模擬クラックを有する回転軸の振動*

(第 2 報, 解析)

岩 田 佳 雄^{*1}, 佐 藤 秀 紀^{*1}
川 崎 幸 雄^{*2}, 田 村 章 義^{*3}

Vibration of a Rotor with Imitation Crack (2nd Report, Analysis)

Yoshio IWATA, Hidenori SATO,
Yukio KAWASAKI, and Akiyoshi TAMURA

A vibration of the rotor with imitation crack was experimentally studied in the first report and it was shown that the additional resonances at $1/2$, $1/3$, $1/4$ and $1/5$ of the critical speed and the unstable vibration at $2/3$ of the critical speed are caused by the imitation crack. Since the rotor with imitation crack is qualitatively modeled to a cracked shaft with a disk, the unstable vibration and the forced vibration of the modeled rotor have been analyzed in this paper. As a result, it is obtained that the unstable regions exist at 2 times, a time, $2/3$ and $1/2$ of the critical speed and that the resonances are caused at $1/2$, $1/3$, $1/4$ and $1/5$ of the critical speed by a gravity effect. Then the relation between the experimental result in the first report and the influence of the crack is discussed.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Cracked Rotor, Imitation Crack, Unstable Vibration, Forced Vibration

1. 結 論

第 1 報において模擬クラックを有する回転軸の構造を示し, この回転軸はクラック軸に 1 個の円板が取付けられた回転軸として定性的に考えることができることを述べた。そしてその回転軸を水平に支持したときの動的応答, すなわち振幅応答曲線および振動波形の周波数分析についての実験を報告した。その結果からクラックが大きいときには主危険速度の $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ において共振現象が生じること, および主危険速度の $2/3$ 付近において不安定振動が発生することが得られた。これらの現象はクラックが原因となって発生するということを理論的にも確認するために, クラックを有する回転軸の振動を解析する必要がある。過去の報告において, 不安定振動の発生は数値積分⁽¹⁾やアナログ計算機⁽²⁾によって予想されたものがみうけられ, 振幅応答曲線については主危険速度の $1/2$ と $1/3$ の共振を扱ったものが多くみられる^{(2)~(6)}。本報ではクラックを有する一円板回転軸の不安定領域を解析的に

求めることを試み, さらに 5 次までの回転数の成分を考慮して強制振動解析を行い, 第 1 報の実験との比較を行った結果を報告する。

2. 運動方程式

図 1 に示すように水平方向に x , 鉛直方向に y をとり, クラック全開のときの軸の曲げ剛性の主軸方向に一致するように ξ と η を軸断面上に固定する。このとき軸が角速度 Ω で回転するならば, ξ, η は x, y に対して角速度 Ω で回転する回転座標系になる。回転軸を水平に支持した場合の重力の影響を加味し, かつ微小変位を前提とするならば, ξ 方向と η 方向のそれぞれの軸のばね定数 k_ξ と k_η を次のように仮定することができることを第 1 報において示した。

$$\left. \begin{aligned} k_\xi &= \frac{1}{2} \{ (k_0 + k_1) + (k_0 - k_1) \cos \Omega t \} \\ k_\eta &= \frac{1}{2} \{ (k_0 + k_2) + (k_0 - k_2) \cos \Omega t \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

k_0 はクラックなしのとき (クラックが閉じたとき) のばね定数, k_1, k_2 はそれぞれクラック全開のときの ξ, η 方向のばね定数である。軸にクラックを有する一円板回転軸の運動方程式は回転座標系において重力と不釣合いの作用を考慮して式 (2) のように表せる。ただ

* 昭和 63 年 3 月 31 日 第 65 期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和 62 年 8 月 14 日。

^{*1} 正員, 金沢大学工学部 (〒920 金沢市小立野 2-40-20)。

^{*2} 学生員, 金沢大学大学院。

^{*3} 正員, 拓殖大学工学部 (〒193 八王子市館町 815-1)。

し回転軸は等方性支持されているものとし、軸部の質量を無視する。

$$\begin{aligned} M\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-2\Omega\frac{d\eta}{dt}-\Omega^2\xi\right)+C\left(\frac{d\xi}{dt}-\Omega\eta\right) \\ +k_\xi\xi=Mg\sin\Omega t+Mr\Omega^2\sin\phi \\ M\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}+2\Omega\frac{d\xi}{dt}-\Omega^2\eta\right)+C\left(\frac{d\eta}{dt}+\Omega\xi\right) \\ +k_\eta\eta=Mg\cos\Omega t-Mr\Omega^2\cos\phi \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

