非対称弾性支持した非対称回転軸の振動に関する研究*
(主に二次高調波共振について)近藤 泰 郎*¹, 木 村 広 幸*¹Study on the Vibration of an Asymmetric Rotating Shaft Supported
by Asymmetrically Elastic Pedestals
(Mainly on the 2nd Higher Harmonic Resonances)

Yasuo KONDO and Hiroyuki KIMURA

To clarify the vibration characteristics of an elastic rotating shaft system, we should take into consideration both the elastic asymmetry of the shaft and the asymmetric elasticity of the supports. Analyses were made using the asymptotic method, and then were numerically calculated by the Newton-Raphson's method. In this report, we discuss mainly the 2nd higher harmonic response of the system. As a result of the analyses, it was confirmed that some obtained phenomena were different from those of the main resonances.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Numerical Analysis, Higher Harmonic Resonance, Asymptotic Method, Forced Vibration

1. ま え が き

非対称な曲げ剛性を有する弾性軸を非対称弾性支持した回転軸系の振動問題については、著者らの研究^{(1)~(4)}のほかにも多くの報告^{(5)~(10)}があり、相当詳しく解析されている。しかしながら、これらの研究は自由振動に対する不安定領域に関するものが多く、強制振動における主共振、高調波共振等の振幅応答を詳細に解析した報告は少ないようである。

前報までにおいて著者らは、軸断面の慣性主軸に相当する直角な2方向において異なった曲げ剛性を有する偏平軸の中央に円板を取付けた Jefcott ロータを両端において直角な2方向に弾性支持し、その支持部質量を考慮するモデルを考えてきた。解析方法は、非線形振動の近似解法の一つである Bogoliubov - Mitropolsky の漸近法⁽¹¹⁾を用い、これまでに不安定領域のみならず主共振応答に対する不釣合角度 β 、軸切断角度 α 、外部減衰 δ の影響などについて詳細に報告した。

本論文は、系の固有振動数 Ω_i に対して Ω_i/n (n は整

数)の振動数で共振する高調波共振について、既報同様漸近法を適用して解析し、Newton-Raphson 法により数値計算を行い、実振幅応答曲線を求めた結果について考察したものである。高調波共振は、主共振以前に発生するものであるから、実用回転機械の振動解析において不可欠の現象であり、その実振幅応答を理論的に示すことは重要である。なお、前述の n が大きい高次の高調波共振振幅は、順次低くなると考えられるから、本論文においては、最も重要な $n=2$ の場合のみを取扱った。

その結果、高調波共振時には、主共振と異なり、共振振幅を最低にするような適当な支持部剛性比が存在することなど興味深い知見が得られたので報告する。また、高調波共振時の位相応答および振れ回り状態についても解析したが、本論文では主に振幅応答について述べる。

2. 運動方程式と解析法

図1のような系について考える。非対称弾性軸(偏平軸)の中央部に円板が取付けられており、両端を弾性軸受台で支持する。ただし、両軸受台の質量、ばね、ダンパは等しく支持条件は同一であり、ジャイロモーメントは働かないものとする。軸の質量は Rayleigh

* 昭和63年3月17日 九州支部第41期総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年6月30日。

