ねじ締結体への境界要素法の応用*
(第3報, メラン解を用いた T フランジの応力解析)田 中 道 彦*¹, 堀 江 慎 治*²Application of the Boundary Element Method to Bolted Connection
(3rd Report, Stress Analysis of T-flange Using Melan's Solution)

Michihiko TANAKA and Shinji HORIE

This paper presents a boundary element methodology for the numerical solution of bolted connections where a clamped plate is a T-flange and there is a flat unstressed surface. The boundary element technique using Melan's solution is particularly well suited to this type of problem and reduces the data preparation necessary to solve the problem with a free flat boundary. In this paper, Melan's solution was briefly examined and the necessary fundamental solutions derived. Then, discussions were made on the distribution of contact stresses and the force ratio (a ratio of an increment of axial tension of a bolt to an external load). The numerical results are in fairly good agreement with the analytical ones obtained by the theory of elasticities.

Key Words: Fixing Element, Bolted Connection, B. E. M., Melan's solution, T-flange, Force Ratio

1. は じ め に

著者らはすでに、ねじ締結体への境界要素法の応用方法に関する基礎的な研究を行ってきた⁽¹⁾⁽²⁾。境界要素法の大きな特長は、少ないデータで精度良い解の得られることにあるが⁽³⁾、解析対象物の種類や形状および境界条件に似合った基本解を選ぶなら、要素分割すなわちデータ数をさらに少なくして精度良い解析ができる。

ねじ締結されるものの多くは形状も単純で、表面力の作用しない自由境界を有するものが多い。境界要素法の考え方の基本は、一種のグリーン関数法と同じであり、その解は積分の核となる基本解が与えられれば、求まる。したがって、その基本解として解析対象物の自由境界条件を一部に含む解を採用するなら、境界表面の分割をその分だけ少なくすることができる。本論文では、周辺境界の大部分が自由表面である T フランジを境界要素法解析する場合の基本解としてメラン解を用いる場合について研究した。

メラン解は、半無限平板の解であり、土質力学など

の分解でよく使われているものである⁽⁴⁾⁽⁵⁾。このメラン解を用いれば、T フランジなどの自由表面を有するねじ締結体の解析が、比較的少ない要素分割で行うことができ、応力解析や内力係数などの計算も簡単に行える。とくに、表面力の全く作用しない自由境界のみならず、表面力の接線方向あるいは法線方向の成分が零の境界も広義の自由表面であることから、T フランジなどの形状や負荷形態がほぼ定まっている系の解析に、メラン解を用いた境界要素法解析は有効である。

T フランジの内力係数の求め方については、これを有限長帯板にモデル化して弾性論的に解析する方法が沢らにより紹介されている⁽⁷⁾。この方法は、複雑な形をしたエアリの応力関数を境界条件にあわせて求めていくものであり、その計算法は一般的にみて難しい。そこで本研究では、最近新しい数値解析法として登場してきた境界要素法を T フランジの応力・変位解析に応用し、最近の自動強度解析の傾向に対応した正確かつ簡便な計算法について検討する。境界要素法を T フランジなどの機械要素の解析に応用していく利点は、入力データが少なく、計算容量も小さいうえ、さまざまな形状について簡単に計算が行える点にある。

* 昭和 63 年 3 月 14 日 東海支部第 37 期総会講演会において講演、原稿受付 昭和 62 年 7 月 23 日。

*¹ 正員、信州大学工学部 (〒380 長野市若里 500)。

*² 正員、富士通(株)VLSI (〒487 春日井市高蔵寺町 2-1844-2)。

2. メラン解の境界要素解析への応用

線形弾性問題の近似数値解析においては、系の支配方程式や境界条件式などに重み関数を掛けて、これを領域全体で積分したものが零となるよう重みつき残差法的に評価していく。この重み関数を領域内の微小要素ごとに定めていく方法がガラーキン法的な有限要素法である。これに対して、この重み関数自体も系の支配方程式を満足するものとして、領域内部の積分評価を行わないで、境界成分のみを計算の対象としていく方法が境界要素法である。境界要素法はグリーン関数法に類似しており⁽⁶⁾、被積分関数の核となる基本解が既知であるなら、与えられた境界条件における解を求めることができる。

