機構設計用シミュレーション・システム*

(第4報, 機構の振動解析)

高原弘樹^{*1}, 黒岩 正^{*1}, 本江 明^{*1}A Simulation System of Design for a Link Mechanism
(4th Report, Vibration Analysis for a Mechanism with Controllers)

Hiroki TAKAHARA, Tadashi KUROIWA and Akira MOTOE

A method for the analysis of the eigenfrequency, eigenmode and transfer function of a link mechanism with controllers is presented using the state equations proposed in the preceding paper (3rd Report). Because of the nonlinearity of the state equations of a link mechanism, it is difficult to estimate its vibrational character. In this paper, the state equations are linearized to calculate the eigenfrequency, eigenmode and transfer function of a link mechanism coupled with controllers. The proposed method is then applied to an industrial robot.

Key words : Mechanism, Dynamics, Robot, Manipulator, Linkages, Control, CAE
Eigenfrequency, Transfer Function

1. ま え が き

近年, ロボット, マニピュレータをはじめとして, 各種の機構の用途は多岐にわたり, 多種多様な仕様を満足するような設計が求められている。そのため, 機構系の運動学的特性, 静・動解析, さらに制御系まで含めた特性の把握が重要となってきた。特に, 計算機を援用して, このようなシミュレーションを行う手法が有力視されている。さらに, 解析のみでなく, モデリングから評価までを含んだCAE (Computer Aided Engineering) システムの開発が行われている。計算機上で, 設計変更, 試作, 試験の繰返しを行うことにより, 機構系や制御系の多量の設計パラメータを効率よく決定することが可能となる。

機構のシミュレーションでは, ジョイントの変位, 速度, 加速度を与えて, それらに働く力, モーメントを求める運動解析, 逆に, ジョイントに働く力, モーメントを与えて, それらの変位, 速度, 加速度等を求める時間応答解析, また, 固有振動数, 振動モード,

伝達関数を求める振動解析, 外力等が作用した場合の静的平衡位置を求める静解析等を行う必要がある。特に, 時間応答解析や振動解析などの動解析では, ジョイントの制御系まで含めたモデル化が重要である。特に, 産業用ロボットなどを対象とした, 動解析を行うシミュレータの開発が各方面で盛んに行われている^{(1)~(4)}。

筆者らも, 上述の各種の解析を行うことができる汎用の機構設計用シミュレーション・システムを開発しており, 機構のトポロジカル解析, 運動解析, および時間応答解析については, すでに報告している^{(5)~(8)}。

本報では, 制御系をも含んだ機構の振動解析の手法を示す。機構の特性を記述する方程式の非線形性が強いので, そのままの形で固有振動数や伝達関数を求めることは難しい。そこで本報では, 基準点近傍の微小振動を考え, 基準点のまわりで線形化して振動解析を行う。本報では, 第3報⁽⁷⁾で導いた状態方程式と第2報⁽⁶⁾で報告した力解析を基礎としており細かい表記法などはそれらを参照されたい。

なお, 本システムでは, シミュレーションした結果を視覚的に評価しやすくするために, サーフェス・モデルによるアニメーション表示を行うことができる。

* 昭和62年7月17日 第24回機械力学シンポジウムにおいて講演, 原稿受付 昭和63年1月9日。

*¹ 正員, (株)東芝総合研究所 (〒210 川崎市川崎区浮島町4-1)。

2. 状態方程式

機構系と制御系を含めた状態方程式は第3報⁽⁷⁾より以下のようになる。(表記法は前報^{(5)~(7)}に従ったので、詳細はそれらを参照されたい。)

$$\left. \begin{aligned} A(\vec{z}_2) \dot{\vec{z}}_1 &= \vec{F}(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3) \\ &\quad - \vec{b}(\vec{z}_1, \vec{z}_2) \\ \dot{\vec{z}}_2 &= \vec{z}_1 \\ \dot{z}_{k,j}^m &= z_{k,j+1}^m \quad (j=1, 2, \dots, n_k^m-1, k=1, 2, 3) \\ \dot{z}_{k,n_k^m}^m &= -\sum_{j=1}^{n_k^m} a_{k,j}^m z_{k,j}^m + u_k^m \quad (k=1, 2, 3) \\ y_k^m &= \sum_{j=1}^{n_k^m} c_{k,j}^m z_{k,j}^m + d_k^m u_k^m \quad (k=1, 2, 3) \\ u_1^m &: \text{目標値} \\ u_2^m &= z_{2,m} \text{ or } z_{1,m} \\ u_3^m &= y_1^m - y_2^m \\ \vec{r} &= (y_3^1, y_3^2, \dots, y_3^{i_D})^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\dots\dots\dots (2)$$

