WN 歯車の歯のたわみと歯元応力に関する研究*
(シンマーク歯形に集中荷重が作用する場合)小 田 哲^{*1}, 小 出 隆 夫^{*1}
宮 崎 旭 史^{*2}, 宮 近 幸 逸^{*1}Study on Deflection and Root Stress of WN Gear Tooth
(Tooth Deflection and Root Stress of SymMarC Gear Tooth Due
to Concentrated Load)Satoshi ODA, Takao KOIDE,
Akifumi MIYAZAKI, and Kouitsu MIYACHIKA

This paper presents a study on the deflection and root stress of WN (SymMarC) gear tooth. The tooth deflection and root stress of a SymMarC gear tooth due to a concentrated load were calculated by the three-dimensional finite element method (FEM) and compared with those measured. The validity of the gear model and constraint condition used in this FEM analysis was confirmed, and the critical section of the SymMarC gear tooth and the effects of the number of teeth and the face width on the tooth deflection and root stress were clarified. Furthermore, on the basis of these results, the approximate equations for the deflection and bending moment due to a concentrated load on a SymMarC gear tooth were derived.

Key Words: Gear, WN Gear, SymMarC Gear, Deflection, Root Stress, FEM, Critical Section, Approximate Equation

1. 緒 言

近年インポリュート歯車よりも高い負荷能力を持つといわれるウィルドハーバ・ノビコフ歯車 (WN 歯車) が注目されているが^{(1)~(4)}, WN 歯車の歯のたわみ, 歯元実応力⁽⁵⁾に関する研究はきわめて少ない。

本報では, シンマーク歯車[(株)日立製作所製 WN 歯車]⁽³⁾の歯元応力, 曲げ疲労強度などを検討する場合に必要となる, 集中荷重が作用する場合の歯のたわみと歯元応力を三次元有限要素法 (FEM) により求め, 計算結果が測定結果と一致することを確認したのちに, FEM によって危険断面位置 (最大歯元応力発生位置) および歯のたわみ, 歯元応力に及ぼす歯数, 歯幅の影響について明らかにしている。さらに, シンマーク歯車の歯面上の任意の点におけるたわみ, 危険断面位置における曲げモーメントを求めるための近似式を導いている。

2. たわみ・歯元応力の計算

シンマーク歯車の歯面上の任意の点に集中荷重が作

* 昭和63年3月30日 第65期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和62年8月31日。

*¹ 正員, 鳥取大学工学部 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)。

*² 准員, トヨタ自動車(株) (〒471 豊田市トヨタ町1)。

用する場合の歯のたわみ, 歯元応力を三次元有限要素法 (FEM) を用いて計算した。シンマーク歯車の基準歯形を図1に示す。基準歯形はねじれ角 $\beta_0 = 15^\circ$ のはすばラックの正面歯形として与えられている。歯車モデルの諸元は, 歯直角モジュール $m_n = 12$, ねじれ角 $\beta_0 = 0^\circ$, 歯数 $z = 20, \infty$ (ラック), 歯幅 $b/h = 3, 5, 7$ [h : 歯たけ ($1.505m_n$)] である。ラック, $b/h = 5$ の歯車モデルの分割パターンを図2に示す。分割は可変20節点固体要素を用いて行い, 要素総数528, 節点総数2691である。拘束条件は図2においてモデルの上面, 底面および背面の節点固定である。

3. たわみ・歯元応力の測定

シンマーク歯形を有する片持ばり試験片を作成し, 集中荷重が作用する場合のたわみ, 歯元応力を測定した。試験はりの断面形状を図3に示す。はりの諸元は

図1 シンマーク歯車の基準歯形

$m_n=12$, $\beta_0=0^\circ$, $z=20$, ∞ (ラック), $b/h=5$ であり, 試験片の材料は S45C で, はりの表面は高周波焼入れしている。はりの上面には荷重の作用方向が中央面に垂直になるように, $\phi 3$ の浅い穴が座ぐってあり, 集中荷重 $P=5 \text{ kN}$ を荷重棒の先端に $\phi 3$ の鋼球を取付けて負荷した。たわみの測定は電気マイクロメータを用いて行い, 歯元応力の測定は各はりの圧縮側歯元の接線角度 $\theta=45^\circ$ (θ : 歯形中心線と歯元すみ肉曲線の接線のなす角) の位置 (図 3) にゲージ長 0.3 mm のひ