境界要素法で用いる境界積分方程式は、

$$c_{ki}^* u_i^t + \int_s p_{ki}^* u_i dS = \int_s u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_s u_{ki}^* p_i dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

であり⁽¹⁾、被積分関数 p_i , u_i , b_i は表面力、変位および物体力である。 u_i^t は荷重点での変位、 c_{ki}^* は荷重点における特異積分の評価値、また $\int dS$ と $\int d\Omega$ は、各々境界および領域積分である。核 p_{ki}^* , u_{ki}^* は基本解であり、一般的な静弾性問題には、無限体での解であるケルビン解が使われる。基本解は系の支配方程式を満足するものでなくてはならないが、これが与えられた境界条件の一部をも満たすものであるなら、解析対象となる境界部分がその分だけ少なくなる。ねじ締結体には、T フランジなどのように平面的な自由境界を数多く有する二次元弾性体とみなせるものが多いが、本研究では、このような解析に都合の良いメラン解を境界

(a) 鉛直方向荷重 (b) 水平方向荷重

図1 半無限平面に働く力

要素解析に応用し、T フランジの解析を行った。

メラン解とは、図1に示すように半無限平板内部に集中荷重の作用する場合の解であり⁽⁴⁾、荷重が鉛直方向と水平方向とに作用する二つの場合について与えられている。それらの解は、ゴルブノフ・パサドフにより検討・修正され、土質力学を始めとして多くの文献で紹介されている⁽⁵⁾。

このメランの解を、表面力と変位の式に変換して式(1)に適用し、各境界要素ごとに数値的に積分を評価していけば、未知の表面成分に関しての係数方程式が得られる。この際に、式(1)の特異積分 c_{ki}^* を数値的に評価していけば、その値はメラン解での半無限平板内部に作用させた集中荷重の大きさ(内部)、あるいはその半分(滑らかな境界)となるはずであるが、一般に紹介されているメラン解はこの条件を満たさず、その解の一部に誤りのあることがわかる。メランにより半平面での応力関数は、求められており⁽⁴⁾、これを使って応力と変位を検討していくことができる。

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi} \left\{ \frac{(m+1)}{2m} \left[\frac{(z-d)^3}{r_1^4} + \frac{(z+d)[(z+d)^2 + 2dz]}{r_2^4} - \frac{8dz(d+z)x^2}{r_2^6} \right] + \frac{(m-1)}{4m} \left[\frac{(z-d)}{r_1^2} + \frac{(3z+d)}{r_2^2} - \frac{4zx^2}{r_2^4} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma_x = \frac{Qx}{\pi} \left\{ \frac{(m+1)}{2m} \left[\frac{x^2}{r_1^4} + \frac{(x^2 - 4dz - 2d^2)}{r_2^4} + \frac{8dz(d+z)^2}{r_2^6} \right] + \frac{(m-1)}{4m} \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{3}{r_2^2} - \frac{4z(d+z)}{r_2^4} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$v = \frac{Q}{\pi E_1} \left\{ \frac{1}{2}(1+\xi) \left[-\frac{x(z-d)}{2r_1^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{z-d}{x} + \frac{4dx}{r_2^2} - \frac{(z+d)x}{2r_2^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{(z+d)}{x} - 2dx \frac{(z+d)d+x^2}{r_2^4} \right] - \frac{(1-\xi)}{4} \left[\tan^{-1} \frac{(z-d)}{x} - 3 \tan^{-1} \frac{(z+d)}{x} + 2 \frac{zx}{r_2^2} \right] - \frac{\xi}{2}(1+\xi) \left[\frac{x(z-d)}{2r_1^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{(z-d)}{x} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{(z+d)}{x} + x \frac{(z+d)}{2r_2^2} - 2dx \frac{(z+d)}{r_2^4} \right] - \frac{\xi}{4}(1-\xi) \left[\tan^{-1} \frac{z-d}{x} + \tan^{-1} \frac{(z+d)}{x} + 2 \frac{zx}{r_2^2} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$m = 1/\xi = (1-\nu)/\nu, E_1 = E/(1-\nu^2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(2)~(4)は、文献(4)、(5)により表現の異なるメラン解の一部について、一部の係数の値を修正した解を

