柔軟構造系のモデリングと制御
(スピルオーバーによる不安定現象の抑制)田 川 泰 敬^{*1}, 山 田 元^{*1}Modeling and Control of a Flexible Structure System
(Suppression of Spillover Instability)

Yasutaka TAGAWA and Gen YAMADA

In this paper, the modeling and control of flexible structure systems are studied by taking an elastic arm system as an example. Especially, high-speed positioning control suppressing spillover instability is examined. First of all, an equation of motion is derived using the finite element method for a controlled object, and a modal analysis is applied to the equation in order to obtain a reduced order model of the object. Subsequently, the transfer function method based on design freedom is adopted to design the controller. The effectiveness of the controller derived by this method is demonstrated in computer simulation results on time responses. Also, the results are compared with those obtained by the theory of optimal control.

Key Words: Modeling, Flexible Structure System, Finite Element Method, Modal Analysis, Positioning Control, Spillover, Transfer Function Method

1. 緒 言

産業用ロボットアームや宇宙構造物など柔軟構造系のモデリングと制御に関する問題は、軽量化、高速化、高精度化などの要求により、重要性を増しており最近多くの研究^{(1)~(7)}がなされている。しかし、これらの研究の大部分は、モデリングに関しては、はりの固有関数を用いたものであり、制御系に関しては、最適レギュレータ問題に帰着するものである。

柔軟構造物を含んだ分布定数系を対象とする制御系の設計においては、理論上の制約から無限次元の対象の低次元化モデルを作成し、これに基づいて制御系を設計しなければならない。このため、高速の制御を実現しようとする、切り捨てられたモードに起因する不安定現象(スピルオーバー不安定)が発生することがあり、このことは Balas⁽⁸⁾によって指摘されている。また、狼らは大規模宇宙構造物(LSS)のモデリングと制御に関する詳細な報告^{(9)~(12)}を行っており、その中でもスピルオーバー問題の重要性を論じている。

本論文では、一端が台車に取付けられ、先端に質量

を有する弾性アームの先端の位置決め制御を例にとり、スピルオーバーによる不安定現象を抑制するとともに高速での位置決め制御を達成する手法を提案し、これに基づいてシミュレーションを実施する。このために、モデリングに当たっては、実際の構造物への適用を考え、弾性部分には有限要素法を用いて運動方程式を導いた後、モード解析によりモード座標に変換し低次元化を行う。また、制御器の設計は、設計の自由度に着目した伝達関数法⁽¹³⁾によって行い、観測量-制御量間の信号にフィルタ効果を持たせることにより、スピルオーバー不安定を抑制できることを示す。そして、この方法によって得られた結果と、一般的手法であるオブザーバを用いた最適サーボシステムによる結果を、応答波形、スピルオーバー不安定に対する抑制効果、外乱に対する応答、応答速度などの観点から比較・検討を行う。

2. モデリング

本研究では、図1に示すように、先端に質量を有する弾性アームが並進運動のみを許す台車に取付けられた柔軟構造系を取り上げ、アームの先端をできるだけ高速に、しかも残留振動を抑えて所定の位置まで移動させることを目的とする。

* 昭和62年7月15日 第24回シンポジウムにおいて講演、原稿受付 昭和62年9月30日。

*¹ 正員、北海道大学工学部(〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

2.1 有限要素法による運動方程式の導出 図1

において、アームの長さを l 、先端の質量を m_t 、台車の質量を m_f 、台車に加えられる力を f とする。また、台車の変位を v 、台車上に基準 O を取り、 Oz からのアームのたわみを w とし、重力の影響は無視する。弾性アーム部のモデリングに関しては、有限要素法を用いて運動方程式を導く。有限要素法によると、はりの横変位 w と節点変位 d_e の関係、軸方向ひずみ ε_z と節点変位の関係、軸方向応力 σ_z と軸方向ひずみの関係は、それぞれ次式で与えられる。

