1形デッドビートサーボ系の一般形*

近藤英二^{*1}, 清田高德^{*2}, 須永照雄^{*1}

General Form of Type-1 Deadbeat Servo Systems

Eiji KONDO, Takanori KIYOTA, and Teruo SUNAGA

This paper discusses a general form of a type-1 deadbeat servo system which nullifies the effect of the step disturbance and transfers the output to the step command signal within a finite time for a discrete-time linear time-invariant system. The type-1 deadbeat servo system is formulated by using the augmented system and its deviation system. Then, a general form of the type-1 deadbeat servo system is obtained. The controllability indices of the system are $(n_1, \dots, n_m)$, where $n_1 \geq \dots \geq n_m$. When the order r of the output is equal to the order m of the input, the controllability indices of the deviation system are $(n_1+1, \dots, n_m+1)$ and the minimum settling time is n_1+1 . When $r < m$, the controllability indices of the deviation system are not determined only by $(n_1, \dots, n_m)$, and the minimum settling time is either n_1 or n_1+1 .

Key Words: Control Theory, Discrete-Time System, Deadbeat Control, Servo System, Type-1, General Form

1. ま え が き

デッドビート制御系は、有限時間で状態や出力追従誤差を零に整定できるため、これまでに多くの研究がなされてきた⁽¹⁾⁽²⁾。特に、メカトロニクスにおいては、出力を高速高精度で目標値に追従させたい場合が多い。そのため、出力を有限時間で目標値に整定させるデッドビートサーボ系は有効な制御系の一つである。しかし、デッドビートサーボ系の一般形は求まっていない。

本論文では、有限時間でステップ状外乱を抑制し出力をステップ状目標値に整定させる1形デッドビートサーボ系について述べる。一般の1形サーボ系が制御対象の初期状態や外乱と目標値の大きさに依存しないためには、出力数と同じ数の積分特性を付加した拡大系を考えなければならない。このとき、拡大系の偏差系を用いれば、偏差系の状態デッドビート制御系の一般形を求めることにより、1形デッドビートサーボ系の一般形が求まる。

まず、偏差系の状態を有限時間で零に整定させるこ

とにより、出力追従誤差を零に整定させることが望ましいことを示す。次に、偏差系のフィードバック系のシステム行列が相似となり得るすべてのべき零ジョルダン行列を求める相補的な二つの定理を導く、これらの定理を用いれば、1形デッドビートサーボ系の一般形を求めることができる。

さらに、出力数が入力数に等しいとき、偏差系の広義の可制御指数は制御対象の広義の可制御指数より一意的に定まることを示す。このとき、最小整定時間は、制御対象の状態を有限時間で零に整定させる状態デッドビート制御系の最小整定時間よりも1だけ延びることを明らかにする。これに対して、出力数が入力数より小さいときは、偏差系の広義の可制御指数はシステム行列の具体的な値によって変化することを示す。この場合は、出力数が入力数と等しい場合と異なり、最小整定時間が増加しないこともあり得ることを明らかにする。

2. 問 題 の 設 定

制御対象として、次の可制御、可観測な線形定常離散時間系を考える。

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + d \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

* 昭和63年3月17日 九州支部第41期総会講演会において講演、原稿受付 昭和62年9月24日。

^{*1} 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 准員、九州大学工学部。

ここで, $x(t)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル, $u(t)$ は $m \times 1$ 入力ベクトル, $y(t)$ は $r \times 1$ 出力ベクトル, d は $t=0$ で制御対象に加わる $n \times 1$ ステップ状外乱, A, B, C はそれぞれ $n \times n, n \times m, r \times n$ の定数行列とし, t は零または正の整数とする. また, 入出力は冗長性を持たないと仮定する. すなわち B と C は最大階数を持ち,

$$\text{rank } B = m \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{rank } C = r \quad \dots\dots\dots (4)$$

とする. なお, A の正則性は仮定しない.

可制御性と B が最大階数 m を持つという仮定より, A と B が与えられると, 広義の可制御指数と呼ばれる m 個の正の整数が一意的に定まる. この不変量を順序付けして $n_i (i=1, \dots, m)$ とする. すなわち,

$$n_1 + \dots + n_m = n \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$n \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

とする. これらの n_i は, 次のようにして求められる.

[定義1] 制御対象に対して, 次のような n 個の零または正の整数を定義する.

$$\alpha_1^0 = \text{rank } B (=m) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_j^0 &= \text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{j-1} B] \\ &\quad - \text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{j-2} B] \\ (j &= 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

明らかに,

$$\alpha_1^0 + \dots + \alpha_{n_1}^0 = n \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$m = \alpha_1^0 \geq \dots \geq \alpha_{n_1}^0 > 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

であり, $j \geq n_1 + 1$ ならば $\alpha_j^0 = 0$ となる.