正しい形で示したものとなっている。式(2)は、図1(a)の鉛直方向(z 軸方向)の荷重 P が加わる場合の z 方向の応力 σ_z であり、文献(4)のほうが正しい。式(3)と式(4)は図1(b)の水平方向(x 軸方向)の荷重 Q が作用するときの x 方向の応力 σ_x と z 方向の変位 v である。ここで、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比、 d は荷重点の距離、 r_1 、 r_2 は影響点までの距離である。式(3)はゴルブノフ・パサドフによる修正と同じである⁽⁵⁾。式(2)~(4)を含めたメラン解は平面応力の場合であり、これに式(5)の変換を施した平面ひずみ解と、ケルビン解⁽¹⁾と補助解⁽⁶⁾の和で示される半平面の解とは、変位解の剛体変位分を除いて一致している。本研究では、式(2)~(4)を考慮したメラン解において、 $\tau_{11}=\sigma_x$ 、 $\tau_{22}=\sigma_z$ 、また τ_{12} をせん断応力 τ_{xz} とおき、 u_1 を x 方向の変位 u 、 u_2 を v とすれば、式(1)に必要な基本解は、

$$u_{ki}^* = u_i \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$p_{ki}^* = n_j \tau_{ij} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここで、 $k=1$ の時には水平方向の荷重 Q が、 $k=2$ の時には鉛直方向の荷重 P が作用する場合である。また、 n_i は境界表面に立てた法線ベクトルである。Tフランジを物体力の作用しない二次元弾性体と

みなし、メラン解をその境界要素法解析に適用すれば、表面力の作用しない自由表面を考慮した解析を行うことができる。解析に用いた弾性定数は、縦弾性係数が $E=206$ GPa、ポアソン比 $\nu=0.3$ である。

3. Tフランジの解析

Tフランジについては、沢らによる弾性論的および実験的な研究がある⁽⁷⁾。本研究では、本解析法および式(2)~(4)の有効性を確かめるため、沢らと同じ有限長帯板モデルを使用した解析を行い、弾性論解と比較・検討を行った。図2は内力係数を求めるためのモデルであるが、修正係数 K_c/K_{pe} は、外力 W が区間 $2b$ に作用した時の座面の平均変位 ε_1 を用いた引張りバネ定数

$$K_{pe} = (W/2)/(2\varepsilon_1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

と、分布力 F_b が座面に作用した時の座面の平均変位 ε_2 を用いた被締結体の圧縮バネ定数

$$K_c = F_b/(2\varepsilon_2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

より求める⁽⁷⁾。

図3は、本解析に用いた図2のモデルでの $L=60$ mm、 $H=30$ mmの場合の境界要素分割モデルであるが、対称性を考慮して上半分のみをモデル化している。また、繰返し収束計算を避けるため、接合面には摩擦が作用しないものと仮定して、図3の下端部は変位の垂直成分を固定としてある。また、解析の都合上、一

(a) K_{pe} 算出のためのモデル

(b) K_c 算出のためのモデル

図2 Tフランジモデル

Constant Elements

Total nodes :34 Total elements :34 Cells :4

(a) K_{pe} 算出のためのモデル

Constant Elements

Total nodes :34 Total elements :34

(b) K_c 算出のためのモデル

図3 境界要素モデル

(a) 変位の比較

(b) 応力の比較

図4 P_1 を与えた場合の変位と応力の比較

(a) 変位の比較

(b) 応力の比較

図5 P_2 を与えた場合の変位と応力の比較 ($C=27.5$)

(a) 変位の比較

(b) 応力の比較

図6 P_2 を与えた場合の変位と応力の比較 ($C=35.0$)

(a) 変位の比較

(b) 応力の比較

図7 P_2 を与えた場合の変位と応力の比較 ($C=42.5$)