$$w = [N]\{d_e\} \quad (1)$$

$$\varepsilon_z = [B]\{d_e\} \quad (2)$$

$$\sigma_z = D\varepsilon_z \quad (3)$$

式(1)～(3)を用いると、要素剛性マトリックスは

$$[K_e] = \int [B]^T D [B] dV \quad (4)$$

で表される。また、分布力 p に等価な節点力 $\{F_e\}$ は

$$\{F_e\} = - \int [N]^T p dV \quad (5)$$

で表される。図1のような動的な系を考えた場合、はりに加わる分布力は慣性力であり

$$\begin{aligned} p &= -\rho(\ddot{v} + \ddot{w}) \\ &= -\rho([N]\{\ddot{d}_e\} + \ddot{v}) \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 ρ ははりの密度、 $\cdot$ は時間微分を表す。式(6)を式(5)に代入し、式(4)も考慮すると一要素のみの運動方程式は、次式で与えられる。

$$[m_e]\{\ddot{d}_e\} + [k_e]\{d_e\} = -\ddot{v}\{a_e\} \quad (7)$$

ここで

$$\begin{aligned} [m_e] &= \rho \int [N]^T [N] dV \\ \{a_e\} &= \rho \int [N]^T dV \end{aligned} \quad (8)$$

である。式(7)を全要素について組立て、先端の質量、境界条件、および減衰を考慮して弾性アーム部の運動方程式を導くと、次式のように表される。

$$\begin{aligned} [M_e]\{\ddot{d}\} + [C_e]\{\dot{d}\} \\ + [K_e]\{d\} = -\ddot{v}\{A_e\} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\{d\}$ は全要素の節点変位を示す。また、減衰マトリックス $[C_e]$ は、次式で定義される比例粘性減衰を用いる。

図1 柔軟構造系のモデル

$$[C_e] = \alpha[M_e] + \beta[K_e] \quad (10)$$

式中の α 、 β は実験などによって決定される定数⁽¹⁴⁾である。次に、弾性アームも含めた系全体について考えると、釣合い方程式は

$$\begin{aligned} f &= m_f \ddot{v} + m_t \{\ddot{v} + \ddot{w}|_{z=l}\} \\ &+ \int_0^l \rho A_r \{\ddot{v} + \ddot{w}\} dz \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる。式中の A_r はアームの断面積を表す。式(11)に式(1)を適用すると次式

$$\{A_e\}^T \{\ddot{d}\} + M_r \ddot{v} = f \quad (12)$$

が得られ、式(9)とともに、この系の運動方程式を表す。

2.2 モード解析による低次元化 式(9)のまま

では $[M_e]$ 、 $[C_e]$ 、 $[K_e]$ が大次元のマトリックス (N 次とする) になるため、モード解析によってモデルの低次元化を図る。ここでは付属物モード法⁽¹⁰⁾により、弾性アーム部に対してモード解析を行う。弾性アーム部の固有値 Ω 、および固有ベクトル $\{\phi\}$ は、次式によって与えられる。

$$([K_e] - \Omega^2[M_e])\{\phi\} = 0 \quad (13)$$

一次から n 次 ($n \leq N$) までの固有値を $\{\Omega_i\}^T$ 、これに対応する正規モード行列を $[\phi_i]$ とし、次式で表されるモード座標 ξ_i を導入する。

$$\{d\} = [\phi_i]\{\xi_i\} \quad (14)$$

式(14)を式(9)に代入し、左から $[\phi_i]^T$ を乗じると、正規モードの直交性から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \{\ddot{\xi}_i\} + [\alpha + \beta\Omega_i^2]\{\dot{\xi}_i\} \\ + [\Omega_i^2]\{\xi_i\} + \ddot{v}[\phi_i]^T\{A_e\} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)で、 $[\]$ は対角行列を表している。そして、式(14)を式(12)に代入して得られた式と式(15)より、この系の低次元化された運動方程式は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_n & \phi^T A_e \\ A_e^T \phi_i & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_i \\ \ddot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha + \beta\Omega_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{v} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \Omega_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_i \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 I_n は n 次の単位行列を表す。式(16)は簡単に

$$[M]\{\ddot{\eta}\} + [C]\{\dot{\eta}\} + [K]\{\eta\} = \{P\}f \quad (17)$$

と書ける。式(17)は剛体運動を含んでいるため、質量マトリックス $[M]$ は正定であるが、剛性マトリックス $[K]$ および減衰マトリックス $[C]$ は半正定である。また、式(17)は次のような状態方程式の形に書き直すことができる。

$$\dot{z} = Az + Bf \quad (18)$$

ここで、状態ベクトルは

$$z = \{\xi_i \ v \ \dot{\xi}_i \ \dot{v}\}^T \quad (19)$$

で与えられ、係数マトリックスは次式で表される。

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

また、弾性アーム先端の位置 y 、および台車の位置 $\bar{y}$ が測定可能であるとする、出力方程式は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} y \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1m} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z \dots\dots\dots (21)$$