M は円板質量, g は重力加速度, r は円板重心 G の偏心量を示す。 ϕ はその偏心の方向で、クラック方向 ($-\eta$ 方向) を基準にしてある。後に減衰の影響を調べるために外部減衰係数 C を考慮した。式(2)の運動方程式においては簡単のためにジャイロ効果および円板の傾きの影響を無視した。式(2)を固定座標系 x, y に変換し、式(1)を代入するならば固定座標におけるクラック軸の運動方程式を得る。ここで、 $z=x+jy$ なる複素表示を使用するとその運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} M\frac{d^2z}{dt^2}+C\frac{dz}{dt}+Kz+\Delta K(e^{j\Omega t}+e^{-j\Omega t})z \\ -\Delta k(e^{j\Omega t}-2e^{j2\Omega t}+e^{j3\Omega t})\bar{z} \\ =jMg-jMr\Omega^2e^{j(\Omega t+\phi)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\bar{z}$ は z の共役複素数, $K, \Delta K, \Delta k$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K &= (2k_0+k_1+k_2)/4 \\ \Delta K &= (2k_0-k_1-k_2)/8 \\ \Delta k &= (k_1-k_2)/8 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

運動方程式(3)を次のように無次元化する。

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\tau^2}+2\zeta\frac{du}{d\tau}+u+x_1(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau})u \\ -x_2(e^{j\omega\tau}-2e^{j2\omega\tau}+e^{j3\omega\tau})\bar{u} \\ =j(1-\varepsilon\omega^2e^{j(\omega\tau+\phi)}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \Omega/\Omega_n, \quad \Omega_n = \sqrt{K/M}, \quad \zeta = C/(2\sqrt{MK}) \\ \tau &= \Omega_n t, \quad x_1 = \Delta K/K, \quad x_2 = \Delta k/K \\ u &= z/s, \quad \varepsilon = r/s, \quad s = Mg/K \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

図1 座標系

x_1 はクラックが生じたときの軸剛性の低下, x_2 はクラックによる軸剛性の異方性に関するパラメータで、それぞれ微小量である。クラックが深くなると軸剛性の異方性も大きくなるので、 x_2 の大きさはクラックの深さに対応する。

3. 不安定振動解析

クラックを有する回転軸の不安定振動を解析するために無次元化された運動方程式(5)の右辺を零に置いた次の自由振動の方程式を対象とし、太田らの方法⁽⁷⁾を利用して解析的に不安定振動を調べる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{d\tau^2}+2\zeta\frac{dw}{d\tau}+w+x_1(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau})w \\ -x_2(e^{j\omega\tau}-2e^{j2\omega\tau}+e^{j3\omega\tau})\bar{w}=0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに w は自由振動のときの無次元化された変位を表す。式(7)において不減衰系 ($\zeta=0$) の場合の近似解 w_0 を、太田らが偏平軸の不安定振動を解析したときの逐次近似法を利用して求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} w_0 &= Ae^{jp\tau}+ae^{j(\omega+p)\tau}+be^{j(\omega-p)\tau} \\ &+ce^{j(-\omega+p)\tau}+de^{j(2\omega-p)\tau}+fe^{j(3\omega-p)\tau} \\ &+ae^{j(-p)\tau}+\beta e^{j(2\omega+p)\tau}+\gamma e^{j(-2\omega+p)\tau} \\ &+\delta e^{j(4\omega-p)\tau} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに p は振れ回りの角速度, A はふれまわりの振幅, a, b, c, d, f は微小量の大きさの振幅, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は2次の微小量の大きさの振幅を表す。3次以上の微小量に関しては無視した。減衰を考慮した場合にも近似解は式(8)で表されるものとし、さらに解の安定性を判別するために式(7)の近似解を次のように表す⁽⁸⁾。

$$w=e^{-q\tau}w_0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし減衰の存在によって位相差が生じるので、式(8)の各ふれまわりの振幅は複素数になる。式(9)において $\lambda=p+jq$ とおき、それを式(7)に代入して各調波の係数比較を行うと次の振動数方程式を得る。

$$(M\lambda^2+C\lambda+K)w=0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし w, M, C, K の内容については付録に記す。