定要素により分割し、平面応力問題として扱った。

図3(a)は、同図(b)と同じモデルであるが、外力 W が作用する領域のセル要素も併せて表示したものとなっている。すなわち、外力の分布 W を物体力的に考えて、式(1)の物体力項を

$$\int u_{ki}^* b_i d\Omega = \int u_{ki}^* W_i dS \quad \dots\dots\dots (10)$$

と境界積分として扱っている。

これらのモデルの上端は自由境界表面であり、要素分割は必要ないが、外力を作用させるためのセル要素および $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の計算に必要な部分は分割してある。いずれにしても、メラン解は自由境界の条件を自動的に満足しているため、解析に必要な要素分割数はかなり少なくなる。なお、図2において H は厚さ、 $2a$ はボルト座面径、 C はフランジの中心からボルトの中心までの距離である。

図4(a), (b)はそれぞれ、面圧 P_1 を与えた時のフランジ上面の変位と接触応力の分布を示したものである。また、図5, 6および図7は面圧 P_2 を与えた時のフランジ上面の変位と接触応力の分布を、それぞれ(a), と(b)に示したものである。これらは、 $C=27.5, 35.0, 42.5$ mmのそれぞれの場合についての結果であり、沢による解と比較したものとなっている。解析は、いずれも $H=30$ mm, $2a=24$ mm, $2b=18$ mmの場合であり、これら境界要素解析の結果は弾性論による解と良く一致することがわかる。解析は、接合面が分離しない範囲を行った。これらを、沢らと同じ要領で解析結果を整理する。まず、図4(a)より、各 C についての引張りバネ定数 K_{pt} が得られる。また図5(a), 6(a), 7(a)より各 C に対する圧縮バネ定数 K_c が得られる。分離開始の外力の大きさは、図4(b)と図5(b), 6(b), 7(b)を重ね合わせることで推定できる。図7(b)の結果は、沢らの解析結果とわずかに異なるが、これは本解析では対称性を考慮した接触問題の解析であり、一体化した有限長帯板の弾性論解析とは、その解析モデルが異なることに原因していると思われる。

これらの結果から修正係数 K_c'/K_{pt} を求め、内力係数を

$$\phi = [K_t / (K_t + K_c)] (K_c' / K_{pt}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

によって計算できる。ただし K_c は、沢らに従って、柴原の方法⁽⁹⁾より求める。このようにして求めた修正係数および内力係数を表1に示す。 K_t は文献(10)により求められ、その値は $K_t = 444.9$ N/ μ m, また $K_c = 1419$ N/ μ m, Thum による内力係数は $\phi_0 = 0.2386$ である。表1によると、境界要素解析より求められた結果は沢

による弾性論の結果と同様に、Thumの値と比べて、実験値⁽⁷⁾に近い値を示していることがわかる。

また、式(2)~(4)でメラン解を修正して行った境界要素解析では、式(1)中の特異積分 c_{ki} の数値積分と剛体変位的に正しく評価できるほか、上述したように弾性論解ともよく一致しており、式(2)~(4)の正しいことがわかる。

以上、本研究ではメラン解をTフランジに応用する基本的な場合について論じてきた。図2, 3のような左右対称な構造物は要素数をさらに少なくできるし、また対称性が上下・左右とも成り立たないもっと複雑な場合の接触問題についても、取扱いは全く同じである⁽¹⁾⁽²⁾。

4. ま と め

本研究では、ねじ締結体の簡易解析法の基礎研究として、境界要素法の応用方法について検討した。また、応力分布や内力係数に関して沢らの行った理論および実験解析をもとに、具体的なTフランジを解析し、以下の結論を得た。

- (1) メラン解を初めて境界要素解析に応用した。
- (2) この際、メラン解の係数の一部を修正した。
- (3) これにより、剛体運動の許容条件より特異積分 c_{ki} を数値的に求めた値が厳密な値と一致する。
- (4) 本方法により、Tフランジなどの自由境界を有する平面問題が、少ない要素分割で簡単に解析できるようになった。
- (5) 本方法によるTフランジの解析結果は弾性論による解と良く一致する。
- (6) 境界要素法の導入により、接触を考慮したTフランジの解析が可能となった。
- (7) 本方法によりねじ締結されたフランジの内力係数が簡単に精度良く求まり、実験値⁽⁷⁾とよくあう。