次に, α_j^0 と n_i の関係を図式的に示し, n_i を求める.

まず, $m \times n$ のます目を作る. このます目を, n 個の円で, 左から第1列に α_1^0 個, ..., 第 j 列に α_j^0 個, ..., 第 n_j 列に $\alpha_{n_j}^0$ 個の順に上から埋めていくと, 図1のようになる. このとき, [定義1] より, 上から第 i 行の円の和が $n_i (i=1, \dots, m)$ 個となる.

3. 1 形サーボ系の一般構成

制御対象の $r \times 1$ ステップ状目標値 y_d が $t=0$ で与えられたとする. このとき, $r \times 1$ 追従誤差 $e(t)$ は,

$$e(t) = y(t) - y_d \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる. よって, サーボ系の目的は, $t \rightarrow \infty$ のとき $e(t) \rightarrow 0$ とすることである. そこで, $t \rightarrow \infty$ のときの $x(t), u(t), y(t)$ の定常値を, それぞれ $x_\infty, u_\infty, y_\infty$ とすると, 式(1)と式(2)より

$$x_\infty = Ax_\infty + Bu_\infty + d \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$y_d = y_\infty = Cx_\infty \quad \dots\dots\dots (13)$$

が成り立つ. 式(12)と式(13)をまとめると

$$\begin{bmatrix} A - I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d \\ y_d \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる. ここで, I_n は $n \times n$ 単位行列とする. 式(14)において, 任意の d と y_d に対して x_∞ と u_∞ が存在するための条件が1形サーボ系の構成条件となる. よって, 式(14)の係数行列は行最大階数を持たなければならない. すなわち,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + r \quad \dots\dots\dots (15)$$

でなければならない. これは, 制御対象が1に零点を持たないことを意味する. 式(15)より

$$r \leq m \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる. すなわち, 出力数は入力数を超えることはできない. さらに, 式(4)は自動的に満足される. 特に, $r=m$ のときは式(3)も自動的に満足される.

次に, 制御対象の初期状態 $x(0)$ およびステップ状外乱の大きさ d とステップ状目標値の大きさ y_d に依存しない1形サーボ系の一般構成を示す. そのためには, 出力数と同じ数の積分特性を付加した拡大系を考え, 拡大系の状態フィードバックを行えばよいことが知られている. すなわち,

$$w(t+1) = w(t) + e(t) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 w(t) \quad \dots\dots\dots (18)$$

とする. ここで, $w(t)$ は $r \times 1$ ベクトルであり, $m \times n$ 行列 K_1 と $m \times r$ 行列 K_2 が設計パラメータである. このとき, 式(1), (2), (11), (17)より, $x(t)$ と $w(t)$ を新たな状態とする拡大系は,

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_r \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{d} = \begin{bmatrix} d \\ -y_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

とおくと,

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t) + \bar{d} \quad \dots\dots\dots (20)$$

となる. さらに,

$$\bar{K} = [K_1 \ K_2] \quad \dots\dots\dots (21)$$

とおくと, 式(18)は

○	○	•	•	•	○		n_1
○	○				•		n_2
•	•				○		•
•	•						•
•	○						•
○							n_m

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_{n_1}^0$$

α_j^0 is the number of circles in j -th column

n_i is the number of circles in i -th row

図1 α_j^0 と n_i の関係図

$$u(t) = \hat{K}\hat{x}(t) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。

さらに、 $\hat{d}$ の影響を除くために、拡大系の偏差系を求める。新しい状態の偏差 (差分) $\hat{z}(t)$ を

$$\hat{z}(t) = \hat{x}(t+1) - \hat{x}(t) \quad \dots\dots\dots (23)$$

とおき、入力偏差 (差分) $\hat{u}(t)$ を

$$\hat{u}(t) = u(t+1) - u(t) \quad \dots\dots\dots (24)$$

とおくと、式(20)、(22)～(24)より

$$\hat{z}(t+1) = \hat{A}\hat{z}(t) + \hat{B}\hat{u}(t) \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\hat{u}(t) = \hat{K}\hat{z}(t) \quad \dots\dots\dots (26)$$

を得る。さらに、式(17)と式(25)より、追従誤差 $e(t)$ は偏差系の出力

$$e(t) = [0 \quad I_r] \hat{z}(t) = \hat{C}\hat{z}(t) \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。

4. 偏差系の可観測性と可制御性

偏差系の可観測性行列の階数を求めると、

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n+r-1} \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & I_r \\ C & I_r \\ CA + C & I_r \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n+r-2} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] = n+r \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