式中の $[\phi_{1m}]$ は、 $[\phi_i]$ の中の先端の位置に対応する要素からなる列ベクトルである。

3. 制御器の設計

3.1 設計の自由度に着目した伝達関数による方法

図2は、最も一般的なフィードバック制御系を示したものである。図2中の r は目標値、 u は操作量、 y は制御量、 $\bar{y}$ は制御量以外の測定可能な出力、 y^* は y および $\bar{y}$ からなるすべての測定可能な出力、および v は外部信号を表す。このとき、次の関係式⁽¹³⁾が成り立つ。

$$C_{y*}u = P_{uy}^{-1}W_{vy}(I + P_{uy*}P_{uy}^{-1}W_{vy})^{-1} \dots\dots\dots (22)$$

$$C_{ru} = (I - C_{y*}u P_{uy*})P_{uy}^{-1}W_{ry} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、

C_{ru} : r - u 間の制御器の特性伝達関数行列

$C_{y*}u$: y^* - u 間の制御器の特性伝達関数行列

P_{uy} : u - y 間の制御対象の特性伝達関数行列

P_{uy*} : u - y^* 間の制御対象の特性伝達関数行列

W_{ry} : r - y 間の全系の特性伝達関数行列

W_{vy} : v - y 間の全系の特性伝達関数行列

を示す。式(22)、(23)において注目すべきところは、制御器の設計にあたり W_{ry} と W_{vy} を独立に設定することができ、また W_{ry} と W_{vy} を設定することにより制御器の特性伝達関数行列が一意に決定するというものである。このことから、式(22)、(23)を用いれば、目標値-制御量間で望みの応答を保ったまま、 W_{vy} に適切なものを設定することにより、スピルオーバー不安定が起りにくい制御系、ロバスト性のある制御系など、設計目的に応じた制御系が実現可能である。

本研究では、制御量 y は弾性アームの先端の位置で

図2 フィードバック制御系の構成

あり、制御量以外の観測量 $\bar{y}$ を台車の位置とし、操作量 u は台車に加える力とする。以後、この制御対象に従い、1操作量・1制御量の場合について述べる。式(22)、(23)中の W_{uy} 、 W_{ry} は任意に指定できるが、次の三つの条件を満たしていなければならない。

(1) 実現条件: W_{uy} 、 W_{ry} の相対次数は P_{uy} の相対次数以上である。

(2) 連結条件: W_{uy} 、 W_{ry} の零点は P_{uy} の零点を含む

(3) 次数条件: $I + P_{uy*}P_{uy}^{-1}W_{vy}$ は P_{uy} のすべての極を零点を含む。

さらに、ステップ入力に対して定常偏差を零にする1形の制御系の実現のための条件は、零周波数($s=0$)において

$$W_{vy} = \{-1, 0\}, \quad W_{ry} = 1 \dots\dots\dots (24)$$

である。

以下では、図1を制御対象とし、式(22)、(23)を用いたスピルオーバー不安定の抑制に有効な制御器の設計例を示す。ここでは、弾性アームの最低次のモードのみを考慮して設計を行う。式(18)、(21)から制御対象の特性伝達行列を求めると、次式のようになる。

$$P_{uy*} = \frac{1}{D_p(s)} \begin{Bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \end{Bmatrix}, \quad P_{uy} = \frac{N_1(s)}{D_p(s)} \dots\dots\dots (25)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} D_p(s) &= s^2(a_2s^2 + a_1s + a_0) \\ N_1(s) &= b_2s^2 + b_1s + b_0 \\ N_2(s) &= c_2s^2 + c_1s + c_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