表1 二次元モデルの比較

C		27.5mm	35.0mm
K_c' / K_{pt}	Two-Dim ⁽⁷⁾	0.2566	0.0777
	BEM	0.1525	0.0386
ϕ Force ratio	Two-Dim ⁽⁷⁾	0.0612	0.0185
	BEM	0.0364	0.00921
	Thum ⁽⁷⁾	0.2386	0.2386
	実験値 ⁽⁷⁾	0.043	0.013

5. あ と が き

領域内部を離散化していく有限要素法とは異なり、境界積分方程式を直接数値解析していく境界要素法では、離散化が主に境界表面を対象としているため、精度が良く、解析に必要なデータも著しく少なくなる。このことは、ねじや歯車などのように形状がほぼ規格化されている機械要素の強度解析作業を簡単化することが可能となる⁽¹¹⁾。また内挿関数を工夫することにより、ねじの三次元的な形状すなわち螺旋面を考慮した弾性解析も可能となる⁽¹²⁾。境界要素法の登場により機器の強度解析手法も多様化し、さまざまな工夫が行われるようになってきている。

本論文では、ねじ締結体への境界要素法の応用方法に関する研究の一環として、自由表面を有する T フランジの二次元解析法について取り上げた。本方法は、T フランジを有限長帯板とみなした解析に限らず、フランジの軸部を考慮した凹凸のある T フランジの解析や半無限板上での T フランジの振舞いなども解析できる利点がある。また、歯車などを含む他の多くの機械要素においても、メラン解を応用した簡単な解析が可能となるであろう。これらの問題については、今後の課題としていきたい。また、複雑な形をした構造物の解析にはケルビン解⁽¹⁾を用いねばならないが、半

平面の解を補助解⁽⁸⁾で補正していく形式を採用していくなら、より汎用的なプログラムの開発が期待できる。

終わりに本研究を遂行するにあたって貴重なご教示をいただいた工学院大学の北郷薫教授、山梨大学の沢俊行助教授、また研究にご協力いただいた信州大学の林光彦技官に感謝の意を表す。なお、本研究の数値計算は信州大学情報処理センターの HITAC-M 240 H を使用した。

文 献

- (1) 田中, 機論, 49-441, C (昭 58), 811.
- (2) 田中, 機論, 51-469, C (昭 60), 2357.
- (3) 田中, 設計製図, 19-108 (昭 59), 3.
- (4) Melan, E., *Z. Angew. Math. Mech.*, Ht 6 (1932), 343.
- (5) 大草訳, フローリンの土質力学, 1 (昭 44), 165, 森北出版.
- (6) 関谷訳, 応用グリーン関数, (昭 58), 20, プレイン図書出版.
- (7) 沢・ほか 2 名, 機論, 48-432, C (昭 57), 1200.
- (8) Brebbia, C. A., ほか 2 名, *Boundary Elements Technique-Theory and Application in Engineering*, (1984), 458, Springer-Verlag.
- (9) 柴原, 設計製図, 15-80 (昭 55), 27.
- (10) 沢・丸山, 機論, 41-346, C (昭 50), 1917.
- (11) 田中, 機論, 50-455, C (昭 59), 1314.
- (12) Tanaka, M., *Boundary Elements VIII*, (1986), 123, Springer-Verlag.