図 2 分割パターン

図 3 はりの断面形状

ずみゲージを歯すじにそって 10 枚接着して行った。実験装置は文献(6)で用いたものと同一である。

4. 計算・実験結果および考察

4.1 たわみ・歯元応力の計算値と測定値の比較

図 4 はシンマーク歯車の歯先から 2 mm 入った点に中央面に垂直方向の集中荷重 $P=5 \text{ kN}$ が作用する場合の, 歯先から 0.5 mm 入った位置における, 中央面に垂直方向のたわみの計算・測定結果を示す。図 5 は歯先から 6 mm 入った点に集中荷重が作用する場合の, 接線角度 $\theta=45^\circ$ (θ : 歯形中心線と歯元すみ肉曲線の接線のなす角) の位置における圧縮側歯元応力の計算・測定結果を示す。これらの図より, 三次元有限要素法 (FEM) によるたわみと歯元応力の計算結果は

(a) ラック

(b) z=20

図 4 たわみの計算・測定結果

(a) ラック

(b) z=20

図 5 歯元応力の計算・測定結果

いずれも歯数にかかわらず測定結果とよく一致しており、本報で用いた歯車モデル、境界条件が妥当であることがわかる。またたわみ、歯元応力は歯数の減少につれて増大する傾向を示す。

4.2 危険断面位置 図6は $z=20$, $b/h=5$ のシンマーク歯車の歯に歯面法線方向の集中荷重が作用する場合の、最大歯元応力が発生する歯幅方向の位置におけるFEMによる歯元応力計算結果を、横軸に接線角度 θ をとって示す。縦軸は $\theta=45^\circ$ 位置における応力値を基準として示している。図6中の番号1～5は負荷点の位置を表し、これらの位置は実際のかみあい時に接触する位置近傍になるように選んだ。図6より、最大歯元応力が発生する接線角度 θ は負荷点の位置によって引張、圧縮側ともに $\theta=30\sim 60^\circ$ の範囲で大きく変化することがわかる。しかし、最大歯元応力と $\theta=30\sim 60^\circ$ の範囲の中間の $\theta=45^\circ$ 位置における歯元応力の差は小さく(5%以内)、また実際のかみあい時の歯元応力解析を行う場合、危険断面の位置を1点に固定すると計算に便利であるので、本報では危険断面を $\theta=45^\circ$ の位置に定めた。

4.3 たわみの近似式 実際の歯車対の接触線上

(a) 引張側

(b) 圧縮側

図6 歯元応力と接線角度の関係($z=20$, $b/h=5$)

の荷重分布などを求めるためには、集中荷重が作用する場合の歯のたわみ特性を明らかにする必要がある。ここでは、歯の中央面に垂直方向の集中荷重 P による中央面に垂直方向のたわみ w を荷重 P とモジュール m_n で基準化したたわみの影響関数 K_b [式(1)]の近似式を導いた。

$$K_b(x, y, \xi, \eta) = w(x, y, \xi, \eta) / (P/m_n) \cdots \cdots (1)$$

ここで、 (x, y) : たわみ測定点の座標、 (ξ, η) : 集中荷重作用点の座標。

4.3.1 たわみの特性 図7に示すように歯の中央面上において歯先上歯幅中央を原点にとり、歯幅方向を x, ξ 軸、歯たけ方向を y, η 軸とする。原点に集中荷重が作用する場合の荷重点直下のたわみの影響関数 K_b を U とし、任意の (x, y) 点の K_b を U で基準化して $v(x, y)$ と表す。任意の断面 $x=\xi_i$ 上で、集中荷重を歯たけ方向に移動させた場合の、歯先における荷重点直下の K_b で基準化した各位置における荷重点直下の K_b を $G(x, y)$ 、集中荷重を x 軸に沿って移動させた場合の、 U で基準化した荷重点直下の K_b を $F(x)$ とする。種々のシンマーク歯車の歯に対してFEMによるたわみの計算結果から求めた U と b/h の関係および U と z の関係をそれぞれ図8, 9に示す。図8より、 U は b/h の増加につれて減少する傾向を示すが、 $b/h \geq 5$ の範囲ではほぼ一定値を示すことがわかる。図9より、 U は z の減少につれて増大する傾向を示すことが認められる。