となる。よって、偏差系は可観測である。

次に、偏差系の可制御性について調べる。

$$\begin{aligned} H(f) &= [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \dots \quad \hat{A}^{f-1}\hat{B}] \\ &= \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{f-1}B \\ 0 & CB & \dots & CA^{f-2}B + \dots + CB \end{bmatrix} \\ &= H_1 H_2(f) H_3(f) \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

なる $(n+r) \times (mf)$ 行列を考える。ここで、

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \begin{bmatrix} A - I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \\ H_2(f) &= \begin{bmatrix} 0 & B & AB & \dots & A^{f-2}B \\ I_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\ H_3(f) &= \begin{bmatrix} I_m & \dots & I_m \\ 0 & & I_m \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

である。このとき、偏差系の可制御性行列は、 $H(n+r)$ となる。式(15)と可制御性の条件より

$$\text{rank} H_1 = n+r, \text{rank} H_2(n+r) = n+m \quad \dots\dots\dots (31)$$

である。明らかに $H_3(f)$ は常に正則であるから、

$$\text{rank} H(n+r) = \text{rank} H_1 H_2(n+r) \quad \dots\dots\dots (32)$$

が成り立つ。ここで、Sylvester の不等式より、

$$\begin{aligned} \text{rank} H_1 + \text{rank} H_2(n+r) &\leq (n+m) \\ &\leq \text{rank} H_1 H_2(n+r) \\ &\leq \min(\text{rank} H_1, \text{rank} H_2(n+r)) \quad \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

が成立するから、

$$\text{rank} H(n+r) = n+r \quad \dots\dots\dots (34)$$

となる。よって、偏差系は可制御である。

5. 1 形デッドビートサーボ系の一般形と整定時間

4 章より、式(25)と式(27)で表される偏差系は可制御かつ可観測であるから、式(26)の偏差系の状態フィードバックにより $\hat{z}(t)$ を有限時間で零に整定させることができる。なお、1 形デッドビートサーボ系の目的は、有限時間で追従誤差 $e(t)$ を零に整定させることである。しかし、偏差系は可観測であるから、偏差系の状態 $\hat{z}(t)$ のすべてのモードは偏差系の出力 $e(t)$ に現れる。そこで、制御対象が連続時間系からサンプリングにより求められた場合も考えると、サンプル点間の応答もデッドビートさせるためには偏差系の出力 $e(t)$ だけではなく状態 $\hat{z}(t)$ も整定させることが望ましい。よって、1 形デッドビートサーボ系の設計問題は、偏差系のフィードバック系

$$\hat{z}(t+1) = (\hat{A} + \hat{B}\hat{K})\hat{z}(t) \quad \dots\dots\dots (35)$$

を考え、 $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}$ のすべての固有値を零に配置する偏差系の状態デッドビート制御器を求める問題に変換される。

式(26)が偏差系の状態デッドビート制御器であるための必要十分条件は、偏差系のフィードバック系のシステム行列 $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}$ が適当な $(n+r) \times (n+r)$ べき零ジョルダン行列に相似となることである。そこで、互いに相似でない、主対角成分の右上に 1 または零を持つ $(n+r) \times (n+r)$ べき零ジョルダン行列の集合 $\hat{J}$ を偏差系の代表元系と呼ぶ。なお、偏差系の代表元系 $\hat{J}$ の任意の元を $\hat{J}$ 、 $\hat{J}$ のべき零ジョルダン細胞 (以後、細胞と呼ぶ) の数を q 、 $\hat{J}$ の細胞の次数を順序付して $\hat{p}_i (i=1, \dots, q)$ とする。すなわち、

$$\hat{p}_1 + \dots + \hat{p}_q = n+r \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$n+r \geq \hat{p}_1 \geq \dots \geq \hat{p}_q \geq 1 \quad \dots\dots\dots (37)$$

とする。さらに、 $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}$ が相似となり得るすべての $\hat{J}$ の集合 $\hat{J}^*$ (代表元系 $\hat{J}$ の部分集合) を偏差系の解代表元系と呼ぶ。

偏差系は可制御であり $\hat{B}$ は最大階数 m を持つので、一意的に定まる偏差系の広義の可制御指数が m 個存在する。この不変量を順序付けして $\hat{n}_i (i=1, \dots, m)$ とする。すなわち、

$$\bar{n}_1 + \cdots + \bar{n}_m = n + r \quad (38)$$

$$n + r \geq \bar{n}_1 \geq \cdots \geq \bar{n}_m \geq 1 \quad (39)$$

とする。さらに、偏差系の式(25)は、適当な座標変換

$$\bar{z}(t) = \bar{S}_1 z(t), \bar{u}(t) = \bar{S}_2 u(t) \quad (40)$$

により、次の Luenberger の可制御正準形に変換することができる。

$$\bar{z}(t+1) = (\bar{J}_0 + \bar{E}\bar{A}^*)\bar{z}(t) + \bar{E}\bar{u}(t) \quad (41)$$