第1報の実験において最も深いクラックのときには $x_1=0.056, x_2=0.038$ になる。そこでそれらに近い値として $x_1=0.05, x_2=0.04$ の軸を対象に $\zeta=0$ のときの ω に対する固有振動数 λ を計算した。それを図2に示す。斜線部は不安定領域を表す。すなわち斜線部において λ は共役複素数として求められるので λ の虚数部 q が負になる場合がある。このとき式(9)から振動が発散することがわかる。このような不安定振動は主危険速度の2倍, 1倍, 2/3倍, 1/2倍付近に現れるが、その順で不安定領域の幅は狭くなり、特に1/2倍の場

合には著しく狭い。 x_1 および x_2 が不安定領域の幅に及ぼす影響を図3に示す。図3(a)は x_1 を0.05で一定として x_2 の影響を見た場合、図3(b)は x_2 を0.05で一定として x_1 の影響を見た場合を示しているが、 x_1 は不安定領域の幅にほとんど影響せず、主にクラックによって生じる軸剛性の異方性 x_2 、すなわちクラックの深さが不安定領域の幅に大きく影響することがわかる。そこで図3(a)の場合について外部粘性減衰率 ζ の影響を調べた結果を図4に示す。不安定領域の幅の狭いもののほど減衰によって不安定領域が狭くなり、特に主危険速度の1/2の不安定領域はわずかな減衰が存在しただけで消滅する。実験では主危険速度の2/3付近において不安定振動が観察されたので、本解析結果と一致する。しかし2/3以外の不安定領域の存在は共振現象との区別ができず、実験において確認が困難であった。

4. 強制振動解析

第1報の実験において振幅応答曲線の測定結果を示し、クラックが存在した場合には主危険速度以外にその1/2, 1/3, 1/4, 1/5付近でピークが生じることがわかった。そのような共振現象の存在を解析によって明らかにするために式(5)の強制振動の運動方程式の解を近似的に求める。強制振動解として軸回転数の5次までの調波を考慮し、式(5)の解を次のようにおく。

$$u = \sum_{n=-5}^5 U_n e^{jn\omega t} \quad \dots\dots\dots (11)$$

図2 λ - ω 線図 ($x_1=0.05, x_2=0.04$)

式(11)を式(5)に代入し、各調波の係数比較を行うと、次の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} (1-25\omega^2-j10\omega\zeta)U_{-5}+x_1U_{-4} &= 0 \\ x_1U_{-5}+(1-16\omega^2-j8\omega\zeta)U_{-4}+x_1U_{-3} \\ &\quad -x_2\bar{U}_5=0 \\ x_1U_{-4}+(1-9\omega^2-j6\omega\zeta)U_{-3}+x_1U_{-2} \\ &\quad -x_2\bar{U}_4+2x_2\bar{U}_5=0 \\ x_1U_{-3}+(1-4\omega^2-j4\omega\zeta)U_{-2}+x_1U_{-1} \\ &\quad -x_2\bar{U}_3+2x_2\bar{U}_4-x_2\bar{U}_5=0 \\ x_1U_{-2}+(1-\omega^2-j2\omega\zeta)U_{-1}+x_1U_0 \\ &\quad -x_2\bar{U}_2+2x_2\bar{U}_3-x_2\bar{U}_4=0 \\ x_1U_{-1}+U_0+x_1U_1-x_2\bar{U}_1+2x_2\bar{U}_2-x_2\bar{U}_3 &= j \\ x_1U_0+(1-\omega^2+j2\omega\zeta)U_1+x_1U_2-x_2\bar{U}_0 \\ &\quad +2x_2\bar{U}_1-x_2\bar{U}_2=j\epsilon\omega^2e^{j\theta} \end{aligned}$$

図3 x_1 および x_2 が不安定領域に及ぼす影響 ($\zeta=0$)

