片当たり接触した歯車対の三次元有限要素法による解析*

石川 晴 雄^{*1}, 小 島 之 夫^{*2}Three-Dimensional Finite Element Analysis
of a Gear Pair under Partial Contact

Haruo ISHIKAWA and Yukio KOJIMA

A new method is proposed to estimate the distribution of tooth root stress of a gear pair under partial and nonuniform contact by a three-dimensional finite element method. In the method, the usual finite element program can be used with no special changes. To check the accuracy of the present method, a contact problem of two circular disks is analyzed. Numerical results are obtained with good accuracy, comparing with the results by Hertz theory. A pair of spur gears with lead error which gives partial contact is analyzed by the present method, and the distributions of tooth root stress and tooth deflection are obtained. The results are compared with those given by the draft proposal of ISO and by the standard of AGMA.

Key Words: Gear, Tooth Root Stress, FEM, Contact Problem

1. 緒 言

歯車の片当りは歯車の設計や製作の段階では、本来存在しないようにすべきものである。しかし、かみあい状態にある実際の歯車を観察、検討すると、歯車それ自体や歯車箱の工作精度、軸受穴の平行誤差、歯車や軸、および軸受のたわみ、歯車箱の据付け状態、運転中の熱変形などの原因により、片当たりがみとめられることが多い。また、片当たりによって起こる歯すじ方向の荷重分布の不均一性が歯車の各種の損傷の原因のかなりの割合を占めていることも報告されている⁽¹⁾。これに対して、日本機械学会などの設計規格では、歯車の曲げ強さや歯面強さに対して、片当たりによって生ずる局部的荷重増加を計算する式を与えとともに、設計段階で片当たりの影響を考慮するために、荷重分布係数を導入している。しかし、これらの設計規格は必ずしも接触状態下にある歯車対の比較的详细な三次元応力解析に基づいているわけではない。

一方、歯車のように形状が単純でない場合も含めて弾性物体の応力解析を比較的容易に行う方法のひとつ

として有限要素法がある。有限要素法を用いて歯車の弾性解析を行った研究^{(2)~(8)}は数多くあるが、これらは二次元解析の場合がほとんどである。片当たりをした歯車のかみあいの場合には三次元解析を行う必要があるが、有限要素法によって弾性体を三次元解析して精度のよい解を得ようとする場合には計算機の容量としてはかなり大きなものが必要になる。かみあっている歯車対を接触問題として同時に三次元解析しようとするればさらに大きな計算機容量が必要となり、實際上計算が不可能になる場合もある。

また、弾性体と弾性体の接触を有限要素法を用いて解析する方法としてはすでに多くの方法^{(7)~(14)}が提案されているが、これらの研究では接触問題を有限要素法で解析するための特別の工夫(荷重の増分化、剛性方程式の変形、接合要素の導入やユニット分割化など)を行っている。そこで、本研究ではこのような特別な工夫を行うことなく、通常の弾性問題解析用有限要素法のプログラムを変更せずに弾性接触問題の解析が可能であり、なおかつ三次元解析する際必要とする計算機容量をなるべく少なくするために、かみあっている歯車対を同時には有限要素法解析せずに、すなわち、片方の歯ずつ順次有限要素解析し、しかも接触状態を考慮した境界条件の下での弾性解析結果を得る新たな

* 昭和63年3月31日 第65期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年10月22日。

^{*1} 正員、電気通信大学 (〒182 調布市調布が丘1-5-1)。

^{*2} 正員、名古屋工業大学 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

方法を提案する。

この方法では片当たりによる接触域の大きさをあらかじめ仮定して歯元応力などを計算するが、これは実際の歯車の片当たり現象が歯車に塗った塗料のかみあい時における相手歯車への付着によって観察、評価されることも多いからである。

本研究で提案した方法を用いて、歯すじ誤差を持つインポリュート平歯車が片当たりをしてかみあっている状態での歯元応力と歯のたわみを計算した。また、これに対する歯すじ誤差の影響について検討するとともに、ISO（国際標準化機構）およびAGMA（アメリカ歯車工業会）の規格から求まる値との比較検討を行った。