ここで、 $\bar{J}_0$ は細胞の次数が $\bar{p}_i = \bar{n}_i (i=1, \dots, m)$ なる特別なべき零ジョルダン行列である。また、 $\bar{E}$ は第 $(\bar{n}_1 + \cdots + \bar{n}_i, i)$ 成分 $(i=1, \dots, m)$ のみが 1 で、他は零なる $(n+r) \times m$ 行列である。さらに、 $\bar{A}^*$ は $\bar{A}, \bar{B}, \bar{S}_1$ および $\bar{S}_2$ より定まる $m \times (n+r)$ 定数行列である。

式(41)を用いれば、偏差系の状態デッドビート制御器の $\bar{K}$ は次のように表される⁽³⁾。

$$\bar{K} = \bar{S}_2(\bar{F}\bar{G}^{-1} - \bar{A}^*)\bar{S}_1^{-1} \quad (42)$$

ここで、 $m \times (n+r)$ 行列 $\bar{F}$ と $(n+r) \times (n+r)$ 行列 $\bar{G}$ はそれぞれ

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \bar{J} \bar{n}_1 \\ \bar{v}_2 \bar{J} \bar{n}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \bar{J} \bar{n}_m \end{bmatrix}, \bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_1 \bar{J} \\ \vdots \\ \bar{v}_1 \bar{J} \bar{n}_1 - 1 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \\ \vdots \\ \bar{v}_m \bar{J} \bar{n}_m - 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

となる。ここで、 $\bar{v}_j (j=1, \dots, m)$ は、フィードバック系の極 $(\bar{A} + \bar{B}\bar{K})$ の唯一の固有値零) に関係ない $1 \times (n+r)$ 設計パラメータベクトルである。

[定義 2] $\bar{J}$ に対して、次のような $(n+r)$ 個の零または正の整数を定義する。

$$\bar{\alpha}_j = \text{rank } \bar{J}^{j-1} - \text{rank } \bar{J}^j \quad (44)$$

ここで、 j は正の整数とする。このとき、 $\bar{J}$ に含まれる j 次の細胞の数は $\bar{\alpha}_j - \bar{\alpha}_{j+1}$ となる。なお、 $\bar{J} = \bar{J}_0$ のときの $\bar{\alpha}_j$ を特別に $\bar{\alpha}_j^0$ とする。

[定義 3] 細胞の次数 $\bar{p}_i$ は q 個しか存在しないが、統一的に取扱うため $q < i \leq n+r$ なる i に対して $\bar{p}_i = 0$ とおき、 $n+r$ 個の $\bar{p}_i$ を導入する。

1 形デッドビートサーボ系の設計問題は、偏差系の状態デッドビート制御器を求める問題に変換されたので、次の相補的な二つの定理が成り立つ⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

[定理 1] 制御対象が決まると、 $n+r$ 個の零または正の整数の組 $(\bar{\alpha}_1^0, \dots, \bar{\alpha}_{n+r}^0)$ が求まる。このとき、 $\bar{J}$ が偏差系の解代表元系 $\bar{J}^*$ の元であるための必要十分条件は、式(45)~(47)となる。

$$\bar{\alpha}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_{n+r} = n + r \quad (45)$$

$$m \geq \bar{\alpha}_1 \geq \cdots \geq \bar{\alpha}_{n+r} \geq 0 \quad (46)$$

$$\bar{\alpha}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_j \leq \bar{\alpha}_1^0 + \cdots + \bar{\alpha}_j^0$$

$$(j=1, \dots, n+r) \quad (47)$$

明らかに、細胞の数は $\bar{\alpha}_1$ となり、細胞の最大数は m 、最小数は 1 である。

[定理 2] 制御対象が決まると、偏差系の広義の可制御指数 $(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_m)$ が求まる。このとき、 $\bar{J}$ が偏差系の解代表元系 $\bar{J}^*$ の元であるための必要十分条件は、式(48)~(50)となる。

$$\bar{p}_1 + \cdots + \bar{p}_{n+r} = n + r \quad (48)$$

$$n + r \geq \bar{p}_1 \geq \cdots \geq \bar{p}_{n+r} \geq 0 \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 + \cdots + \bar{p}_i &\geq \bar{n}_1 + \cdots + \bar{n}_i \quad (i=1, \dots, m) \\ \bar{p}_1 + \cdots + \bar{p}_i &= n + r \quad (i=m+1, \dots, n+r) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