ここで式(1)中で状態変数 $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ は各々、ジョイントの速度と変位に対応している。 A はイナーシャ行列、 $\vec{F}$ は駆動力(トルク)、 $\vec{b}$ は外力項やコリオリ力などを含んだバイアス・ベクトルである。一方、式(2)はジョイント J_m にある制御系に関する式で $z_{k,j}^m$ などは制御系の状態変数で、 $a_{k,j}^m, c_{k,j}^m, d_k^m$ は制御系の伝達関数から決まる値であり、 u_2^m はフィードバック量である。また、 i_D は駆動するジョイントの数である。

3. 状態方程式の線形化

機構の運動方程式(1)は、非線形性が非常に強いので、固有振動数や伝達関数などを直接求めることは難しいので、線形化を行って、それらを求めることにする。ここでは、任意の基準点近傍での微小変化を考えて線形化を行い、線形化した状態方程式をたてる。

まず、状態変数を、基準点の値とそこからの微小変化分を各々、 $\vec{z}_{e0}, \vec{z}_{e1}$ ($e=1, 2, c$) とし以下のようにする。

$$\vec{z}_e = \vec{z}_{e0} + \vec{z}_{e1} \quad (e=1, 2, c) \dots\dots\dots (3)$$

ここで $\vec{z}_e$ は制御系に関する状態変数をまとめたものである。

$$\vec{z}_c = (\vec{z}_3^T, \dots, \vec{z}_{2+i_D}^T)^T \dots\dots\dots (4)$$

式(3)を状態方程式に代入し線形化を行う。ただし制御系の方程式(2)はすでに線形であり、微小変化についても同じ式が成り立つので、非線形である式(1)の第1式だけ線形化を行う。

3.1 機構の運動方程式の線形化 式(1)に式(3)を代入し、Taylor展開し1次の項までとり、基準点で式(1)が成り立っているとすると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\vec{z}}_{11} &= A(\vec{z}_{20})^{-1} \left[\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{z}_1} \right)_0 - \frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{z}_2} \right]_0 \vec{z}_{11} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{z}_2} \right)_0 - \frac{\partial \vec{b}}{\partial \vec{z}_2} \right]_0 \vec{z}_{21} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{z}_c} \bigg|_0 \vec{z}_{c1} \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

ここで $|_0$ は基準点での値を示す。駆動力(トルク) $\vec{F}$ は外から入力する時には0であり、式(2)より求める時には式(2)を微分することにより容易に求まる。従って、バイアス・ベクトルの微分が求まれば、線形化できる。

3.2 バイアス・ベクトルの微分 バイアス・ベクトルは、第3報⁽⁷⁾に示すように $\ddot{\vec{q}}$ を $\vec{0}$ とおいて力解析⁽⁶⁾を行い、次式を用いて求める。

$$b_m = \vec{d}_m^T [(1-\alpha_m') \vec{F}_{Jm} + \alpha_m' \vec{M}_{Jm}] \dots\dots\dots (6)$$

b_m は $\vec{b}$ の m 番目の成分とする。ここで

$$\alpha_m' = \begin{cases} 1: \text{回転ジョイント} \\ 0: \text{並進ジョイント} \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

であり、 $\vec{F}_{Jm}, \vec{M}_{Jm}$ は各々ジョイントに作用する力、モーメント、 $\vec{d}_m$ はジョイントの変位軸を示すベクトルである。従って、バイアス・ベクトルの微分も、式(6)を微分した。

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_m}{\partial \vec{z}_e} &= \vec{d}_m^T \left[(1-\alpha_m') \frac{\partial \vec{F}_{Jm}}{\partial \vec{z}_e} + \alpha_m' \frac{\partial \vec{M}_{Jm}}{\partial \vec{z}_e} \right] \\ &\quad \cdot (e=1, 2, c) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

式(8)から求める。従って $\vec{F}_{Jm}, \vec{M}_{Jm}$ の微分が求まれば、バイアス・ベクトルの微分は、バイアス・ベクトルとまったく同様、 $\ddot{\vec{q}}$ を $\vec{0}$ として $\vec{F}_{Jm}, \vec{M}_{Jm}$ の微分を求めることにより、計算することができる。なお、力解析の詳細については第2報⁽⁶⁾を参照されたい。