*¹ 正員、相模工業大学(〒251 藤沢市辻堂西海岸1-1-25)。

図 1 モデル図

法により円板質量に加え，集中質量系とした。

用いる記号は次のとおりである。

O- $\xi\eta s$ ：回転座標系（円板部）

O- $\xi_0\eta_0s_0$ ：回転座標系（支持部）

O- xyz ：固定座標系（円板部）

O- $x_0y_0z_0$ ：固定座標系（支持部）

M ：円板質量（軸の等価質量を含む）

$m/2$ ：支持部質量

l ：軸スパン

d ：軸径（切断前）

c ：円板部外部粘性減衰係数

c_0 ：支持部外部粘性減衰係数

h ：軸内部粘性減衰係数

h_0 ：支持部内部粘性減衰係数

k_1 ：非対称軸の弱い方向の曲げ剛性

k_2 ：非対称軸の強い方向の曲げ剛性

$K_1/2$ ：支持部垂直方向の剛性（ x 方向）

$K_2/2$ ：支持部水平方向の剛性（ y 方向）

ε ：偏心量

α ：軸切断角度

β ：不釣合角度

C ：軸静たわみ

g ：重力加速度

$\mu = m/M$

δ ：円板部外部減衰 $= c/M$

δ_0 ：支持部外部減衰 $= c_0/M$

λ ：軸内部減衰 $= h/M$

λ_0 ：支持部内部減衰 $= h_0/M$

$\omega_1^2 = k_1/M$, $\omega_2^2 = k_2/M$

$\omega_x^2 = K_1/M$, $\omega_y^2 = K_2/M$

$\Omega^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2)/2$

K_2/K_1 ：支持部剛性比

$p = (\omega_2^2 - \omega_1^2)/(\omega_2^2 + \omega_1^2)$, 軸非対称度

$p\gamma = \delta$, $p\gamma_0 = \delta_0$

$p\nu = \lambda$, $p\nu_0 = \lambda_0$

$pE = \varepsilon\omega^2$, $pG = (g - C\Omega^2)$

$\gamma G_0 = g$

X ： $x(=q_1)$ 方向振幅

Y ： $y(=q_2)$ 方向振幅

X_0 ： $x_0(=q_3)$ 方向振幅

Y_0 ： $y_0(=q_4)$ 方向振幅

ω ：軸回転角速度（一定）

$\varphi_1^{(l)}, \dots, \varphi_4^{(l)}$ ：基準関数（ $l = \text{I, II, III, IV}$ ）

Ω_l ：固有振動数

$F_l = (\Omega^2 - \Omega_l^2)/\Omega^2$

$M_l = \varphi_1^{(l)}\varphi_1^{(l)} + \varphi_2^{(l)}\varphi_2^{(l)} + \varphi_3^{(l)}\varphi_3^{(l)}$
 $+ \mu\varphi_3^{(l)}\varphi_3^{(l)} + \varphi_4^{(l)}\varphi_4^{(l)} + \mu\varphi_4^{(l)}\varphi_4^{(l)}$

$K_l = \Omega^2\varphi_1^{(l)}\varphi_1^{(l)} - \Omega^2\varphi_1^{(l)}\varphi_3^{(l)}$
 $+ \Omega^2\varphi_2^{(l)}\varphi_2^{(l)} - \Omega^2\varphi_2^{(l)}\varphi_4^{(l)}$

$+ \omega_x^2\varphi_3^{(l)}\varphi_3^{(l)} + \omega_y^2\varphi_4^{(l)}\varphi_4^{(l)}$

$R_l = \varphi_1^{(l)}\varphi_1^{(l)} - \varphi_1^{(l)}\varphi_3^{(l)} - \varphi_2^{(l)}\varphi_2^{(l)}$
 $+ \varphi_2^{(l)}\varphi_4^{(l)}$

$S_l = 2\varphi_1^{(l)}\varphi_2^{(l)} - \varphi_1^{(l)}\varphi_4^{(l)} - \varphi_2^{(l)}\varphi_3^{(l)}$

$T_l = \varphi_1^{(l)} + \varphi_3^{(l)}$

$U_l = \varphi_2^{(l)} + \varphi_4^{(l)}$

$V_l = (\gamma + \nu)\varphi_1^{(l)}\varphi_1^{(l)} + (\gamma + \nu)\varphi_2^{(l)}\varphi_2^{(l)}$
 $+ 2(\gamma_0 + \nu_0)\varphi_3^{(l)}\varphi_3^{(l)} + 2(\gamma_0 + \nu_0)\varphi_4^{(l)}\varphi_4^{(l)}$
 $+ (\gamma - \nu)\varphi_1^{(l)}\varphi_3^{(l)} + (\gamma - \nu)\varphi_2^{(l)}\varphi_4^{(l)}$