明らかに、整定時間は $\bar{p}_1$ となり、最小整定時間は $\bar{n}_1$ 、最大整定時間は $n+r$ である。

なお、[定理 1] と [定理 2] で求めた $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{n+r})$ と $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n+r})$ のうち、物理的意味があるのは零の部分を除いた正の部分のみである。よって、 $n+r$ 個の零または正の整数の組 $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n+r})$ のうち $q (= \bar{\alpha}_1)$ 個の $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_q)$ のみが正の整数となり、これらが偏差系の解代表元系 $\bar{J}^*$ の元 $\bar{J}$ の細胞の次数となることは明らかである (以後同様)。

これまで、ステップ状外乱とステップ状目標値は $t=0$ で加わるとしているが、 $t>0$ の途中から加わったとしても同様である。また、目標値や外乱が階段状に変化する場合も、その変化する間隔が整定時間 $\bar{p}_1$ より大きければ、同一の $\bar{K}$ によってデッドビート制御が可能である。

[定理 1] と [定理 2] を用いれば、解代表元系 $\bar{J}^*$ のすべての元 $\bar{J}$ を求めることができる。 $\bar{J}^*$ の一つの元 $\bar{J}$ に対して式(42)と式(43)を求め、さらにそれらの直和を求めると、それが 1 形デッドビートサーボ系の一般形となる。ところで、一般形を求めるためには、偏差系の広義の可制御指数が必要となる。これらは、出力数が入力数に等しい場合と、出力数が入力数より小さい場合とでは性質が異なる。

(1) $r=m$ のとき (出力数が入力数に等しいとき)

この場合には、式(29)の H_1 は正則となり $H_3(f)$ は常に正則であるから、

$$\bar{\alpha}_1^0 = \text{rank } \bar{B} = m (= r)$$

$$\bar{\alpha}_j^0 = \text{rank} [\bar{B} \bar{A} \bar{B} \cdots \bar{A}^{j-1} \bar{B}]$$

$$= \text{rank} [\bar{B} \bar{A} \bar{B} \cdots \bar{A}^{j-2} \bar{B}]$$

$$= \text{rank} [\bar{B} \bar{A} \bar{B} \cdots \bar{A}^{j-2} \bar{B}]$$

$$= \text{rank} [\bar{B} \bar{A} \bar{B} \cdots \bar{A}^{j-3} \bar{B}]$$

$$= \alpha_{j-1}^0 \quad (j=2, \dots, n+1) \quad \dots\dots\dots (51)$$

を得る。さらに、偏差系は可制御であるから、 $j=n+2, \dots, n+m$ のとき $\alpha_j^0=0$ となる。すなわち、 α_j^0 は α_j^0 より一意的に定まり、

$$\alpha_j^0 = \begin{cases} m & (j=1) \\ \alpha_{j-1}^0 & (j=2, \dots, n+1) \\ 0 & (j=n+2, \dots, n+m) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (52)$$

となる。

α_j^0 に関して図1と同様な図を作ると、図2のようになる。図2は、図1(図2の二重線内部)の左側に m 個の円で埋まった1列を付け加え、さらに右側に空欄の $(m-1)$ 列を付け加えた $m \times (n+m)$ ます目の図となる。よって、偏差系の可制御指数は、この図の円の数を横に数えた $(n_1+1, n_2+1, \dots, n_m+1)$ となる。すなわち、 $r=m$ のときの偏差系の可制御指数は、制御対象の広義の可制御指数 $(n_1, \dots, n_m)$ より一意的に定まる。よって、制御対象の広義の可制御指数 n_i と指数 α_j^0 を用いると、[定理1]と[定理2]より次の二つの定理が成立する。

[定理3] 制御対象が決まると、 n 個の零または正の整数の組 $(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$ が求まる。このとき、 $\bar{J}$ が偏差系の解代表元系 $\bar{J}^*$ の元であるための必要十分条件は、式(53)~(55)となる。

$$\bar{\alpha}_1 + \dots + \bar{\alpha}_{n+m} = n+m \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$m \geq \bar{\alpha}_1 \geq \dots \geq \bar{\alpha}_{n+m} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_1 + \dots + \bar{\alpha}_j &\leq m + \alpha_1^0 + \dots + \alpha_{j-1}^0 \\ &\quad (j=2, \dots, n+1) \\ \bar{\alpha}_1 + \dots + \bar{\alpha}_j &\leq n+m \\ &\quad (j=n+2, \dots, n+m) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (55)$$

[定理4] 制御対象が決まると、広義の可制御指数 $(n_1, \dots, n_m)$ が求まる。このとき、 $\bar{J}$ が偏差系の解代表元系 $\bar{J}^*$ の元であるための必要十分条件は、式(56)~(58)となる。

$$\bar{p}_1 + \dots + \bar{p}_{n+m} = n+m \quad \dots\dots\dots (56)$$

$$n+m \geq \bar{p}_1 \geq \dots \geq \bar{p}_{n+m} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 + \dots + \bar{p}_i &\geq n_1 + \dots + n_i + i \\ &\quad (i=1, \dots, m) \\ \bar{p}_1 + \dots + \bar{p}_i &= n+m \\ &\quad (i=m+1, \dots, n+m) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (58)$$