3.2.1 ジョイントに作用する力、モーメントの微分 第2報⁽⁶⁾よりリンク L_m のベース・リンク側のジョイント J_m に作用する力 $\vec{F}_{Jm}$ 、モーメント $\vec{M}_{Jm}$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Jm} &= Q_{Lm}, J_m^T (\vec{F}_{Lm} - \sum_{\substack{j \text{ for } L_m \\ j \neq m}} \{ Q_{Lm, J_j} (\vec{F}_{J_j} \\ &\quad + \vec{F}_{K_j} + \vec{F}_{C_j}) \}) - \vec{F}_{Km} - \vec{F}_{Cm} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{Jm} &= Q_{Lm}, J_m^T (\vec{M}_{Lm} - \vec{s}_{Gm, Jm} \times \vec{F}_{Lm} \\ &\quad - \sum_{\substack{j \text{ for } L_m \\ j \neq m}} \{ (\vec{s}_{Gm, J_j} - \vec{s}_{Gm, Jm}) \\ &\quad \times \{ Q_{Lm, J_j} (\vec{F}_{J_j} + \vec{F}_{K_j} + \vec{F}_{C_j}) \} \\ &\quad + Q_{Lm, J_j} (\vec{M}_{J_j} + \vec{M}_{K_j} + \vec{M}_{C_j}) \}) \\ &\quad - \vec{M}_{Km} - \vec{M}_{Cm} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで、リンク L_m が自由端リンクの場合には、 Σ の

中は0とする。

式(9), (10)を状態変数 $\vec{z}_e$ ($e=1, 2, c$) で微分すると各々, 以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{F}_{Jm}}{\partial \vec{z}_e} = & \frac{\partial Q_{Lm, Jm}^T}{\partial \vec{z}_e} \left\{ \vec{F}_{Lm} \right. \\ & \left. - \sum_{j \in L_m} Q_{Lm, Jj} \left(\vec{F}_{Jj} + \vec{F}_{Kj} + \vec{F}_{Cj} \right) \right\} \\ & + Q_{Lm, Jm}^T \left[\frac{\partial \vec{F}_{Lm}}{\partial \vec{z}_e} - \sum_{j \in L_m} \left\{ \frac{\partial Q_{Lm, Jm}}{\partial \vec{z}_e} \right. \right. \\ & \times (\vec{F}_{Jj} + \vec{F}_{Kj} + \vec{F}_{Cj}) + Q_{Lm, Jm} \left(\frac{\partial \vec{F}_{Jj}}{\partial \vec{z}_e} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \vec{F}_{Kj}}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial \vec{F}_{Cj}}{\partial \vec{z}_e} \right) \right\} \right] \\ & - \frac{\partial \vec{F}_{Km}}{\partial \vec{z}_e} - \frac{\partial \vec{F}_{Cm}}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}_{Jm}}{\partial \vec{z}_e} = & \frac{\partial Q_{Lm, Jm}^T}{\partial \vec{z}_e} (\vec{M}_{Lm} - \vec{s}_{Gm, Jm} \times \vec{F}_{Lm} \\ & - \sum_{j \in L_m} ((\vec{s}_{Gm, Jj} - \vec{s}_{Gm, Jm}) \\ & \times \{ Q_{Lm, Jj} (\vec{F}_{Jj} + \vec{F}_{Kj} + \vec{F}_{Cj}) \} \\ & + Q_{Lm, Jj} (\vec{M}_{Jj} + \vec{M}_{Kj} + \vec{M}_{Cj})) \\ & + Q_{Lm, Jm}^T \left[\frac{\partial \vec{M}_{Lm}}{\partial \vec{z}_e} - \frac{\partial \vec{s}_{Gm, Jm}}{\partial \vec{z}_e} \times \vec{F}_{Lm} \right. \\ & \left. - \vec{s}_{Gm, Jm} \times \frac{\partial \vec{F}_{Lm}}{\partial \vec{z}_e} \right. \\ & \left. - \sum_{j \in L_m} \left[\left(\frac{\partial \vec{s}_{Gm, Jj}}{\partial \vec{z}_e} - \frac{\partial \vec{s}_{Gm, Jm}}{\partial \vec{z}_e} \right) \right. \right. \\ & \quad \times \{ Q_{Lm, Jj} (\vec{F}_{Jj} + \vec{F}_{Kj} + \vec{F}_{Cj}) \} \\ & \quad \left. \left. + (\vec{s}_{Gm, Jj} - \vec{s}_{Gm, Jm}) \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left. \left\{ \frac{\partial Q_{Lm, Jj}}{\partial \vec{z}_e} (\vec{F}_{Jj} + \vec{F}_{Kj} + \vec{F}_{Cj}) \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + Q_{Lm, Jj} \left(\frac{\partial \vec{F}_{Jj}}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial \vec{F}_{Kj}}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial \vec{F}_{Cj}}{\partial \vec{z}_e} \right) \right\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial Q_{Lm, Jj}}{\partial \vec{z}_e} (\vec{M}_{Jj} + \vec{M}_{Kj} + \vec{M}_{Cj}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + Q_{Lm, Jj} \left(\frac{\partial \vec{M}_{Jj}}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial \vec{M}_{Kj}}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial \vec{M}_{Cj}}{\partial \vec{z}_e} \right) \right] \right] \\ & - \frac{\partial \vec{M}_{Km}}{\partial \vec{z}_e} - \frac{\partial \vec{M}_{Cm}}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