この系の運動方程式は，式(1)のようになり，さらに一般座標で表示すると式(2)になる。式(2)について漸近法を用いるが，本論文で取扱うのは，二次高調波共振近傍の振幅応答であり，この場合の第一近似解は，既報⁽²⁾で示したように表せる〔式(3)〕。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \Omega^2 x - \Omega^2 x_0 &= p\{\Omega^2 x \cos 2\omega t + \Omega^2 y \sin 2\omega t - \Omega^2 x_0 \cos 2\omega t - \Omega^2 y_0 \sin 2\omega t - (\gamma + \nu)\dot{x} - \nu\omega y \\ &+ \nu(\dot{x}_0 + \omega y_0) + C\Omega^2 \cos 2\omega t + E \cos(\omega t + \beta) + G\} = pQ_{(F)1} \\ \ddot{y} + \Omega^2 y - \Omega^2 y_0 &= p\{-\Omega^2 y \cos 2\omega t - \Omega^2 x_0 \sin 2\omega t + \Omega^2 y_0 \cos 2\omega t + \Omega^2 x \sin 2\omega t - (\gamma + \nu)\dot{y} + \nu\omega x \\ &+ \nu(\dot{y}_0 - \omega x_0) + C\Omega^2 \sin 2\omega t + E \sin(\omega t + \beta) + C\nu\omega\} = pQ_{(F)2} \\ \mu\ddot{x}_0 + \omega_x^2 x_0 + \ddot{x} &= p\{-2(\gamma_0 + \nu_0)\dot{x}_0 - \gamma\dot{x} + E \cos(\omega t + \beta) + G_0\} = pQ_{(F)3} \\ \mu\ddot{y}_0 + \omega_y^2 y_0 + \ddot{y} &= p\{-2(\gamma_0 + \nu_0)\dot{y}_0 - \gamma\dot{y} + E \sin(\omega t + \beta)\} = pQ_{(F)4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum_{s=1}^4 \{a_{rs} \ddot{q}_s + b_{rs} \dot{q}_s\} = p Q_{(F)r}(q_1, \dots, q_4, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_4) \quad (r=1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

第一近似解を得るために必要な $A_l(a, \vartheta)$, $B_l(a, \vartheta)$ の特殊解を求め, da/dt , $d\vartheta/dt$ を整理すると式(4)⁽²⁾のようになる. 式(4)を $da/dt=0$, $d\vartheta/dt=0$ として両式より ϑ を消去すると $\omega \cong \Omega_l/2$ における振幅 ($\varphi_s^{(l)}a$)-振動数 (ω) 曲線が求まる.

ここで ϑ は, 外力と応答との位相ずれである.

$$\left. \begin{aligned} q_s &= \varphi_s^{(l)} a \cos(2\omega t + \vartheta) \\ da/dt &= p A_l(a, \vartheta) \\ d\vartheta/dt &= \omega_l - 2\omega + p B_l(a, \vartheta) \\ (s=1 \sim 4, l=I \sim IV) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

この非線形連立方程式の解法に当たっては, a および ϑ が微分可能であることから, Newton-Raphson 法を適用することとし, 数値解析した.

3. 解析結果とその考察

3.1 外部減衰の影響 解析には, 前報までの実験結果と比較できるように $l=605.4$ mm, $M=5.850$ kg, $d=20$ mm, $m=2.641$ kg, $C=0.1657$ mm, $\beta=45^\circ$, $\alpha=30^\circ$ の値を用いた. 支持部の剛性は, $K_1=1.465 \times 10^3$ kN/m, $K_2=0.1619 \times 10^3$ kN/m であるから, その剛性比は 0.110 となる.