のように表され、 $a_i, b_i, c_i (i=0, 1, 2)$ は定数である。

また、 W_{vy} を次のように与える。

$$W_{vy} = \frac{\{N_1(s)/b_2\} \{d_2s^2 + d_1s + d_0, e_2s^2 + e_1s + e_0\}}{(s+p_b)^6(s+p_c)} \dots\dots\dots (27)$$

式(27)は、条件(1)、(2)を満足しており、 $d_i, e_i (i=0, 1, 2)$ は条件(3)を満たすように後に決定される未定係数である。また、 W_{vy} の分母は条件(1)より s に関する6次以上の代数式であればよいが、ここでは v - y 間により大きなフィルタ効果を持たせるため、7次式を用いる。 p_b, p_c は設計パラメータであり、対象の周波数応答などから決められる。ただし、 W_{vy} の分母は全系の特性式になっているため、その極は複素平面上の左半面にななければならない。式(25)~(27)を式(22)に代入し、条件(3)が成り立つように未定係数を決定し、式(24)も考慮に入れると

$$C_{y*}u = \{C_{yu}, C_{\bar{y}u}\} = \frac{\{\beta_2s^2 + \beta_1s + \beta_0, \gamma_2s^2 + \gamma_1s\}}{s^3 + f_1s^2 + f_0s} \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。ここで

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= a_2 d_2 / b_2, & \beta_1 &= a_2 d_1 / b_2 \\ \beta_0 &= -a_2 p_b^6 p_c / b_0 \\ \gamma_2 &= a_2 e_2 / b_2, & \gamma_1 &= a_2 e_1 / b_2 \\ f_1 &= -a_1 / a_2 + p_c + 6p_b \\ f_0 &= (a_1 / a_2)^2 - (p_c + 6p_b)(a_1 / a_2) \\ &\quad + 3p_b(2p_c + 5p_b) - a_0 / a_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

である。また、目標値から制御量までの特性伝達関数 W_{ry} を条件(1), (2)および式(24)を満たす次式で与える。

$$W_{ry} = \frac{p_b^6 N_1(s) / b_0}{(s + p_b)^6} = \frac{p_b^6 N_1(s)(s + p_c) / b_0}{(s + p_b)^6 (s + p_c)} \dots\dots\dots (30)$$

式(25), (26), (28)~(30)を式(23)に代入すると

$$C_{ru} = \frac{a_1 s + a_0}{s^3 + f_1 s^2 + f_0 s} \dots\dots\dots (31)$$

となる。ここで

$$a_1 = a_2 p_b^6 / b_0, \quad a_0 = a_2 p_b^6 p_c / b_0 \dots\dots\dots (32)$$

である。式(28), (31)よりこの制御器の状態線図は図3で表される。図3から、制御器の状態方程式および出力方程式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{cases} &= \begin{bmatrix} -f_1 & 1 & 0 \\ -f_0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_0 & \beta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ y \\ \bar{y} \end{bmatrix} \\ u &= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

3.2 オブザーバを用いた最適制御による方法

図4は、オブザーバを用いた m 入力 m 出力の1形のサーボシステムの構成を示している。図において、 $r, u, y, \bar{y}, y^*$ は図2と同様の信号を表し、 $\hat{x}$ は状態推定量を表している。制御対象を次式

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \dots\dots\dots (34)$$

で与えられるものとし、

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

とおく。このとき、 $x_e = x - x(\infty)$, $u_e = u - u(\infty)$, $e = y - r$ とし、図4の制御系の定常値からの誤差システム⁽¹⁵⁾を求めると、このシステムは、

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{x}_e \\ \dot{u}_e \end{cases} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ u_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} v \\ e &= [C, 0] \begin{bmatrix} x_e^T & u_e^T \end{bmatrix}^T \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

に

$$v = -F_e \{x_e^T, u_e^T\}^T \dots\dots\dots (37)$$

の状態フィードバックをしたレギュレータとみなせる。ここで、

$$F_e = [F, K]E \dots\dots\dots (38)$$

を表す。そして、次のような評価関数を選び、最適フィードバック行列を求めることにより、偏差 e の過渡誤

差の少ないサーボシステムが設計できる。

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (e^T W e + v^T R v) dt \\ &= \int_0^\infty (\{x_e^T, u_e^T\} Q \{x_e^T, u_e^T\}^T + v^T R v) dt \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