図4 減衰の影響 ($x_1=0.05$)

$$\begin{aligned}
& x_1 U_1 + (1 - 4\omega^2 + j4\omega\zeta) U_2 + x_1 U_3 \\
& - x_2 \bar{U}_{-1} + 2x_2 \bar{U}_0 - x_2 \bar{U}_1 = 0 \\
& x_1 U_2 + (1 - 9\omega^2 + j6\omega\zeta) U_3 + x_1 U_4 \\
& - x_2 \bar{U}_{-2} + 2x_2 \bar{U}_{-1} - x_2 \bar{U}_0 = 0 \\
& x_1 U_3 + (1 - 16\omega^2 + j8\omega\zeta) U_4 + x_1 U_5 \\
& - x_2 \bar{U}_{-3} + 2x_2 \bar{U}_{-2} - x_2 \bar{U}_{-1} = 0 \\
& x_1 U_4 + (1 - 25\omega^2 + j10\omega\zeta) U_5 - x_2 \bar{U}_{-4} \\
& + 2x_2 \bar{U}_{-3} - x_2 \bar{U}_{-2} = 0 \\
& \dots\dots\dots (12)
\end{aligned}$$

式(12)の方程式から任意の ω に対する x 方向と y 方向の各調波の振幅を計算することができる。図5に $x_1=0.05$, $\zeta=0.01$, $\varepsilon=0.1$, $\phi=0.0$ の系に対し x_2 を0.01, 0.02, 0.04とした場合の x 方向の振幅応答曲線の計算結果を示す。振動波形の振幅は各調波の振幅を加算することによって近似的に評価されている。 y 方向の振幅応答曲線は x 方向のものと同一傾向を示したので省略した。クラックがない場合には $\omega=1$ 付近の主危険速度においてだけピークが生じるが、図5からクラックがある場合には主危険速度の1/2, 1/3, 1/4, 1/5付近にピークが発生し、 x_2 すなわちクラックの深さが増すにつれてそれらのピーク値が大きくなっていることがわかる。なお、1/2, 1/3, 1/4, 1/5の順序でピークの大きさは小さくなり、特に1/5のピークは著しく小さい。図5では ε の値を与えて計算したが、 ε が零の場合には主危険速度付近の曲線が変化するだけで1/2, 1/3, 1/4, 1/5のピークには影響しなかった。したがって、1/2, 1/3, 1/4, 1/5における共振は重力の影響によって生じたものと考えられる。 ϕ が主危険速度付近の応答に及ぼす影響については他の文献⁽²⁾⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾にも報告されているので省略する。

5. 結 論

第1報の実験結果に対する理論的確証を得るために、軸にクラックを有する一円板回転軸の運動方程式を重力の影響を考慮して導き、その不安定振動解析と強制振動解析を行った。そして次の結果を得た。

付 録

$$w = \{A, a, \bar{b}, c, \bar{d}, \bar{f}, \bar{a}, \beta, \gamma, \bar{\delta}\}^T \dots\dots\dots (13\cdot a)$$

$$M = -I \quad (I \text{ は単位行列}) \dots\dots\dots (13\cdot b)$$

(a) $\kappa_2 = 0.01$

(b) $\kappa_2 = 0.02$

(c) $\kappa_2 = 0.04$

図5 クラックを有する回転軸の振幅応答曲線の計算結果 ($x_1=0.05$, $\zeta=0.01$, $\varepsilon=0.1$, $\phi=0.0$)

- (1) 主危険速度の2倍, 1倍, 2/3倍, 1/2倍付近において不安定振動が発生する。
- (2) 重力の影響によって主危険速度の1/2, 1/3, 1/4, 1/5付近に共振現象が現れる。
- (3) 実験による振幅応答曲線の測定から、主危険速度の1/2, 1/3, 1/4, 1/5付近における振幅のピークおよび2/3付近における不安定振動が観察されたが、これらはクラックの影響によって発生したものであることを解析からも確認することができた。