明らかに、最小整定時間は n_1+1 となる。

[定理3]と[定理4]より、出力数が入力数に等しい場合には、制御対象のシステム行列 A, B, C が異なっても広義の可制御指数 $(n_1, \dots, n_m)$ が同一ならば、解代表元系は同一となることは明らかである。

(2) $r < m$ のとき (出力数が入力数より小さいと

き)

この場合、 $\alpha_1^0=m$ を除き、 α_j^0 や n_i は $r=m$ のときのように α_j^0 や n_i だけからは一意的には定まらない。しかし、最小整定時間を表す偏差系の狭義の可制御指数 $\bar{n}_1$ に関して、次のようなことがいえる。

まず、 $\bar{n}_1 \leq n_1-1$ と仮定する。式(29)より、

$$H(\bar{n}_1) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{\bar{n}_1-1}B \\ 0 & CB & \dots & CA^{\bar{n}_1-2}B + \dots + CB \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (59)$$

であり、 $\bar{n}_1$ は偏差系の狭義の可制御指数なので

$$\text{rank} H(\bar{n}_1) = n+r \quad \dots\dots\dots (60)$$

でなければならない。すなわち、 $H(\bar{n}_1)$ の $(n+r)$ 個の行ベクトルは互いに線形独立でなければならない。ところが、制御対象の狭義の可制御指数は n_1 であるから、

$$\begin{aligned} \text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{\bar{n}_1-1}B] \\ \leq \text{rank}[B \ AB \ \dots \ A^{n_1-2}B] < n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (61)$$

となる。式(61)より、 $H(\bar{n}_1)$ の行ベクトルの中に、線形従属な行ベクトルが必ず存在するが、これは式(60)と矛盾する。よって、

$$\bar{n}_1 \geq n_1 \quad \dots\dots\dots (62)$$

でなければならない。

次に、式(21)において、 $f=n_1+1$ とする。制御対象の狭義の可制御指数は n_1 であるから、

$$\text{rank} H_2(n_1+1) = n+m \quad \dots\dots\dots (63)$$

となる。明らかに $H_3(f)$ は常に正則であるから、

$$\text{rank} H(n_1+1) = \text{rank} H_1 H_2(n_1+1) \quad \dots\dots\dots (64)$$

が成り立つ。ここで、Sylvesterの不等式を用いれば、

$$\text{rank} H(n_1+1) = n+r \quad \dots\dots\dots (65)$$

となる。偏差系の狭義の可制御指数 $\bar{n}_1$ は、 $\text{rank} H(f) = n+r$ なる最小の f であるから、

$$\bar{n}_1 \leq n_1+1 \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。

よって、式(62)と式(66)より、 $\bar{n}_1$ は n_1 か n_1+1 と

$$\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_{n_1+1}^0$$

α_j^0 is the number of circles in j -th column
 n_i+1 is the number of circles in i -th row

図2 α_j^0 と n_i+1 の関係図

なる。すなわち、最小整定時間は n_1 か n_1+1 となる (例題参照)。この場合、偏差系の広義の可制御指数は制御対象の広義の可制御指数のみからは決定できず、制御対象のシステム行列 A, B, C の具体的な値によって変化する。さらに、解代表元系やその元の数も制御対象のシステム行列 A, B, C の具体的な値によって変化する (例題参照)。

一般に、積分特性を導入すると整定時間が長くなると考えられるが、整定時間が変わらない場合が起こり得ることがわかった。

6. 例題

例題として、 $n=5, m=3$ である次のような可制御な制御対象を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、制御対象の広義の可制御指数は、

$$(n_1, n_2, n_3) = (3, 1, 1)$$

である。

(1) $r=m=3$ のとき

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。この系は可観測であり、サーボ系の構成条件である式(15)は満たされている。このとき、偏差系の広義の可制御指数は、

$$(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3) = (4, 2, 2)$$

であり、制御対象の広義の可制御指数より 1 ずつ増えていることがわかる。明らかに、最小整定時間も 1 増えている。また、 $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}$ が相似となり得るべき零ジョルダン行列 $\hat{J}$ の細胞の次数 $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_q)$ は、(4, 2, 2), (4, 3, 1), (4, 4), (5, 2, 1), (5, 3), (6, 1, 1), (6, 2), (7, 1), (8) の 9 通りである。