本研究で提案した方法は弾性体の接触問題を解析する一般的な方法なので、単に平歯車のかみあいの場合だけではなく、はすば歯車など他の歯車の三次元的なかみあい状態の解析に適用可能であり、歯元応力、歯のたわみおよび接触域内の応力分布などを求めることが可能な方法である。

2. 解析方法

2個の三次元弾性体 A, B の接触問題を有限要素法により解析するにあたり、次の仮定を設ける。

- (1) 接触面間のすべりは考えない。
- (2) 接触面は滑らかな連続面である。
- (3) 接触は節点間でおきる。

このような仮定の下で、本解析方法においてはまず接触領域の大きさを設定し、その接触領域内に弾性体 A, B のそれぞれについて n 個の節点があるものとする。簡単のために二次元で、左右対称な問題（例えば後述の図 2 の問題）の場合について示したのが図 1 である。 n 個の節点のうち、最初に接触する節点を節点 1 とし、節点 n を接触域の端点とするものとする。一般の三次元物体の接触の場合は接触域端点は複数の節点で表されることになるが、本研究で扱う片当たり接触の場合は、後述のように線接触を仮定するので、図 1 と同じく、接触域端点はひとつの節点になる。接触域内の各節点の接触変形後の位置は、最初に接触する節点を基準にとると次のように表される（図 1 の下図参照）。

$$\left. \begin{aligned} X_i^M + u_{ix}^M &= X_1^M + u_{1x}^M + \alpha_i \\ Y_i^M + u_{iy}^M &= Y_1^M + u_{1y}^M + \beta_i \\ Z_i^M + u_{iz}^M &= Z_1^M + u_{1z}^M + \gamma_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

($i=2, \dots, n$)

ここで (X_i, Y_i, Z_i) , (u_{ix}, u_{iy}, u_{iz}) はそれぞれ各節点 i の座標と変位である。上付きの添字 M は $M=A$ ま

たは B で、 $M=A$ は弾性体 A, $M=B$ は弾性体 B に関する量であることを示す。また、接触域内の各節点では、物体 A 側と B 側とで荷重が釣り合っているので、

$$P_{if}^A = -P_{if}^B = \bar{P}_{if} \dots\dots\dots (2)$$

($f=X, Y, Z$), ($i=1, \dots, n-1$)

前述のように節点 n は接触域の端点としたが、この条件を満たすために、本研究では節点 n における接触力を零とおくものとする。すなわち、

$$P_{nX}^M = P_{nY}^M = P_{nZ}^M = 0 \dots\dots\dots (3)$$

一方、接触域内の節点に関する荷重と変位の関係をコンプライアンス係数 C_{ijkl} で表すと、

$$\{u_{jl}^M\} = [C_{ijk}^M] \{P_{ik}^M\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで P_{ik}^M は節点 i の k 方向荷重を、 u_{jl}^M は節点 j の l 方向変位である。ただし、 $i, j=1 \sim n, k, l=X, Y, Z$ 。 C_{ijkl} は P_{ik} に単位荷重を与えることより、有限要素法の計算結果から求めることができる。式(4)に節点 n が接触域端点である条件 [式(3)]を導入すると、

$$\begin{Bmatrix} u_{1X}^M \\ u_{1Y}^M \\ u_{1Z}^M \\ \vdots \\ u_{nX}^M \\ u_{nY}^M \\ u_{nZ}^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11X}^M & \cdots & C_{n1X}^M \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1nX}^M & \cdots & C_{nnX}^M \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{1X}^M \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{n-1Z}^M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

さらに、式(1)および式(2)を式(5)に代入して整理すると、

$$\{X\} = [C] \{P\} \dots\dots\dots (6)$$

$$\{X\}^T = [\bar{X}^A \bar{Y}^A \bar{Z}^A \bar{X}^B \bar{Y}^B \bar{Z}^B] \dots\dots\dots (7)$$

($j=2, \dots, n$)

$$\bar{X}_j^M = X_1^M - X_j^M, \bar{Y}_j^M = Y_1^M - Y_j^M, \bar{Z}_j^M = Z_1^M - Z_j^M \dots\dots\dots (8)$$

ここで、添字の T は行列の転置を示す。

$$[C] = \begin{bmatrix} \bar{C}^A & \bar{C}_0 \\ \bar{C}^B & \bar{C}_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

$$\bar{C}^M = \begin{bmatrix} C_{ijmX}^M - C_{i1mX}^M \\ C_{ijmY}^M - C_{i1mY}^M \\ C_{ijmZ}^M - C_{i1mZ}^M \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