式中で、 W, R は重み行列、 Q は次式で与えられる。

$$Q = \begin{bmatrix} C^T W C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

また、オブザーバは次式

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \hat{A}\omega + \hat{K}y^* + \hat{B}u \\ \hat{x} &= D\omega + Hy^* \end{aligned} \dots\dots\dots (41)$$

で表される最小次元のオブザーバをゴピナスの方法を使って設計する。

本研究で取扱っている制御対象の場合、 $r, y, \bar{y}$ はスカラー量であり、図4および式(41)より、制御器の状態方程式および出力方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{\omega} \\ \dot{z} \end{cases} &= \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{B}FD & \hat{B}K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ z \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & \hat{K} - \hat{B}FH \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ y \\ \bar{y} \end{bmatrix} \\ u &= (-FD : K) \begin{bmatrix} \omega \\ z \end{bmatrix} + \{0 : -FH\} \begin{bmatrix} r \\ y \\ \bar{y} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

4. シミュレーション結果と考察

4.1 制御対象の周波数応答 図5は、式(17)から制御対象の周波数応答(コンプライアンス)を1000 Hz まで求めた結果を示している。図5において、実線

図3 制御器の状態線図

図4 m 入力 m 出力の1形のサーボシステム

は台車に固定した基準 O からの弾性アームの先端の応答 Y を表し、破線は床に対する台車の応答 $\bar{Y}$ を表す。解析においては 8 要素、8 モードを用い、他の諸元は次のとおりである。

$$l=0.5 \text{ m}, \quad \rho=7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$m_t=0.05 \text{ kg}, \quad m_f=0.5 \text{ kg}$$

$$\alpha=1.5 \text{ rad/s}, \quad \beta=1.4 \times 10^{-7} \text{ s/rad}$$

弾性アームの断面 (幅×厚さ) = 30 mm×2 mm

縦弾性係数: $E=206 \text{ GPa}$

零周波数は等加速度運動を表しているため、周波数が低くなるに従い、 Y は一定値に近付き、 $\bar{Y}$ は増加している。また、モデリングにおいて、有限要素法を用いた場合と、はりの固有関数を用いた場合の両者の固有値およびコンプライアンスを不減衰系において比較した結果、有効数字 4～5 けたの範囲で等しいことが確かめられた。

4.2 両設計法の比較・検討 ここでは、3 章で示した二つの手法で設計された制御器により制御系を構成し、位置決め制御を行った場合の応答をシミュレーションし、種々の角度から比較・検討を行う。なお、以下のシミュレーション結果は、弾性アームの一次モードのみを考慮して、式 (33)、(42) によって制御器を設計したもので、両制御器の次数はともに 3 次である。

4.2.1 目標値に対する応答波形 図 6 (a) は 3.1 節の設計の自由度に着目した伝達関数による方法で、図 6 (b) は、3.2 節の最適制御によって、制御器を設計した場合のステップ入力に対する応答波形を示している。以下の図においては、実線はアームの先端の変

位を、破線は台車の変位を表す。ここでは、制御対象として、制御器の設計に用いたものと同様な、弾性アームの一次モードのみを考慮したモデルを用いている。

前者の方法では、目標値-制御量間の特性伝達関数 W_{ry} をあらかじめ指定するため、 W_{ry} が 3.1 節の条件 (1)、(2) さえ満たせば任意の応答を実現できる。このため、図 6 (a) のような滑らかな応答波形を作れる。これに対し、後者の最適制御では、評価関数を最小にする最適フィードバック行列を決定するという問題であり、評価関数と応答波形の関係が不明確で、その応答波形は一般に図 6 (b) のように振動的になる。

4.2.2 スピルオーバー不安定の抑制に対する有効性

4.2.1 項では制御対象を制御器の設計に用いたモデルと同一次元のものでシミュレーションを行ったが、実際の制御対象は分布定数系であるため無限次元を有している。ここでは、対象の高次モードの影響を調べるため、対象のモデルとして弾性アームの八次モードまでを考慮に入れたものを用いてシミュレーションを行い、スピルオーバー不安定の抑制に対する有効性を比較・検討する。