図2の(a)~(d)は, 一~四次の主共振に対応する各高調波共振において, 内部減衰 $\lambda=0$, 円板部外部減衰 δ を $6(\text{s}^{-1})$ 一定として, 支持部外部減衰 δ_0 を $6 \sim 30 (\text{s}^{-1})$ まで変化させた場合の振幅応答曲線である. 前報までの振幅には偏心量 ε によって無次元化した相対振幅を採用し, その応答曲線に一般性を持たせていたが, 本論文において述べる高調波共振の ε の影響は極端に小さいことから, 振幅は実振幅で表示した.

図2 外部減衰の影響

$$\begin{aligned}
 da/dt = & p \left[-\{ (C\Omega^2 \phi_1^{(l)}) / M_l (\omega_l + 2\omega) \} \cos \vartheta - \{ C\Omega^2 \phi_1^{(l)} / M_l (\omega_l + 2\omega) \} \sin \vartheta \right. \\
 & - \{ 8E \{ (\omega_l - 2\omega) + 8\omega_l \} / 3\pi M_l \{ 4\omega_l + (\omega_l - 2\omega) \} \{ 4\omega_l - (\omega_l - 2\omega) \} \} T_l \cos(\vartheta/2 - \beta) \\
 & + \{ 8E \{ (\omega_l - 2\omega) + 8\omega_l \} / 3\pi M_l \{ 4\omega_l + (\omega_l - 2\omega) \} \{ 4\omega_l - (\omega_l - 2\omega) \} \} U_l \sin(\vartheta/2 - \beta) - a V_l / 2M_l \} \\
 d\vartheta/dt = & \omega_l - 2\omega + p \left[-\{ (C\Omega^2 \phi_1^{(l)}) / M_l a (\omega_l + 2\omega) \} \cos \vartheta + \{ C\Omega^2 \phi_1^{(l)} / M_l a (\omega_l + 2\omega) \} \sin \vartheta \right. \\
 & + \{ 16E \{ (\omega_l - 2\omega) + 2\omega_l \} / 3\pi M_l a \{ 4\omega_l + (\omega_l - 2\omega) \} \{ 4\omega_l - (\omega_l - 2\omega) \} \} U_l \cos(\vartheta/2 - \beta) \\
 & + \{ 16E \{ (\omega_l - 2\omega) + 2\omega_l \} / 3\pi M_l a \{ 4\omega_l + (\omega_l - 2\omega) \} \{ 4\omega_l - (\omega_l - 2\omega) \} \} T_l \sin(\vartheta/2 - \beta) \} \\
 & (l = \text{I, II, III, IV})
 \end{aligned} \quad \dots (4)$$

外部減衰値 $\delta = \delta_0 = 6(\text{s}^{-1})$ は、主に空気抵抗によるものや支持部ベアリングによるもの等であり、図中に付記した $\delta_0 = 12 \sim 30(\text{s}^{-1})$ の値は、共振時の振幅を減少させることを意図して支持部の外部減衰値を増加した場合を示している。

図中(a)は、一次の主共振点 Ω_1 の共振振動数の $1/2$ で発生し、支持部剛性の弱い水平方向に対応する高調波共振点である。一方(b)は、二次の主共振 Ω_1 に対応して支持部剛性の強い垂直方向の振幅応答を示している。両者とも、わずかの減衰により、不安定領域は存在しなくなるが、高調波共振時の共振振幅は無視できるほどには小さくなく、実際の回転機械運転上からも有害であることがわかる。特に $1/2 \Omega_1$ の共振時においては、支持部減衰値を増しても、振幅を抑制する効果が

少なく危険である。

図中(c), (d)は主共振 Ω_{II}, Ω_{IV} に対応する高調波共振 $1/2\Omega_{II}, 1/2\Omega_{IV}$ であり、円板部に比較して、支持部が逆向きに大きく振動するモードとなっている。しかしながら、 $1/2\Omega_{II}, 1/2\Omega_{IV}$ においては、主共振の三、四次共振点と同様⁽⁴⁾に、支持部減衰の影響が顕著であり、支持部に減衰を付加することにより、支持部・円板部ともに共振振幅を減少させることができる。