($m=X, Y, Z$)
($i=1, \dots, n-1$)
($j=2, \dots, n$)

$$\bar{C}_0 = [d_{kl}] \dots\dots\dots (11)$$

$k=l$ のとき $d_{kl} = -1$, $k \neq l$ のとき $d_{kl} = 0$
 $[k, l=1, \dots, 3(n-1)]$

$$\{P\}^T = [\bar{P}_i \delta_i] \dots\dots\dots (12)$$

$$\bar{P}_i = [\bar{P}_{iX} \bar{P}_{iY} \bar{P}_{iZ}], \delta_i = [\alpha_i \beta_i \gamma_i] \dots\dots\dots (13)$$

$$(i=1, \dots, n-1)$$

式(6)の左辺 $\{X\}$ は各節点の座標から求まり、既知量である。右辺の $\{P\}$ のうち $[\bar{P}_{ix}, \bar{P}_{iy}, \bar{P}_{iz}]$ は接触域内の反力である。したがって、式(6)よりコンプライアンスマトリックス $[C]$ が求まれば $\{P\}$ が計算できることになる。

そこで、マトリックス $[C]$ を計算するために与えられた弾性2物体を分離して考え、それぞれを有限要素法で解析するものとする。具体的には、接触域内のそれぞれの節点に k 方向 ($k=X, Y, Z$) 単位荷重を負荷したときの各節点の l 方向 ($l=X, Y, Z$) 変位を有限要素法で解析し、マトリックス $[C]$ の成分 C_{ijkl} を求める。求めた $[C]$ を用いて式(6)より $\{P\}$ を計算すれば、式(13)の接触域内の反力分布 $[P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}]$ が求まる。次にこの反力分布を境界条件として各弾性体 A, B を有限要素解析すれば弾性体 A, B が接触して節点 n までは接触した問題が解けたことになり、最初に仮定した接触域内の応力分布も含めて、各弾性体内の応力および変形の状態が計算できることになる。

以上の計算過程では、有限要素法はコンプライアンスマトリックス $[C]$ の計算と反力分布荷重を各弾性体に作用させた場合の計算に用いられるだけであり、いずれの計算の場合も各弾性体を個別に有限要素解析している。また、その際に使用される有限要素法としては通常の弾性問題解析用のプログラムを用いればよいことになる。ただし、以上の計算では各弾性体について $(3n+1)$ 回の有限要素計算が必要となり、計算時

間が長くなる場合もある。そこで、各単位荷重あるいは反力分布荷重を負荷して有限要素計算を行う場合には荷重の作用する位置とその大きさだけが異なり、他の境界条件および各要素の剛性マトリックスは変わらないことに注目すれば、一度計算した有限要素法の全体剛性マトリックスを保存しておいて繰返し利用するようにプログラムを変更することによって計算に要する時間をかなり短縮できることになる。本研究でもこのようなプログラムの改良を行っている。

3. 解析例

今回、新たに提案した方法により片当たり接触した平歯車対の三次元有限要素解析を行うまえに、この方法の解析精度について検討する。そのために半径の異なる弾性2円板の二次元接触問題を数値解析し、ヘルツの接触理論による解⁽¹⁵⁾と比較検討した。なお、用いた有限要素法の要素は8節点アイソパラメトリック要素である。また数値計算は平面ひずみの条件で行い、ポアソン比は0.3とした。

3.1 弾性2円板の接触問題 図2の図中に示すように、半径 $R_1=200$ mm, $R_2=500$ mm の2円板 A, B が接触する場合について解析を行った。円板 A, B のヤング率 E_A, E_B は $E_A=E_B=206$ GPa と $E_A=68.6$ GPa, $E_B=206$ GPa の2組の場合について計算した。また問題の対称性より右側半分を解析対象とし、その要素数と節点数は両方の円板とも79と284である。図2より本解析法による結果はヘルツの解⁽¹⁵⁾とほぼ接

図1 接触による変形

図2 弾性2円板の接触問題

表1 解析対象平歯車

	Pinion	Gear
Number of teeth	27	34
Module (mm)	3	
Addendum modification coefficient	0	
Pressure angle	20°	
Diameter of pitch circle (mm)	81	102
Face width (mm)	20	