図 7 は、設計の自由度に着目した 3.1 節の制御器を用いたシミュレーション結果である。図 7 (a) は、 W_{ry} の設計パラメータ p_c を大きく取り過ぎたため観測量-制御量間で、高次モードに対して十分なフィルタ効果を与えることができず、スピルオーバー不安定を起こした例である。これに対し、図 7 (b) は、図 5 の対象の周波数応答から p_c に適切な値を与えているため、スピルオーバー不安定が抑制されていることを示している。図 8 は、3.2 節の最適制御による方法でもオブザー

図 5 制御対象の周波数応答

図 6 両設計法による応答波形の比較

(a) $p_a=64, p_c=5000$ (b) $p_a=64, p_c=150$

図 7 伝達関数法によるステップ応答

(a) $\gamma=-22$ (b) $\gamma=-10$

図 8 最適制御によるステップ応答

図9 両設計法による外乱に対する応答の比較

バの極 γ を虚軸近傍に持っていくことによって、オブザーバにある程度のフィルタ効果を持たせることができることを示した図である。図8(a)においては不安定な系が、オブザーバの極を虚軸に近付けることにより図8(b)のように安定な系になる。しかし、本来、オブザーバ(特に最小次元オブザーバ)は、状態推定器として考えられたものであるため、フィルタ効果を持たせるためにはオブザーバの極をかなり虚軸近傍に持っていかなければならない。そのため4・2・3項でも述べるように外乱に対する応答が鈍くなる。

4・2・3 外乱に対する応答 図9(a)は、最適制御によるシミュレーション結果の中から最も高速であった応答曲線を示したものであり、これ以上高速の応答を得ようするとスピルオーバー不安定が生じた。また、図9(b)はこの制御系において、台車に単位ステップの外乱が働いたときのアームの先端と台車の応答を示している。一方、図9(c)は、3・1節の制御器を用いて図9(a)と同程度の整定時間の制御系を作ったときの応答曲線を示し、図9(d)は、この系に図9(b)と同様の外乱が働いたときの応答を示す。図9から明らかなように、最適制御の場合、スピルオーバー不安定を抑制するためにオブザーバの極を虚軸近傍にとらざるを得なくなり、その結果、図9(b)のように外乱に対する応答が鈍くなった。

4・2・4 応答速度 図7(b)と図9(a)とを比較すれば明らかなように、3・1節に述べた制御器を用いることによって、最適制御による最も高速なシミュレーション結果である図9(a)よりさらに高速の位置決め制御が可能である。

5. 結 論

本論文では、一端が台車に取付けられ、先端に質量を有する弾性アームの位置決め制御を例にとり、有限要素法とモード解析により対象のモデリングを行い、設計の自由度に着目した伝達関数法により制御器を設計し、スピルオーバー不安定を抑制するとともに高速度の位置決め制御を達成する手法を提案した。そして、この方法をオブザーバを用いた最適制御による方法と比較・検討を行い、次の結論を得た。

(1) 有限要素法を用いた制御対象のモデリングは十分な精度を有し、固有関数法に比べ構造変更(質点の付加など)に対応しやすい。

(2) 設計の自由度に着目した伝達関数による設計法は、目標値-制御量間の特性伝達行列 W_{ry} および観測量-制御量間の特性伝達行列 W_{vy} を独立に設定できるため、目標値-制御量間で望みの応答を保ったまま、 W_{vy} を適切に設定することにより、設計目的(スピルオーバー不安定の抑制、ロバスト性の確保など)に応じた制御系が実現できる。

(3) 最適制御では、設計パラメータの決定に幾度ものシミュレーションを必要とするのに対し、設計の自由度に着目した伝達関数による方法では、設計パラメータを対象の周波数応答をもとに合理的に設定できる。