$$C = \begin{bmatrix} j2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega + j2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega + j2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega + j2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\omega + j2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\omega + j2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j2\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\omega + j2\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\omega + j2\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\omega + j2\zeta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13 \cdot c)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & -x_2 & x_1 & 2x_2 \\ x_1 & 1 - \omega^2 + j2\omega\zeta & 2x_2 & 0 & -x_2 \\ -x_2 & 2x_2 & 1 - \omega^2 - j2\omega\zeta & 0 & x_1 \\ x_1 & 0 & 0 & 1 - \omega^2 - j2\omega\zeta & -x_2 \\ 2x_2 & -x_2 & x_1 & -x_2 & 1 - 4\omega^2 - j4\omega\zeta \\ -x_2 & 0 & 0 & 2x_2 & x_1 \\ 0 & -x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 - 9\omega^2 - j6\omega\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 4\omega^2 + j4\omega\zeta & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0 & 1 - 4\omega^2 - j4\omega\zeta & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 - 16\omega^2 - j8\omega\zeta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (13 \cdot d)$$

文 献

- (1) Dimarogonas, A. D., ほか 1 名, *J. Sound Vib.*, 91-4 (1983), 583.
- (2) Grabowski, B. (Mahrenholtz 編), *Dynamics of Rotors Stability and System Identification*, (1984), Springer-Verlag.
- (3) Inagaki, T., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Mech. Des.*, 104 (1982), 345.
- (4) Mayes, I. W., ほか 1 名, *ASME J. Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 106 (1984), 139.
- (5) Schmied, J., ほか 1 名, *I. Mech. E. Conf.*, (1984), 183.
- (6) Nelson, H. D., ほか 1 名, *ASME J. Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 108 (1986), 189.
- (7) 太田・ほか 2 名, 機論, 44-380 (昭 53), 1225.
- (8) 山本・ほか 1 名, 機論, 28-194 (昭 37), 1261.

討 論

〔質問〕 太田 博・水谷 一 樹

〔名古屋大学工学部・三重大学工学部〕

(1) 第1報で触れておられると思うが、式(1)の物理的な意味をご説明いただきたい。重力がなければ $k_\xi = k_1$, $k_\eta = k_2$ となるのか。

(2) 軸のふれまわり速度と軸の角速度が異なる場合 ($p \neq \omega$) にも式(1)が成り立つのか。このとき $p - \omega$ の項がでてくるのではないか。

(3) クラックを有する軸の振動解析は、回転機械の初期診断のために貴重な研究と思う。しかし、危険速度の 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 の回転速度で軸が共振する原因はクラック以外にも原因があるときはどう考えたらよいのか。

(4) クラックを有する軸が垂直軸の場合は、偏平軸と同じ取扱いになるのか。

〔回答〕 (1) 軸が重力によってたわんだ位置を中心に回転するとき、クラックの状態は次のようになる。クラックが上にあるときにはクラック部に圧縮応力が働くのでクラックが閉じ、クラックなしの場合と同じになる。下にあるときには逆に開いた状態になるので k_1 , k_2 のばね定数をもつ非対称軸と同じになる。クラックがその中間にあるときには開いた部分と閉じた部分が混在し、その割合が軸の回転とともに連続的

に変化する。軸のばね定数の面から以上のことを近似的に表現したのが式(1)である。なお、重力がなければクラックの開閉は軸のたわみ方向に依存するようになり、 $k_\xi = k_1$, $k_\eta = k_2$ のように簡単にはならない。

(2) 本報では軸が重力によってたわんだ静的平衡点を中心に微小振動するものとしており、軸のばね定数は軸のたわみ、すなわちふれまわりに依存しないものとしている。ご指摘のようにふれまわりにも依存するとするならば、 $p - \omega$ の項も考慮しなければならない。

(3) 一般にクラックは運転時間とともに進行する。したがって危険速度の 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 のピーク値の時間的変化を観測し、それらが増加する傾向にあればクラックの疑いがあると考えられる。

(4) (1)でも述べたが、垂直軸のように重力の影響がない場合にはクラックの開閉は軸のたわみ方向に依存する。軸のたわみによってクラックが開くときには偏平軸として取扱い、閉じるときには対称軸として扱わねばならない。このようなことは文献(付1)で述べられている。

(付1) 石田・ほか3名, 機論, 53-488, C(昭62), 925.