表2 歯すじ方向誤差

Grade	Lead error (μ m)
0	7.56
2	9.60
4	15.0
6	24.0
8	37.8

触域全域にわたってよく一致していて、本論文の方法により弾性体と弾性体の接触問題を高い精度で解析できることがわかる。なお、図2中の L は接触節点数である。

3・2 片当たりした平歯車対の解析 片当たりしながらかみあった1組の平歯車の歯元の応力分布を主に求めるために、表1に示すような諸元の平歯車を解析対象に選んだ。この歯車がかみあって一歯かみあいから二歯かみあいに移る点で接触している状態を解析するものとする。すなわち、歯数34の歯車の外側の最悪荷重点と歯数27の歯車の内側の最悪荷重点とで接触している状態を解析する。また、片当たりの原因としては歯すじ方向誤差を考え、JIS規格⁽¹⁶⁾に基づいて歯すじ方向誤差の許容値 s (表2)を求めた。実際の計算は、前述したような最悪荷重点を通り、歯すじ方向へむく線接触の状態を仮定し、図3に示すように許容値 s の誤差をかみあいの誤差として、次の2種類について行った。

(1) 表2に示す各等級(0級から8級までの5段階)で、歯幅全体で接触する場合。

(2) 表2の等級2で、接触幅を7.5, 10, 12.5, 15, 17.5, 20 mmに変えた場合。

許容値 s の誤差をかみあいの誤差として与えて計算するので、3・1節で述べた接触節点での荷重の釣合いの式(2)は s による歯の傾きを考慮した式に変形して用いるものとする。

歯元の応力としては、図4に示すような接線方向応力 σ_t を求めるものとする。と、 σ_t は次式で与えられる。

$$\sigma_t = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_z \sin^2 \theta + \tau_{yz} \sin 2\theta \quad \cdots \cdots (14)$$

y, z は図4、あるいは後述の図5に示す座標軸方向、 θ は歯元の歯形曲線の接線方向である。今回の解析に用いた要素は20節点アイソパラメトリック要素なので、歯元の表面にある要素の歯元に露出した面内の点(σ_t を求める点)の(y, z)座標は無次元座標 ξ ($-1 \leq \xi \leq 1$)を用いると次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} y(\xi) &= \phi_1(\xi)y_1 + \phi_2(\xi)y_2 + \phi_3(\xi)y_3 \\ z(\xi) &= \phi_1(\xi)z_1 + \phi_2(\xi)z_2 + \phi_3(\xi)z_3 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (15)$$

ただし、 ϕ_i ($i=1, 2, 3$)は形状関数で

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \xi(\xi-1)/2 \\ \phi_2(\xi) &= (1-\xi)(1+\xi) \\ \phi_3(\xi) &= \xi(\xi+1)/2 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots (16)$$

(y_i, z_i)($i=1, 2, 3$)は要素の節点 G_i の座標(図4参照)である。式(15)を用いると歯形曲線の接線方向 θ は

$$\tan \theta = (dz/d\xi)/(dy/d\xi)$$

から求まることになる。歯元の応力を求めた点の数は

歯元付近の4要素で、各要素について5点の合計20点[Q_i ($i=1, \dots, 20$)]であり、これらの点での θ 方向応力 σ_t の歯すじ方向分布を求めた。

要素分割は歯すじ方向に4層に分割し、各層の分割は表面層の分割と同一である。表面層の分割図の例(歯数34の場合)を図5に示す。全要素数は歯数27と歯数34のそれぞれについて100である。節点の拘束条件は歯の底面(図5のABCD面)の全節点の Z 方向変位を拘束した。また底面の中心線EF上の節点については Y 方向も拘束し、GH上の節点については X 方向も拘束した。また、今回用いた有限要素法の剛性方程式の解法はスカイライン法である。