討 論

〔質問〕 沢 俊 行〔山梨大学工学部〕

質問者らがかつて行った研究に対し、BEM という他の観点よりの検討を行われたことに感謝する。

(1) 図 4~7 の変位の結果を拝見すると、弾性論による結果と貴結果では座面相当部分でその差はかなり小さいように思える。しかしこの結果を用いて求める表 1 の K_t/K_{pt} および内力係数の値はかなりの差があるように思える。この原因についてお伺いしたい。

(2) (1)とも関連するが、表 1 の内力係数の BEM による結果は実験値よりやや小さいと思われる。ボルトの強度の観点からは問題とも思うがいかかか。さらにボルトの強度からはボルトの最大応力が必要であるが、もし検討されていればお教え願いたい。

(3) 著者らの研究〔文献(2)など〕を発展させて、貴研究の場合にもボルト穴およびボルト・ナットを一体として取扱うことはできないものか。見通しがあればお教え願いたい。

〔回答〕 内力係数および T フランジなど数多く

の実績をお持ちの質問者からの貴重なご質問に感謝する。

(1) ご指摘のように、二つの解析結果は非常にちかくなっているが、 K_t/K_{pt} および内力係数などは、解析結果の一部の平均的な値から算出するため、わずかな結果の相違も内力係数に影響すると考えられる。モデルを変えた追解析^(付1)でもやはり同じような結果が得られている。

(2) これも質問(1)に関係している。本研究のモデルでは、平板を一定要素で近似しており、結果の微妙な差がやや小さめの値を与えたものと思われるが、実験値にはいちばん近い結果を与えている。本研究を発展させて、T フランジの軸部を考慮するモデルを変えた追解析⁽¹⁾でも、実験値に近い値となっているが、実験値よりやや大きめとなっている。ねじ締結体の信

(付1) 有賀・ほか 5 名, 日本機械学会北陸信越支部卒業研究発表講演会講演論文集, (昭 58-3), 30.

頼設計の観点からは、解析が簡便なことのみならず、実験値すなわち実際に近い値の得られることも重要と考える。

(3) 文献(2)では、三次元軸対称境界要素法を扱っており、ボルト・ナットを含めることは容易であったが、二次元問題ではボルトなどを材料力学的な観点から含めるなどの工夫が必要と思われる。田中氏より類似した質問をいただいております、これを参照していただければ幸いです。

〔質問〕 田 中 稔〔室蘭工業大学〕

(1) 貴研究では内力係数を求めることに主眼が置かれていると考えるが、ねじ締結体ではボルトに追加される軸力や曲げ応力が問題になると考えられる。二次元の問題として解析する場合どのようなモデルとなるのかお教え願いたい。

(2) 境界要素法による解析はパーソナルコンピュータ向きと言われているが、貴研究の場合、パーソナルコンピュータで解析した経験があれば、解析にどれくらい時間がかかるかお教え願いたい。

〔回答〕 (1) 平面問題では、ボルトなどを直接含めた形で境界要素モデルを作ることは難しい。ボルト部を考慮するなら、この部分のみを材料力学的に取扱うか、あるいは系全体を三次元境界要素法で扱うかである。本研究では、文献(7)にならってボルト部を間接的に取扱っているが、ご指摘の点は重要であり、今後の研究への課題としていきたい。

(2) 本研究では、あとがきで述べているように、大形計算機 HITAC M 240 H により解析している。大形計算機とパーソナルコンピュータレベルの小形計算機では、演算処理能力や速度において比較できないほどの格段の差がある。パーソナルコンピュータを有効に使う方法は、インテリジェントターミナルとして大形計算機に接続し、前後処理に使用する方法を本研究室では採用している。大形計算機のほうが処理時間がはるかに短いため、多節点での境界要素解析をパーソナルコンピュータで行ったことはないが、著者がベシックで作成したケルビン解での平面問題の境界要素プログラムの場合、8 節点のモデルで約 10.57 s (NEC 9801/VX) であった。ただし、数値積分や代数方程式の解法などのルーチンをマシン語などであらかじめ作成しておいて、これをベシック上からコールする方法となっている。節点数が増えると、処理時間は約二乗の割で増えるが、境界領域のみ分割すればよいことからパーソナルコンピュータでも簡単な境界要素法解析は十分に可能である。境界要素法をパーソナルコンピュータで使う場合にも、大形計算機と同様にフォートランなどのコンパイラ形の言語を使うなら、処理時間をさらに短くできる。いずれの場合でも、パーソナルコンピュータレベルでの実際的な解析は、大形計算機と比べると、多大なる時間を必要とするが、大形計算機を有しない現場などでは有力な数値解析上の武器になると思われる。