図10はラック、 $b/h=5$ の場合の $v(\bar{x}, \bar{y})$ (バーは h で基準化した値を示す)の計算結果を示す。 $b/h \geq 3$

図7 たわみの特性

の範囲では $v(\bar{x}, \bar{y})$ に及ぼす b/h の影響はほとんど認められない。種々の b/h , z に対する $v(\bar{x}, \bar{y})$ の計算結果に基づいて $v(\bar{x}, \bar{y})$ を式で表すと次のようになる。

$$v(\bar{x}, \bar{y}) = v_x(\bar{x}, \bar{y})v_y(\bar{y}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} v_x(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 e^{D_i \bar{x}^2} \\ D_1 &= a_1 / (a_2 \bar{y}^{1.5} + 1) \\ D_2 &= b_1 / (b_2 \bar{y}^{1.5} + 1) \\ D_3 &= c_1 + c_2 \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} v_y(\bar{y}) &= d_1 \bar{y}^5 + d_2 \bar{y}^4 + d_3 \bar{y}^3 + d_4 \bar{y}^2 + d_5 \bar{y} + 1 \\ &\dots\dots\dots (4) \end{aligned} \right\}$$

式(3), (4)における係数を図11に示す。

図12は $z=20$, $b/h=5$ の場合の $G(\bar{x}, \bar{y})$ の計算結果を, $\bar{x}$ をパラメータとして示す。 $G(\bar{x}, \bar{y})$ は歯幅中央近傍の断面では $\bar{x}$ にかかわらずほぼ同じであ

るが、歯幅端近傍の断面では少し異なる。種々の b/h , z に対する $G(\bar{x}, \bar{y})$ の計算結果より $G(\bar{x}, \bar{y})$ の近似式を求めると次のようになる。

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = G_0(\bar{y}) + G'(\bar{x}, \bar{y}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、

$$G_0(\bar{y}) = g_1 \bar{y}^5 + g_2 \bar{y}^4 + g_3 \bar{y}^3 + g_4 \bar{y}^2 + g_5 \bar{y} + 1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$|\bar{x}| \leq b/2h - 0.9$ のとき：

$$G'(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

$|\bar{x}| > b/2h - 0.9$ のとき：

$$G'(\bar{x}, \bar{y}) = (|\bar{x}| - b/2h + 0.9)(-1.32 \bar{y}^4 + 3.28 \bar{y}^3 - 2.86 \bar{y}^2 + 0.86 \bar{y})$$

$\dots\dots\dots (7)$

式(6)における係数を図13に示す。

図14は x 軸上の荷重点直下の K_b を $b/h=5$ に対する $U_{b/h=5}$ で基準化した $F(\bar{x})$ (ハットは歯幅端を起点とした値を示す) の計算結果を示す。 $U_{b/h=5}$ で基準化した $F(\bar{x})$ は函数、歯幅によらず1本の曲線で表すことができ、式で表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F(\bar{x}) &= 1.23e^{-4.05\bar{x}} + 1 \quad (0 \leq \bar{x} < 0.2) \\ F(\bar{x}) &= 0.86e^{-2.29\bar{x}} + 1 \quad (0.2 \leq \bar{x}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

任意の b/h に対する $F(\bar{x})_{b/h}$ は図14の $F(\bar{x})$ を用

図8 U と b/h の関係 (ラック)

図9 U と z の関係 ($b/h=5$)