式(11), (12)の中で, $\vec{F}_{Km}$, $\vec{F}_{Cm}$, $\vec{M}_{Km}$, $\vec{M}_{Cm}$ 等は各ジョイントのバネとダンパによる力とモーメントであり, 第2報⁽⁶⁾式(61)~(66)より, その微分は簡単に求まる。

さらに行列 $Q_{Lm, Jj}$ やベクトル $\vec{s}_{Gm, Jj}$ 等も第2報⁽⁶⁾の式(72)~(75)で定義されており, この微分も容易に求まる。従ってリンク L_m の慣性力と外力による力 $\vec{F}_{Lm}$ とモーメント $\vec{M}_{Lm}$ の微分が求まれば, ジョイントに作用する力, モーメントの微分は, ループの先端より式(11), (12)を漸化的に解くことにより求まる。

なお, 式(9)~(12)までの計算では行列 $Q_{Lm, Jj}$ は, 回転を表わす3行3列の部分のみを用いる。

3.2.2 リンクの慣性力と外力による力とモーメントの微分 慣性力や外力による力 $\vec{F}_{Lm}$, モーメント $\vec{M}_{Lm}$ は, 第2報⁽⁶⁾より

$$\vec{F}_{Lm} = m_m \vec{T}_m^T (\ddot{\vec{r}}_{Gm}^W - \vec{g}^W) - \vec{f}_{Gm} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\vec{M}_{Lm} = I_{Gm} \ddot{\vec{\beta}}_m + \vec{\omega}_m \times (I_{Gm} \vec{\omega}_m) - \vec{n}_{Gm} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここで m_m はリンク L_m の質量, I_{Gm} はリンク L_m の重心 G まわりの慣性テンソル, $\vec{g}^W$ は空間固定の座標系の Σ_W で表わした重力ベクトルであり, $\ddot{\vec{r}}_{Gm}^W$ は Σ_W で表わした重心 G の加速度である。式(13), (14)を状態変数 $\vec{z}_e$ ($e=1, 2, c$) で微分することにより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{F}_{Lm}}{\partial \vec{z}_e} = & m_m \frac{\partial \vec{T}_m^T}{\partial \vec{z}_e} (\ddot{\vec{r}}_{Gm}^W - \vec{g}^W) \\ & - m_m \vec{T}_m^T \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{Gm}^W}{\partial \vec{z}_e} - \frac{\partial \vec{f}_{Gm}}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}_{Lm}}{\partial \vec{z}_e} = & I_{Gm} \frac{\partial \ddot{\vec{\beta}}_m}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial \vec{\omega}_m}{\partial \vec{z}_e} \times (I_{Gm} \vec{\omega}_m) \\ & + \vec{\omega}_m \times \left(I_{Gm} \frac{\partial \vec{\omega}_m}{\partial \vec{z}_e} \right) - \frac{\partial \vec{n}_{Gm}}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となる。式(15), (16)より, 加速度 $\ddot{\vec{r}}_{Gm}^W$, 角加速度 $\ddot{\vec{\beta}}_m$, 角速度 $\vec{\omega}_m$ と座標変換行列の微分を求めればよいことがわかる。