図3(a), (b)は、支持部垂直方向の剛性を $1.465 \times 10^3 \text{ kN/m}$ 一定とし、水平方向の剛性との比を $0.01 \sim 1.0$ の範囲で変化させた場合の $1/2\Omega_1$ および $1/2\Omega_{II}$ 高調波共振時の共振振幅を外部減衰値 δ_0 をパラメータとして表示したものである。 δ_0 は図2同様 $6 \sim 30(\text{s}^{-1})$ としたが、特殊な場合として減衰の小さな

(a) $\Omega_1, 1/2\Omega_1$

(b) $\Omega_{II}, 1/2\Omega_{II}$

図3 支持部剛性比の影響 (外部減衰を変化させた場合)

(a) $1/2\Omega_1$

(b) $1/2\Omega_{II}$

図4 不釣合角度の影響

(a) $1/2\Omega_{II}$ (b) $1/2\Omega_I$

図5 軸切断角度の影響

$\delta = \delta_0 = 2(\text{s}^{-1})$ の値もプロットした。一次と三次の主共振の値も示した。

図中(a)は $1/2\Omega_{II}$ に対応するものである。支持部においては、水平方向の剛性が弱くなると順次その振幅は増大するのに対し、円板部では逆に減少傾向となり、ある剛性比で共振振幅が最低となった後、大きく増加する特異な傾向となっている。外部減衰の増加によりこの極小値は、左側(剛性比の小さい側)に若干移動するが、全体的な傾向は同一である。

図中(b)は $1/2\Omega_{II}$ に対応するものであり、(a)同様共振時の振幅が最小となるような剛性比が存在することがわかる。特に外部減衰値が小さい場合、この現象は顕著である。

主共振状態においては、このような現象は発生しておらず、 Ω_I については円板部・支持部とも剛性が弱まるとほぼ単調に振幅が減少し、 Ω_{II} においては、逆に単調に振幅が増加するのみである。

また、主共振振幅が、高調波共振の振幅に対して急激な変化をしていることから、図中(a)に見られるごとくある剛性比以下においては、高調波共振時の振幅の方が主共振振幅よりも大きくなり、危険な状態となることがわかった。

3.2 不釣合角度 β と軸切断角度 α の影響 図4は不釣合角度 β が $1/2\Omega_I$ および $1/2\Omega_{II}$ の高調波共振に与える影響について解析した結果である。 $1/2\Omega_I$ において振幅は、 $\beta = 0^\circ$ で最大、 $\beta = 90^\circ$ で最小となるのに対し、 $1/2\Omega_{II}$ においては最大 $\beta = 45^\circ$ 、最小 $\beta = -45^\circ$ となり同傾向とはならない。

また、主共振において、 β を変化させた場合、その共振振幅はそれぞれ異なった傾向を示した⁽²⁾のであるが、高調波共振時には、どの β においても振幅値はさほど変動せず、その影響はきわめて少ないことがわかる。

図5(a), (b)は、支持部剛性比 $K_2/K_1 = 0.110$ とした場合の $1/2\Omega_{II}$ 高調波共振近傍の振幅応答曲線を軸切断角度 α をパラメータとして示したものである。 $1/2\Omega_I$, $1/2\Omega_{II}$ とともに α が大きくなると順次共振点が低振動数側に移動し、その共振振幅が増大する。しかしながら、これらの変化率は $\alpha = 15^\circ$ 以下においてはごく小さい。

軸切断角度 α が大きくなることは、軸の非対称度が増加することであり、主共振点における不安定領域の幅は増大し危険である。高調波共振点においても、 α の増加により共振振幅は相当増大するが、本論文の外部減衰値 $\delta = \delta_0 = 6(\text{s}^{-1})$ では、不安定現象は発生しなかった。