(a) a_i, b_i

(c) c_i

(d) d_i

図11 $v(\bar{x}, \bar{y})$ の係数

図10 $v(\bar{x}, \bar{y})$

いて次式で求めることができる。

$$F(\bar{x})_{b/h} = F(\bar{x})/F(b/2h) \dots\dots\dots (9)$$

4.3.2 近似式 上記の種々の特性と、さらに相反定理を満足するたわみの影響関数の近似式として次のような式を導いた。

$$K_b(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = U \cdot v(|\bar{x} - \bar{\xi}|, |\bar{y} - \bar{\eta}|) \times \frac{f(\bar{x})f(\bar{\xi})g(\bar{x}, \bar{y})g(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{f(|\bar{x} - \bar{\xi}|)g(|\bar{x} - \bar{\xi}|, |\bar{y} - \bar{\eta}|)} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $f(\bar{x}) = \sqrt{F(\bar{x})}$, $g(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{G(\bar{x}, \bar{y})}$ 。

式(10)に4.3.1項で得られた種々の特性を代入して求めた K_b をFEMによる計算結果とともに図15に示す。図15中、実線と破線は歯先に集中荷重が作用する場合の歯先に沿っての K_b を、白丸と一点鎖線は歯面上に集中荷重が作用する場合の荷重点直下の K_b を表す。図15より、近似式(10)による結果とFEMによる結果は歯幅方向全域にわたってよく一致しており、このことから式(10)はシンマーク歯車のたわみの影響関数の近似式として妥当であると考えられる。

4.4 曲げモーメントの近似式 シンマーク歯車の歯面上の $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ 点に中央面に垂直方向の集中荷重 P が作用する場合の、危険断面(接線角度 $\theta=45^\circ$)上

の任意の点 $\bar{x}$ における曲げモーメント $M(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ は次式で表される。

$$M(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) = \beta(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot P \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\beta(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta})$: 曲げモーメント影響関数。

危険断面における曲げモーメントをFEMによる歯元応力計算結果から求めるためには、危険断面における応力集中係数を求める必要がある。ここでは二次元弾性理論と写像関数を用いて得られたシンマーク歯車の実用歯元実応力計算式⁽⁵⁾による引張、圧縮側歯元実応力 σ_t , σ_c と公称曲げ応力 σ_{tNb1} , σ_{cNb1} との比を引張、圧縮側応力集中係数 α_t , α_c , ($\alpha_t = \sigma_t/\sigma_{tNb1}$, $\alpha_c = \sigma_c/\sigma_{cNb1}$)とし、これらを用いて集中荷重による歯元実応力から公称曲げ応力を求め、さらに曲げモーメントを求めた。

図14 $F(\bar{x})$

図12 $G(\bar{x}, \bar{y})$ ($z=20, b/h=5$)

図13 $G_0(\bar{x}, \bar{y})$ の係数

図15 近似式とFEMによるたわみの比較 ($z=20, b/h=5$)

図 16 曲げモーメント影響関数

図 16 は歯幅中央先端に集中荷重が作用する場合の、 $z=20, \infty$ (ラック), $b/h=5, 7$ の場合の FEM による引張, 圧縮側歯元応力から求めた曲げモーメント影響関数 β の計算結果を示す。図 16 より, 引張側, 圧縮側における β はほぼ等しいことおよび β に及ぼす z の影響は小さいことがわかる。また, $b/h=5, 7$ に対する β はほぼ等しいことから, $b/h>7$ のシンマーク歯車に対する β は図 16 の結果にほぼ等しく, これを無限幅のシンマーク歯車に対する β とみなしてよいものと考えられる。図 16 の β を式で表すと次のようになる。

$$\beta(\bar{x}, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \frac{8.06}{(\bar{x}^2 + 2.53)^2} \dots\dots\dots (12)$$

集中荷重が歯の内点に作用する場合の $\beta(\bar{x}, 0, \bar{\eta})$ は歯先から危険断面までの長さを h で基準化した値を $\bar{h}_c$ とすると, 次式で求めることができる。

$$\beta(\bar{x}, 0, \bar{\eta}) = (1 - \bar{\eta}/\bar{h}_c) \beta(\bar{x}, 0, 0) \dots\dots\dots (13)$$