なお, 式(13)~(16)の計算では座標変換行列 $\vec{T}_m$ は, 回転を表わす3行3列の部分だけ用いる。

3.2.3 加速度の微分 リンク L_m の重心加速度 $\ddot{\vec{r}}_{Gm}^W$ はリンク L_m に固定の座標系 Σ_m で表わした重心の位置ベクトル $\vec{r}_{Gm}$ を用いて,

$$\ddot{\vec{r}}_{Gm}^W = \ddot{\vec{T}}_m \vec{r}_{Gm} \quad \dots\dots\dots (17)$$

となり, これを状態変数 $\vec{z}_e$ ($e=1, 2, c$) で微分し,

$$\frac{\partial \ddot{\vec{r}}_{Gm}^W}{\partial \vec{z}_e} = \frac{\partial \ddot{\vec{T}}_m}{\partial \vec{z}_e} \vec{r}_{Gm} \quad \dots\dots\dots (18)$$

を得る。式(18)で座標変換行列 $\vec{T}_m$ の時間に関して2階微分を行ったもの $\ddot{\vec{T}}_m$ の状態変数による微分が求まれば, 加速度の微分は求まる。

3.2.4 角速度, 角加速度の微分 リンク L_m の角速度, 角加速度(各々, Σ_m で表わしたものを $\vec{\omega}_m$, $\ddot{\vec{\beta}}_m$, Σ_W で表わしたものを $\vec{\omega}_m^W$, $\ddot{\vec{\beta}}_m^W$ とする)は, 第2報⁽⁶⁾式(54)~(55)より

$$\vec{\omega}_m^W = \vec{\omega}_{m-1}^W + \vec{T}_m \mathbf{B}_{Lm, Jm} \ddot{\vec{\alpha}}_m \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\vec{\omega}_m = T_m^T \vec{\omega}_m^W \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\vec{\beta}_m^W = \vec{\beta}_{m-1}^W + T_m B_{Lm, Jm} \dot{\vec{\alpha}}_m + T_m B_{Lm, Jm} \ddot{\vec{\alpha}}_m \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\vec{\beta}_m = T_m^T (\vec{\beta}_m^W - T_m \dot{\vec{\omega}}_m) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、これらを状態変数 $\vec{z}_e$ ($e=1, 2, c$) で微分すると、

$$\frac{\partial \vec{\omega}_m^W}{\partial \vec{z}_e} = \frac{\partial \vec{\omega}_{m-1}^W}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial T_m}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm} \dot{\vec{\alpha}}_m + T_m B_{Lm, Jm} \frac{\partial \dot{\vec{\alpha}}_m}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}_m}{\partial \vec{z}_e} = \frac{\partial T_m^T}{\partial \vec{z}_e} \vec{\omega}_m^W + T_m^T \frac{\partial \vec{\omega}_m^W}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\beta}_m^W}{\partial \vec{z}_e} &= \frac{\partial \vec{\beta}_{m-1}^W}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial T_m}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm} \dot{\vec{\alpha}}_m \\ &\quad + T_m B_{Lm, Jm} \frac{\partial \dot{\vec{\alpha}}_m}{\partial \vec{z}_e} + \frac{\partial T_m}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm} \ddot{\vec{\alpha}}_m \\ &\quad + T_m B_{Lm, Jm} \frac{\partial \ddot{\vec{\alpha}}_m}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\beta}_m}{\partial \vec{z}_e} &= \frac{\partial T_m^T}{\partial \vec{z}_e} (\vec{\beta}_m^W - T_m \dot{\vec{\omega}}_m) \\ &\quad + T_m^T \left(\frac{\partial \vec{\beta}_m^W}{\partial \vec{z}_e} - \frac{\partial T_m}{\partial \vec{z}_e} \dot{\vec{\omega}}_m - T_m \frac{\partial \dot{\vec{\omega}}_m}{\partial \vec{z}_e} \right) \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となる。 $\dot{\vec{\alpha}}_m, \ddot{\vec{\alpha}}_m$ はジョイントの角速度、角加速度であり、第2報⁽⁶⁾式(58)~(60)で定義されている。これの状態変数での微分は容易に計算できる。従って座標変換行列とその時間微分を状態変数で微分したものが求められ、角速度、角加速度の微分は、順にベース・リンク側から求めることができる。