3・3 歯元応力分布などの計算結果 3・2節までの方法により計算した歯元応力の三次元的分布の一例(等級2, 歯数34, 接触幅20 mmの場合)を図6に示す。図6は前述したような歯元の20点 Q_i での接線方向応力の歯すじ方向分布を示したものであるが、このうち図7に示すような7点 q_i ($i=1, \dots, 7$)について応力の歯すじ方向分布を示したのが図8(a)である。図8(a)のような応力分布を3・2節で述べたすべての条件について求めたが、そのうちの代表的な場合について示したのが、図8(a)~(c)である。これらの図より、片当たりによって応力分布が歯すじ方向に大きく変化することがわかる。また、いずれの条件の場合も最大の接線方向応力を生ずるのは歯の側表面(図5で要素分割を示した面)より若干内側で、歯形曲線上では q_5 (図7参照)の点であった。側表面近傍で応力値が小さくなるのは自由表面に近くなるからである。

また q_5 の点における応力分布を各等級(接触幅20 mm)について示したのが図9である。図9より応力の最大値と最小値の差は等級数が大きくなるほど大きいことがわかる。また、最大応力を示す q_5 の点は図7に示すように30°接線法から求まる危険断面位置とほぼ一致している。

次に歯のたわみの計算結果について述べる。歯のたわみの三次元的な分布図の一例として図6と同じ条件

図3 かみあいの誤差

図4 歯元応力

の場合について示したのが図 10 である。また、等級 2 で接触域の大きさを変えた場合について歯数 34 の歯のかみあい側の歯先点のたわみの歯すじ方向分布を示したのが図 11 である。図 11 より接触域内ではたわみは直線的に変化していることがわかる。

4. 歯元応力の ISO 規格案,

AGMA 規格との比較

3 章までの歯元応力に関する計算の結果を ISO 規格案, AGMA 規格⁽¹⁾より求まる結果と比較検討した。ISO 規格案では歯元応力の計算方法に A, B, C の 3 方法があるが、このうちの B 法⁽¹⁷⁾と AGMA 規格⁽¹⁾は歯の接触位置、すなわち歯に対する荷重の作用点として本研究での場合と同じ最悪荷重点を想定しているので、本章での比較検討に用いるものとする。

ISO 規格案 B 法では片当たりがある場合の歯元応力 σ_F を次式で与えている⁽¹⁷⁾。

$$\sigma_F = \sigma_{FO-B} K_{FB} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで σ_{FO-B} は片当たりがない場合の歯元応力, K_{FB}

は歯すじ方向荷重分布係数であり、歯幅、歯幅のうち荷重を伝える部分の長さ、および歯丈の長さで決まる値である。また式(17)では動荷重係数などの他の係数はすべて 1 としている。 σ_{FO-B} は式(18)で与えられている。

$$\sigma_{FO-B} = (F_t / b m_n) Y_F Y_S \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 F_t は接線方向荷重、 b は歯幅、 m_n はモジュール、 Y_F は最悪荷重点に荷重がかかった場合の歯形係数、 Y_S は応力修正係数である。 Y_F 、 Y_S はモジュール、荷重の方向角、ピッチ点における圧力角、および危険断面の決定に 30° 接線法を用いた場合の危険断面歯厚、危険断面までの高さ、すみ肉部の曲率半径によって決まる値である。

一方 AGMA 規格では片当たりがある場合の歯元応力 σ_t を次式で表している。

$$\sigma_t = (W_t / b m_n) K_m / J \quad \dots\dots\dots (19)$$

W_t は接線方向荷重、 K_m は歯すじ方向の荷重分布係

図 5 要素分割 (歯数 34 の場合)

図 6 歯元応力の三次元分布 (歯数 34, 等級 2, 接触幅 20 mm)

図 7 歯元応力を求める点

(a) 歯数 34, 等級 2, 接触幅 20 mm の場合

(b) 歯数 34, 等級 8, 接触幅 20 mm の場合

(c) 歯数 34, 等級 2, 接触幅 10 mm の場合

図 8 歯元応力の歯すじ方向分布

数, J は幾何係数である。式(19)においても動荷重係数などの他の係数はすべて1としている。 K_m は歯幅と歯幅のうち荷重を伝える部分の長さの比で決まる。 J はモジュール, 荷重の方向角, 圧力角, ドーラン・プロガーマの応力集中係数および危険断面の決定に放物線内接法を用いた場合の危険断面歯厚, 危険断面までの高さ, すみ肉部の曲率半径によって決まる値である。