4. ま と め

非対称弾性支持した非対称回転軸の強制振動時における高調波共振の振幅応答について解析した結果、次のことを明らかにすることができた。

(1) 漸近法および Newton-Raphson 法を用いることにより、効率よく、高調波共振時の実振幅応答を求めることができた。

(2) 高調波共振時には、わずかの減衰により不安定領域が消滅する。

(3) 支持部剛性比を変化させても、主共振時のようには、その共振振幅が大きく変動しない。また、高調波共振においては、その振幅を最小にするような剛性比が存在する。

(4) 高調波共振の場合、不釣合角度 β は、振幅応答に対しほとんど影響を与えない。

終わりに、本研究に協力された卒研生の田上伸一・田中雅樹の両君に対して謝意を表す。

文 献

- (1) 沖島・近藤, 機論, 40-338 (昭49), 2832.
- (2) 文献(1)の2843ページ.
- (3) 近藤, 相模工大紀要, 14-1 (昭55), 31.
- (4) 近藤・木村, 相模工大紀要, 20-1 (昭61), 1.
- (5) Taylor, H. D., *J. Appl. Mech.*, 7-6 (1940), A-71.
- (6) Tondl, A., *Some Problems of Rotor dynamics*, (1965), Chapman & Hall.
- (7) 山本・安田, 機論, 38-305 (昭47), 83.
- (8) Iwatsubo, T., ほか2名, *Inge. -Archiv.*, 42 (1973), 416.
- (9) 太田・ほか2名, 機論, 44-380 (昭53), 1225.
- (10) 小寺, 機論, 45-395, C (昭54), 747.
- (11) Bogoliubov, N. and Mitropolsky, J. (益子訳), 非線型振動論, (昭40), 共立出版.

討 論

〔質問〕 大 畑 浩 司

〔(株)安川電機製作所研究所〕

非対称回転軸の振動に関する研究として, 二次高調波共振の振動応答解析をされ, 非常に興味深く拝見させていただいた。そこで以下4点お教え願いたい。

図3(a), (b)において,

(1) 水平方向と垂直方向の剛性比を約2けた近くも変化させているが, このとき, 固有振動数は変化しないのか。もし固有振動数が大幅に変化しているのであれば, どの程度変化しているのか。

(2) 質問(1)において, 固有振動数が大幅に変化しているとすれば, そのとき, 振動モードも変化しているのではないか。

(3) 質問(2)において, 振動モードが変化していないとすれば, なぜ振動振幅に極小値(特異点)をもつ剛性比が存在するのか。

(4) 質問(2)において, 振動モードが変化しているとすれば, 剛性比が0.01付近, 振動振幅が最小となる0.1付近, 0.2以上の三つの範囲では, どのようなモードか。

〔回答〕 (1) 固有振動数は, 0.01~1.0の剛性比において, $1/2\Omega$ で約20~105 rad/s, $1/2\Omega_{II}$ で210~414 rad/s 程度変化する。

(2) ご指摘のとおり, 各剛性比における固有振動

付表1 モード

Rigidity Ratio	$1/2\Omega$			$1/2\Omega_{II}$		
	S.S.	D.S.	S.S.	S.S.	D.S.	S.S.
0.01	.97	1	.97	-2.29	1	-2.29
0.1	.74	1	.74	-2.99	1	-2.99
0.2	.57	1	.57	-3.86	1	-3.86

数では, 円板部と支持部の振幅比が変化するから, それに併って振動モードも変化する。しかしながら, 本論文で解析した系は, 中央円板部と左右対称な両端の支持部に質量を集中させた四自由度モデルであり, モードの形自体は系に固有のものであるから, 文献(1)図2に示すような形状となる。

(3) (2)で回答したように振動モードの形自体は, ほぼ同様であるが, 円板部と支持部の振幅比が相対的に変化することによると考える。

(4) 各剛性比におけるモードを付表1に示す。モードは円板部(D.S.)振幅を1として, それとの相対比率で支持部(S.S.)振幅を表した。