\} [K_{11} - 4\omega^2 M_{11}]^{-1} \times \{K_{12} - 4\omega^2 M_{21}\} \quad (24)$$

$$Q_4 = K_{22} - 16\omega^2 M_{22} - \{K_{21} - 16\omega^2 M_{21}\} [K_{11} - 16\omega^2 M_{11}]^{-1} \times \{K_{12} - 16\omega^2 M_{21}\} \quad (25)$$

さらに、1/2 次分数調波振動と基本調波振動を考慮した強制振動解も、これまでの方法と同様に導くことができる。この場合の式(9)の解を

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \bar{Y} \\ X \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Y}^1 \\ X_1 \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} \bar{Y}^2 \\ X_2 \end{Bmatrix} \cos 2\omega t \quad (26)$$

と置けば、系の振動振幅を定める3元の非線形連立方程式が、次式のように導かれる。

$$f_1 = 1 + \left(\alpha_1 - \frac{2Q}{\alpha_0 U^2} \right) X + \frac{\alpha_1 X_2}{2} + \alpha_2 \left(X^2 + \frac{3X_2^2}{4} + XX_2 \right) + \alpha_3 \left\{ \frac{3}{2} (XX_2^2 + X^2 X_2 + X_1^2 X_2) + X^3 + \frac{3X_2^3}{8} + \frac{9XX_2^2}{4} \right\} = 0 \quad (27)$$

$$f_2' = \left(\frac{3\alpha_1}{2} - \frac{2Q_1}{\alpha_0 U^2} \right) X_1 + \alpha_2 (3XX_1 + 2X_1 X_2) + \alpha_3 \left(\frac{5X_1^3}{4} + \frac{9X_2^2 X_1}{2} + \frac{21X_1 X_2^2}{8} + 6XX_1 X_2 \right) = 0 \quad (28)$$

$$f_3' = 1 + \alpha_1 X + \left(\alpha_1 - \frac{2Q_2}{\alpha_0 U^2} \right) X_2 + \alpha_2 (X^2 + X_1^2 + \frac{3X_2^2}{4} + 2XX_2) + \alpha_3 \left\{ 3(XX_1^2 + X^2 X_2) + X^3 + \frac{3X_2^3}{4} + \frac{9XX_2^2}{4} + \frac{21X_1^2 X_2}{8} \right\} = 0 \quad (29)$$

ここに

$$Q_1 = K_{22} - \omega^2 M_{22} - \{K_{21} - \omega^2 M_{21}\} [K_{11} - \omega^2 M_{11}]^{-1} \{K_{12} - \omega^2 M_{12}\} \quad (30)$$

3. 数値計算の手順

系の振動振幅を定める3元の非線形連立方程式を、便宜上、次式のように書き直す。

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

式(31)にニュートン・ラプソン法を適用すると、根を求める繰返し公式は、次式のように書くことができる。

$$\begin{cases} x_{1,i+1} = x_{1,i} + \Delta x_1 \\ x_{2,i+1} = x_{2,i} + \Delta x_2 \\ x_{3,i+1} = x_{3,i} + \Delta x_3 \end{cases} \quad (32)$$

ここに

$$\begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

$\begin{matrix} x_1 = x_{1,i} \\ x_2 = x_{2,i} \\ x_3 = x_{3,i} \end{matrix}$

本研究においては、式(20)、(21)ならびに式(27)～(29)の非線形連立方程式の解を求める有限要素解析プログラムを、式(32)のアルゴリズムを適用して作成し、数値計算を行った。

4. 数値計算例

本研究の数値計算においては、既報の実験の諸元⁽⁵⁾を用いた。すなわち、はり質量系では、 $\rho A l = 0.0575$ kg, $l = 232.5$ mm, $E = 152$ GPa, $I = 7.59 \times 10^{-12}$ m⁴, $m = 0.0781$ kg, $U = 0.4$ A のような値を用い、電磁力係数においては、 $\alpha_0 = 0.737$ N/A², $\alpha_1 = 140.6$ m⁻¹, $\alpha_2 =$