最後に、本研究を実施するに当たり、ご指導を賜りました北大工学部 田川遼三郎先生に感謝の意を表す。

文 献

- (1) Cannon, H. R., Jr. and Schmitz, E., *Int. J. Robot. Res.*, 3-3(1984), 62.
- (2) 福田, 機論, 51-468, C (昭60), 2140.
- (3) 吉田・ほか2名, 機論, 52-484, C (昭61), 3073.
- (4) 坂和・松野, 計測と制御, 25-1 (昭61), 64.
- (5) 福田・ほか3名, 機論, 51-465, C (昭60), 979.
- (6) 福田・ほか3名, 機論, 52-473, C (昭61), 344.
- (7) 福田・ほか3名, 機論, 52-473, C (昭61), 349.
- (8) Balas, J., *IEEE Trans.*, AC 23-4 (1978), 673.
- (9) 狼・ほか14名, 東京都立工科短期大学研究報告, (昭58).
- (10) 狼・藤井, 日本航空宇宙学会誌, 32-364 (昭59), 263.
- (11) 狼・ほか2名, 計測と制御, 23-1 (昭59), 69.
- (12) 狼・ほか5名, 航空宇宙技術研究所報告, SP-4 (昭60).
- (13) 田川, 第16回制御理論シンポジウム資料, (昭62).
- (14) 長松・中尾, 機論, 48-432, C (昭57), 1120.
- (15) 小郷・美多, システム制御理論入門, (昭54), 実教出版.

討 論

〔質問〕 市川 邦彦〔上智大学理工学部〕

(1) 伝達関数法は、低次元オブザーバを用いた極配置法や exact model matching 法と等価であり、 C_{y*u} および C_{ru} の分母は低次元オブザーバの特性多項式、すなわち漸近安定多項式の筈である(付1)。貴論文の方法は、 $D_p(s)$ を極零相殺しており、一般的にいうと、不安定なプラントにも適用できる方法になっていないと思うが、いかがか。

(2) 寄生遅れ項を無視しているのだから、スピルオーバーすなわち、ミスマッチ不安定は避けられない。問題は $r(t)$ がどこまで高い周波数成分を含んでも閉ループ系が安定であるかということだと思う。それゆえ、閉ループ系の特性としては、周波数応答が重要だと思うが、いかがか。

(3) 3・1 節は極配置法であり、3・2 節は最適レギュレータ法であり、結果の比較はあまり意味がないと思うが、いかがか。

〔回答〕 (1) 本文中、条件(1)～(3)はフィードバック制御系を図2のように表したとき、制御器がプロパになるための必要十分条件を1操作量・1制御量の場合について示したものである。したがって、この条件を満たす $W_{ry} \cdot W_{vy}$ を適切に指定することによって設計された制御器は、低次元オブザーバを用いた極配置法や exact model matching 法によって導かれる制御器を包含する。また、制御器の特性方程式は設計目的(目標値-制御量間の波形伝達特性、 n 形の制御系、スピルオーバー不安定の抑制、ロバスト性の確保など)に応じた $W_{ry} \cdot W_{vy}$ の指定により異なり、一般的には低次元オブザーバの特性多項式とはならない。しかも、式(28)、(31)からもわかるように、これらは漸近

安定多項式とは限らない。

本論文で用いた伝達関数法は、着目するシステム(全システム、あるいはサブシステム)の特性式を分母にもつ特性伝達関数行列を用いる点が一般の伝達関数法と異なる。そして、制御器は与えられた全系の特性伝達関数行列 $W_{ry} \cdot W_{vy}$ を実現するように式(22)、(23)によって決定される。したがって、計算過程における $D_p(s)$ などの分子・分母間の相殺は、いわゆる極零相殺ではなく、不可制御モード・不可観測モードを生ずるものではないため、不安定な系にも適用可能である。

(2) 本論文ではスピルオーバー不安定の抑制、すなわち、制御器の設計において考慮していないプラントの高次モードによるミスマッチの影響をできるだけ抑え、ミスマッチ不安定を避けることを目的としている。

全系の安定性は高次モードも含めた全系の状態方程式 $\dot{x} = Ax + Br$ の特性方程式 $|sI - A| = 0$ の根によってのみ決まるもので、目標値 $r(t)$ の含む周波数成分に左右されることはない。

ご指摘のように周波数応答は $W_{ry} \cdot W_{vy}$ の選定に際し重要である。

(3) あるプラントをある目的で制御しようとする場合、どの設計法による制御器が適しているかを検討することは実際問題として意味があると考ええる。そこで、本論文では特性伝達関数法(極配置法とは異なる)によって設計した制御系を、最適レギュレータ法による代表的なサーボシステムの設計法の一つである誤差システムを用いたものと比較し、考察を加えた。

(付1) 市川、計測と制御、26-11(昭62)、977.