集中荷重が歯の任意の点に作用する場合の $\beta(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ は式 (13) にモーメント・イメージ法⁽⁷⁾を適用することにより求めることができる。図 17 はシンマーク歯車の歯幅中央に集中荷重 $P=5 \text{ kN}$ が作用する場合の圧縮側歯元応力分布を示す。実線は FEM による計算結果, 破線は式 (13) にモーメント・イメージ法を適用し, さらに上記の応力集中係数を用いて求めた計算結果である。図 17 より, 式 (13) に基づいて得られた歯元応力は FEM による結果とよく一致しており, 式 (13) はシンマーク歯車の歯に対する曲げモーメント影響関数の近似式として妥当であると考えられる。

5. 結 言

本研究で明らかになった諸点を要約すると次のようになる。

- (1) 集中荷重が作用するシンマーク歯車の歯の危

図 17 近似式と FEM による歯元応力の比較 ($z=20, b/h=5$, 圧縮側)

険断面位置 (最大歯元応力発生位置) は負荷位置によって接線角度 $\theta=30^\circ \sim 60^\circ$ (θ : 歯形中心線と歯元すみ肉曲線の接線のなす角) の範囲で変化するが, その中間の $\theta=45^\circ$ 位置における歯元応力と最大歯元応力の差は小さいので, $\theta=45^\circ$ 位置を危険断面位置とみなしてよいものと考えられる。

(2) 歯のたわみは歯数の減少につれて増大する傾向を示すが, 曲げモーメント分布に及ぼす歯数の影響はほとんど認められない。

(3) シンマーク歯車の歯の任意の点に集中荷重が作用する場合, 任意の点の歯のたわみおよび危険断面における曲げモーメントを求めるための近似式を導いた。

おわりに, 本研究を行うにあたり, 実験, 資料整理に熱心に協力された鳥取大学文部技官 難波千秋氏に対し深く感謝の意を表す。また数値計算は京都大学大型計算機センターの FACOM M-382 によって行ったことを付記し, 謝意を表す。

文 献

- (1) Nicholas, N., *Prod. Eng.*, Sep. 17, (1962), 91.
- (2) 寺内, 機械の研究, 19-10 (昭 42), 1299.
- (3) Kasuya, K., Nogami, M., Matsunaga, T., and Watanabe, M., *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 103 (1981), 141.
- (4) 能上・槽谷, 機械設計, 26-3 (昭 57), 47, 日刊工業新聞社.
- (5) 小田・小出・宮近・吉岡, 機論, 54-500, C(昭 63), 890.
- (6) 小田・小出・池田・梅澤, 機論, 52-473, C(昭 61), 88.
- (7) Wellauer, E. J. and Seireg, A., *Trans. ASME, Ser. B*, 82-3(1960), 213.

討 論

〔質問〕 石川 昌一

〔(株)ハーモニック・ドライブ・システムズ〕

WN 歯車の強度設計の基礎となる歯のたわみと歯元応力について、理論と実験の両面から究明された研究に敬意を表す。WN 歯車の設計に資する観点で、次の2点を質問させていただく。

(1) 実際の WN 歯車の設計では β の選び方が問題で、この面で今後どのように研究を進められるとお考えか。

(2) β と b とから定まる重なりかみあい率 ε_β は WN 歯車設計の主要な因子の一つである。 ε_β の整数部を ε'_β とするとき $\varepsilon_\beta - \varepsilon'_\beta$ が歯元応力に影響する程度を

係数として取入れる方式があるが、このようなアプローチについてどうお考えか。

〔回答〕 (1) 本報で得られたたわみの影響関数、曲げモーメント影響関数を用いて、種々のねじれ角 β_0 の WN 歯車のかみあい時の歯元応力、接触応力の解析を進めているので、ご指摘の問題については今後明らかになるものと考えている。

(2) $\varepsilon_\beta - \varepsilon'_\beta$ はかみあい状態に影響を及ぼすので、歯元応力、たわみなども $\varepsilon_\beta - \varepsilon'_\beta$ によって変化すると考えられる。この問題は、WN 歯車の強度設計式を導くうえで興味があるので今後検討を加えたい。有益なご指摘に感謝する。