式(17), (19)を用いて, 今回解析対象とした歯車対のうち外側の最悪荷重点で荷重を受ける歯数34の歯の歯元応力を計算した結果を表3に示す。表3には本研究の方法で求めた歯元応力の最大値も示した。接触幅が20 mmの場合には本研究の結果はISO規格案の約94%, AGMA規格の約92%であり, かなり近い値になっている。接触幅が小さくなるとISO規格案の約79~85%, AGMA規格の約62~80%となった。これらの結果より, 今回の有限要素法による結果は各規格による結果より本研究の範囲内では低めの値を与えることがわかる。本研究の結果と各規格からの結果との間に生じた差の原因については, 有限要素法の要素分割(特に歯すじ方向の分割), 拘束条件, 各規格において仮定した接触域内の接触荷重の分布形, 危険断面の決め方など多くの要因が考えられる。これらの要因が結果にどのような影響を与えるかについては, 他の歯車対の場合や歯元応力の実験的実測も含めて今後の検討課題としたい。

表3 歯元応力の比較

Grade	Contact width (mm)	Present results (MN/m ²)	ISO (MN/m ²)	AGMA (MN/m ²)
0	20.0	96.5	102.7	105.1
2	20.0	122.6	130.3	133.5
2	17.5	101.2	119.5	127.3
2	15.0	90.5	109.5	122.5
2	12.5	71.5	91.0	107.6
2	10.0	65.5	78.7	99.7
2	7.5	50.6	58.9	81.5
4	20.0	191.2	203.6	208.5
6	20.0	306.3	325.9	333.7
8	20.0	482.2	513.1	525.5

図10 歯のたわみの三次元分布

図9 歯元応力の最大値の歯すじ方向分布(歯数34, 接触幅20 mm)

図11 歯のたわみの歯すじ方向分布(歯数34, 等級2)

5. 結 言

片当たり接触した歯車対を三次元有限要素法により弾性解析するための効率的な方法を提案した。この方法の解析精度について検討するために2円板の接触問題を例題として解析し、ヘルツの解と比較したところ高い精度で接触応力が求まることがわかった。そこで、具体的な平歯車対に対してさまざまな片当たり状態を与え、歯元応力の歯のたわみの三次元分布を求めた。そのうち最大の歯元応力についてはISO規格案およびAGMA規格から求まる結果と比較して本論文の方法が有効であることを確認し、片当たり現象に対するさまざまな因子の影響について今後詳細に検討するための道を拓くことができた。

終わりに本研究に対してご助言をいただいた電気通信大学 成瀬長太郎教授ならびに数値計算に協力してくれた電気通信大学卒研究生 田島正夫、竹岡修史の両君に感謝の意を評します。なお数値計算には東京大学大型計算機センター M 680 H を利用した。

文 献

- (1) 歯車強さ設計資料, (昭54), 日本機械学会.
- (2) 戸部・加藤・井上, 機論, 39-327 (昭48), 3473.
- (3) 日高・ほか3名, 機論, 43-368 (昭52), 1510.
- (4) 戸部, 機械の研究, 29-7 (昭52), 837.
- (5) 小田・ほか2名, 機論, 46-411, C (昭55), 1432.
- (6) 鄭・ほか4名, 機論, 48-432, C (昭57), 1217.
- (7) 田中・小比田, 機論, 51-461, C (昭60), 133.
- (8) 田中・小比田・山田, 機論, 51-468, C (昭60), 2049.
- (9) 山田・横内・笹岡, マトリックス法による接触問題の解析, 日本鋼構造協会第3回大会, マトリックス構造解析講演論文集, (昭44), 412.
- (10) 大手, 有限要素法による弾性接触応力の解析, 機論, 38-313 (昭47), 2210.
- (11) 薦・山地, 機誌, 76-651 (昭48), 348.
- (12) 山田・江澤, 機講論, No. 790-3 (昭54), 51.
- (13) 岡本, 機論, 43-374 (昭52), 3716.
- (14) 矢川・ほか2名, 機論, 46-411, A (昭55), 1220.
- (15) 中原, 材料力学(下), (昭44), 116, 養賢堂.
- (16) 日本機械学会編, 機械工学便覧(改訂第6版), 7(機械の要素), (昭50), 116.
- (17) ISO/TC 60-GEARS, SECOND DRAFT PROPOSAL ISO/DP 6336/111 (1983).