なお、式(19)~(20)の計算では、行列 $T_m, \dot{T}_m, B_{Lm, Jm}$ は、回転を表わす3行3列の部分だけ用いる。

3.2.5 座標変換行列とその時間微分の状態変数による微分 座標変換行列 T_m とその時間微分 $\dot{T}_m$ は第2報⁽⁶⁾式(4)~(6)より

$$T_m = T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m B_{Lm, Jm}^{-1} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\dot{T}_m = \dot{T}_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m B_{Lm, Jm}^{-1} + T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T}_m &= \ddot{T}_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m B_{Lm, Jm}^{-1} \\ &\quad + 2 \dot{T}_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m \\ &\quad + T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m'' B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m^2 \\ &\quad + T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \ddot{q}_m \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

となり、これらを状態変数 $\vec{z}_e$ ($e=1, 2, c$) で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_m}{\partial \vec{z}_e} &= \frac{\partial T_{m-1}}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm-1, Jm} P_m B_{Lm, Jm}^{-1} \\ &\quad + T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} \frac{\partial P_m}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm}^{-1} \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{T}_m}{\partial \vec{z}_e} = \frac{\partial \dot{T}_{m-1}}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm-1, Jm} P_m B_{Lm, Jm}^{-1}$$

$$+ \dot{T}_{m-1} B_{Lm-1, Jm} \frac{\partial P_m}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm}^{-1}$$

$$+ \frac{\partial T_{m-1}}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m$$

$$+ T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} \frac{\partial P_m'}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m$$

$$+ T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{\partial \ddot{T}_m}{\partial \vec{z}_e} = \frac{\partial \ddot{T}_{m-1}}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm-1, Jm} P_m B_{Lm, Jm}^{-1}$$

$$+ \ddot{T}_{m-1} B_{Lm-1, Jm} \frac{\partial P_m}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm}^{-1}$$

$$+ 2 \frac{\partial \dot{T}_{m-1}}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m$$

$$+ 2 \dot{T}_{m-1} B_{Lm-1, Jm} \frac{\partial P_m'}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m$$

$$+ 2 \dot{T}_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \frac{\partial \dot{q}_m}{\partial \vec{z}_e}$$

$$+ \frac{\partial T_{m-1}}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm-1, Jm} P_m'' B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m^2$$

$$+ T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} \frac{\partial P_m''}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm}^{-1} \dot{q}_m^2$$

$$+ T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m'' B_{Lm, Jm}^{-1} \frac{\partial \dot{q}_m^2}{\partial \vec{z}_e}$$

$$+ \frac{\partial T_{m-1}}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \ddot{q}_m$$

$$+ T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} \frac{\partial P_m'}{\partial \vec{z}_e} B_{Lm, Jm}^{-1} \ddot{q}_m$$

$$+ T_{m-1} B_{Lm-1, Jm} P_m' B_{Lm, Jm}^{-1} \frac{\partial \ddot{q}_m}{\partial \vec{z}_e} \quad \dots\dots\dots (32)$$

となる。ここで、 P_m' と P_m'' は第2報⁽⁶⁾式(7),(8)に定義されているので、容易に状態変数に関する微分を求めることができる。式(27)~(32)を用いることにより、座標変換行列とその時間微分の状態変数に関する微分をベース・リンク側から求めることができる。

以上の式(8)~(32)に、基準点の値 ($\vec{q}$ は $\vec{0}$ とする。)を用いて計算することにより、式(5)の係数は全て求まり、機構系の運動方程式を基準点のまわりで線形化を行うことができる。

3.3 線形化した状態方程式 基準点の近傍での微小変化に対して、機構系と制御系を連成させた状態方程式は、上記で線形化したものを用いて、(ここでは外乱は考えない。)

$$\dot{\vec{z}}_{\text{sys}} = \mathbf{A}_{\text{sys}} \vec{z}_{\text{sys}} \quad (33)$$

と書ける。ここで $\vec{z}_{\text{sys}}$ は系全体の微小変化に対する状態変数ベクトル

$$\vec{z}_{\text{sys}} = (\vec{z}_{11}^T, \vec{z}_{21}^T, \vec{z}_{c1}^T)^T \quad (34)$$

であり、 $\mathbf{A}_{\text{sys}}$ は、系全体の微小変化に対する状態変数ベクトルに、対応するように式(2)、(5)の状態変数の各係数を配置したものである。