(2) $r=2$ のとき

(2-1)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。この系は可観測であり、サーボ系の構成条件である式(15)は満たされている。このとき、偏差系の広義の可制御指数を求めると、

$$(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3) = (3, 2, 2)$$

となる。 $\bar{n}_1 = n_1$ であり、最小整定時間は変わらない。また、 $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}$ が相似となり得るべき零ジョルダン行

列 $\hat{J}$ の細胞の次数 $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_q)$ は、(3, 2, 2), (3, 3, 1), (4, 2, 1), (4, 3), (5, 1, 1), (5, 2), (6, 1), (7) の 8 通りである。

(2-2)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。この系は可観測であり、サーボ系の構成条件である式(15)は満たされている。このとき、偏差系の広義の可制御指数を求めると、

$$(\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3) = (4, 2, 1)$$

となる。 $\bar{n}_1 = n_1 + 1$ であり、最小整定時間は 1 増えている。また、 $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}$ が相似となり得るべき零ジョルダン行列 $\hat{J}$ の細胞の次数 $(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_q)$ は、(4, 2, 1), (4, 3), (5, 1, 1), (5, 2), (6, 1), (7) の 6 通りである。

(2-1) と (2-2) より明らかなように、出力数が入力数より小さいときは、 C が異なるため解代表元系は別のものとなっている。また、元の数も異なる。しかし、入力数と出力数が等しい場合には、 C が異なっても解代表元系は同一である。

7. あとがき

本論文では、有限時間でステップ状外乱 d を抑制し、出力をステップ状目標値 y_d に整定させる 1 形デッドビートサーボ系について述べた。まず、制御対象の初期状態や d と y_d に依存しない 1 形デッドビートサーボ系を構成するため、ある拡大系とその偏差系を用いて、1 形デッドビートサーボ系の設計問題を偏差系の状態デッドビート制御器の設計問題に変換した。次に、偏差系のフィードバック系のシステム行列が相似となり得るすべてのべき零ジョルダン行列を求める相補的な二つの定理を導いた。これらの定理を用いて、1 形デッドビートサーボ系の一般形を求めた。さらに、出力数と入力数の大小関係により、1 形デッドビートサーボ系の性質が異なることを明らかにした。

出力数と入力数が等しいときは、制御対象の広義の可制御指数 $(n_1, \dots, n_m)$ に対し、偏差系の広義の可制御指数は $(n_1+1, \dots, n_m+1)$ となる。特に、最小整定時間は、制御対象の状態を有限時間で零に整定させる状態デッドビート制御器の最小整定時間 n_1 よりも 1 だけ延びる。また、このとき、システム行列が異なっても $(n_1, \dots, n_m)$ が同一の制御対象に対しては、偏差系の解代表元系は同一となる。

出力数が入力数より小さいときは、偏差系の広義の可制御指数は制御対象のシステム行列の具体的な値によって変化し、整定時間が増加しない場合が起こり得る。すなわち、一般に、積分特性を導入すると整定時間

が長くなると考えられるが、整定時間が変わらない場合が起こり得ることがわかった。また、このとき、偏差系の解代表元系もシステム行列の具体的な値によって変化する。

なお、ステップ状外乱とステップ状目標値が $t > 0$ の途中から加わる場合や、目標値や外乱が階段状に変化する場合も、その変化する間隔が整定時間より大きければ、ここで求めたものと同じ制御器によってデッドビート制御することができる。また、ここで示した手法は、1 形以外のデッドビートサーボ系に対しても応用できる。

文 献

- (1) O'Reilly, J., The Discrete Linear Time Invariant Time-optimal Control Problem—An Overview, *Automatica*, 17-2 (1981), 363.
- (2) 今井, デッドビート制御, 計測と制御, 22-7 (昭 58), 606.
- (3) Kondo, E. and Takata, M., Design of Linear Time-Invariant Systems Using The Pole Assignment and Parameter Optimization Methods. *Mem. Facul. Eng., Kyushu Univ.*, 35-1 (1975), 1.
- (4) 近藤・武内・須永・清田, 状態デッドビート制御器の体系的設計法, 機論, 53-492, C (昭 62), 1782.
- (5) 近藤・清田・須永, 状態デッドビート制御器における可能なべき零ジョルダン行列の直接的導出法, 機論, 54-498, C (昭 63), 371.