$1.568 \times 10^4 \text{ m}^{-2}$, $\alpha_3 = 2.181 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$ のとおりである。

また、有限要素解析プログラムにおいては、はりの分割数を、図1のように $n=4$ とした。なお、静止時のはりの先端と電磁石とのギャップは 11 mm としてある。

図2に、各調波成分の強制振動応答に関する数値計算結果を示す。まず、振動中心のずれ $|X|$ は、主共振点以外では、ほぼ一定の値となっているが、振動数が主共振点より小さい領域において、より大きくなっている。このことは、電磁加振力とはりの先端のたわみ振動の位相差が、主共振点において変化することに起因しているものと推定される。また、主共振点の前後に、2次超調波振動ならびに1/2次分数調波振動がそれぞれ生起しており、基本調波振動成分も、2次超調波あるいは1/2次分数調波共振において、わずかに大きくなっていることがわかる。

図3に、はり先端のたわみ振動波形ならびに励磁電流の波形を示す。まず図3(a)は、2次超調波振動成

分と基本調波振動成分がともに生起している場合であり、2次超調波成分の振動数は、励磁電流のものの4倍すなわち交番電磁力の2倍の値になっていることがわかる。また、図3(b), (c)は、基本調波振動成分あ

(a) $f = 2.13 \text{ Hz}$

(b) $f = 3.62 \text{ Hz}$

(c) $f = 8.51 \text{ Hz}$

図3 はりの先端の振動波形

図2 各調波成分の強制振動応答

図4 本解析法による数値計算結果(I)と既報⁽⁵⁾の数値計算結果(II)ならびに実験結果(●)との比較

るいは1/2次分数調波振動成分が支配的である場合の振動波形を示している。

図4は、本解析法による数値計算結果(I)と既報⁽⁵⁾の数値計算結果(II)ならびに実験結果(●)と比較したものであり、縦軸には、振動成分

$$X_0 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \text{ または, } x_0 = \sqrt{X_2^2 + X_4^2} \dots (34)$$

が取られている。本解析法による数値計算結果は、既報の数値計算結果と一致し重なっており、これらの値は実験結果と良く一致している。このことから、本解析法の妥当性が立証されたものと言える。

5. 結 言

交番電磁力が作用するはりの非線形振動解を、実用上極めて有用な有限要素法と調和バランス法を用いて導いた。解析においては、まず電磁力が作用するはりの運動方程式を、有限要素法を用いて求めるとともに、2次超調波あるいは1/2次分数調波振動を考慮した解を与える非線形のマトリックス方程式を、調和バランス法を用いて求めた。このマトリックス方程式は、は

りの分割数 n の6倍の次元を有するため、数値計算上、好ましくない。このため、縮小インピーダンス法により、 $6n$ 次元のマトリックス方程式を縮小し、電磁力が作用する節点のたわみ変位だけに関する3元の非線形連立方程式を導いた。さらに、ニュートン・ラプソン法による繰返し公式を用いて数値計算を行い、各調波成分の強制振動応答の一端を明らかにした。なお、本解析法による数値計算結果を既報の数値計算結果と比較照合したところ、両者は一致し、本解析の妥当性が立証された。

文 献

- (1) Kana, D. D., *Trans. ASME, Ser. B*, 89-4 (1967), 839.
- (2) Dao, N. V., *Proc. Vib. Prob.*, 14-1 (1973), 85.
- (3) Moon, F. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47-3 (1980), 638.
- (4) 小島・ほか3名, 機論, 50-455, C (昭59), 1168.
- (5) 小島・ほか2名, 機論, 52-476, C (昭61), 1198.
- (6) H. Saito and K. Mori, *J. Sound Vib.*, 66-1 (1979), 1.
- (7) 田中・三枝, 振動モデルとシミュレーション, (昭59), 255, 応用技術出版.