討 論

〔質問〕 今井 弘之〔摂南大学工学部〕

(1) 偏差系が可制御であるための必要十分条件は、式(15)が成立することであることが、Bradshaw-Porter (付1)に示されているので、偏差系の可制御系の証明は必要ないのではないかと思う。

(2) デッドビート制御問題の一般解を求めたものとして、文献(付2)があるが、貴論文の手法との違いについてお聴かせ願いたい。

〔回答〕 (1) 本論文の目的は、可制御性を示すことではない。しかし、偏差系の広義の可制御指数を求めたり、出力数が入力数より小さいときの最小整定時間の範囲を決定するために、可制御性の部分が必要となる。したがって、5章でまとめて記述してもよいのだが、可制御性はデッドビート制御の前提条件になるので、4章で述べた。

(2) Fahmy らはサーボ系を取扱っているわけではないので、文献(4)や計算遅れのある場合(付3)を中心として主な相違点を三つだけ述べる。

(i) 文献(4)や計算遅れのある場合では、状態のシステム行列(制御対象の A , 計算遅れのある場合の拡大系の $\hat{A}$ (付3))の正則性を仮定していない。工学的手法を経済・社会システムへ応用する場合には、システム行列の正則性が保証されとは限らない。さらに、工学系に限ったとしても、デジタル制御において重要な計算遅れのある場合には、 $\hat{A}$ は必ず固有値零を含

み、もはや正則ではない(付3)。このような場合には、システム行列の正則性を仮定する Fahmy らの方法は適用できない。

(ii) Fahmy らは狭義の可制御指数(最大可制御指数)のみを用いているため、解代表元系を正確に求めることはできない。解代表元系を正確に求めるためには、文献(4)や計算遅れのある場合のように広義の可制御指数が必要である。たとえば、Fahmy らは、状態の数が11、入力数が5、狭義の可制御指数が3なる例題において、解代表元系の元が37個あると述べている。しかし、広義の可制御指数は制御対象に固有のものであり、制御対象が決まれば広義の可制御指数も一意的に定まる。もし広義の可制御指数が(3, 3, 3, 1, 1)ならば、文献(4)によれば解代表元系の元は34個であり、Fahmy らが求めている(3, 2, 2, 2, 2), (3, 3, 2, 2, 1), (4, 2, 2, 2, 1)は解代表元系に含まれない。

以上より、Fahmy らの論文は不完全なものである。

(iii) 文献(4)の表現形式は、Fahmy らの表現形式よりも簡潔である。その結果、計算遅れのある場合や本論文のサーボ系への拡張が容易となる。

〔質問〕 砂原 善文

〔京都工芸繊維大学工芸学部〕

(1) “まえがき”において、メカトロニクスの分野に motivation があるような示唆が見うけられるが、式(1)は、実在システムの制御対象として、たとえばどういうものと考えればよいか。6章例題のマトリッ

(付1) Bradshaw, A. and Porter, B., *Int. J. System sci.* 6-2 (1975), 117.

(付2) Fahmy M. M. and Oreilly, J., Dead-beat control of linear discrete-time systems *Int. J. Control*, 37-4 (1983), 685-705.

(付3) 近藤・ほか3名, 計算遅れのある状態デッドビート制御器の一般形, 機論, 54-499, C (昭 63), 623.

クス A および B は、どういう实在制御対象(その特性を単純化するとしても)を想定すればよいか。

(2) “7 章あとがき”で「なおステップ状外乱と…」という記述があるが、階段状に変化する間隔(多分時間間隔)が整定時間よりも大きければ云々というところは、当然のことであり、記述の必要もないと思われるがいかがか。

〔回答〕 (1) メカトロニクスという言葉は新しい用語であり、明確な定義があるわけではない。著者らは、メカトロニクスを、メカニカルシステムをマイクロプロセッサなどを用いて高度に制御することだと考えている。このとき、高精度かつ高速な制御が重要となる。デッドビート制御は、このような要望に対する一つの重要なアプローチである。もちろん、デッドビート制御は、メカニカルシステムの制御以外にも適用が可能である。なお、本論文はデッドビート制御系の設計法に関する理論的な論文であり、実際の制御対象への応用の論文ではない。したがって、例題も設計法を明確にするためのものである。現在著者らは、モータを含むメカニカルシステムへの応用の研究をして

おり、これらについては別の機会に報告したいと思っている。

(2) デッドビート制御系以外の制御則を用いると、理論上は整定させるまでに無限の時間が必要である。実際は追従誤差が適当な範囲におさまれば整定したとみなすわけであるが、その場合でも整定時間を明確に示すことは困難である。さらに、ステップ状目標値やステップ状外乱の大きさが変化すれば、それに応じて整定時間も変化すると考えられる。このような場合に「整定時間より大きければ」という情報は、概念的にはわかっても工学的に意味があるものではない。したがって、どのような間隔で変化するステップ状外乱に対応できるかは不明確である。一方、デッドビート制御では整定時間 t_1 は有限であり簡単に求まるうえ、本論文で示したようにステップ状目標値やステップ状外乱の大きさが変化しても、同一のデッドビートサーボ系に対しては一定不変である。したがって、この場合は「整定時間より大きければ」という情報は工学的に意味がある。