4. 固有値解析

非線形の状態方程式を、基準点のまわりで線形化を行ったことにより、機構系と制御系が連成した固有値と固有モードは容易に求まる。

いま、微小変動に対する状態変数 $\vec{z}_{\text{sys}}$ を次のようにおく。

$$\vec{z}_{\text{sys}} = \vec{z}_{\text{sys}} e^{\lambda t} \quad (35)$$

式(35)を式(33)に代入して、整理すると

$$(\mathbf{A}_{\text{sys}} - \lambda \mathbf{I}) \vec{z}_{\text{sys}} = \vec{0} \quad (36)$$

となる。ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列である。すなわち、微小変動に対する系の係数行列 $\mathbf{A}_{\text{sys}}$ の固有値が、機構系と制御系を連成させた状態での固有振動数となり、また、固有ベクトルが振動モードとなる。

5. 伝達関数解析

機構系と制御系が連成している状態での伝達関数を求める。この時の励振力 $\vec{F}_{\text{sys}}$ として以下のもの考える。
・外力、・駆動力、・制御の目標値

5.1 励振力

5.1.1 外力が励振力になる場合 外力が励振力になる場合には、励振力となる外力を用いて力解析⁽⁶⁾を行い、各ジョイントにその励振力により作用する力、モーメントを求める。そのジョイントに作用する力、モーメントから $\vec{F}_{\text{sys}}$ を構成する。いまリンク L_m の局所座標系で表わした励振力を $\Delta \vec{r}_{fm}$ 、その作用点の位置を $\Delta \vec{r}_{fm}$ と励振モーメントを $\Delta \vec{n}_m$ とすると、この場合の力解析の漸化式は以下のようになる。

$$\Delta \vec{F}_{Jm} = \mathbf{Q}_{Lm, Jm}^T (\Delta \vec{F}_{Lm} - \mathbf{Q}_{Lm, Jm+1} \Delta \vec{F}_{Jm+1}) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{M}_{Jm} = & \mathbf{Q}_{Lm, Jm}^T \{ \Delta \vec{M}_{Lm} - \vec{s}_{Gm, Jm} \times \Delta \vec{F}_{Lm} \\ & - (\vec{s}_{Gm, Jm+1} - \vec{s}_{Gm, Jm}) \\ & \times \mathbf{Q}_{Lm, Jm+1} \Delta \vec{F}_{Jm+1} \\ & - \mathbf{Q}_{Lm, Jm+1} \Delta \vec{M}_{Jm+1} \} \end{aligned} \quad (38)$$

ここで、

$$\Delta \vec{F}_{Lm} = -\Delta \vec{r}_{fm} \quad (39)$$

$$\Delta \vec{M}_{Lm} = -\Delta \vec{n}_m - (\Delta \vec{r}_{fm} - \vec{r}_{Gm}) \times \Delta \vec{F}_{Lm} \quad (40)$$

従って、 $\vec{F}_{\text{sys}}$ は以下のようになる。

$$\vec{F}_{\text{sys}} = \{ (-\mathbf{A}_0^{-1} \Delta \vec{b})^T, \vec{0} \}^T \quad (41)$$

ここで、 $\mathbf{A}_0$ は基準点でのイナーシャ行列

$$\Delta \vec{b} = (\Delta b_1, \dots, \Delta b_{\lambda_D})^T \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Delta b_m = & \vec{d}_m^T \{ (1 - \alpha'_m) \Delta \vec{F}_{Jm} \\ & + \alpha'_m \Delta \vec{M}_{Jm} \} \end{aligned} \quad (43)$$

である。これらの漸化式の中で励振力として考えている $\Delta \vec{r}_{fm}$ 、 $\Delta \vec{r}_{fm}$ の組か、 $\Delta \vec{n}_m$ の1つだけ値が入り他は0とする。

なお、式(37)、(38)の計算において、行列 $\mathbf{Q}_{Lm, Jm}$ 等は、回転を表す3行3列の部分だけを用いる。

5.1.2 駆動力が励振力になる場合 駆動力が励振力になる場合には、 $\vec{F}_{\text{sys}}$ は簡単で、

$$\vec{F}_{\text{sys}} = \{ (\mathbf{A}_0^{-1} \Delta \vec{r})^T, \vec{0} \}^T \quad (44)$$

となる。ここで、

$$\Delta \vec{r} = (\Delta r_1, \dots, \Delta r_{\lambda_D})^T \quad (45)$$

であり、 Δr_m は、ジョイント J_m の駆動力が励振力になる場合には1となり、その他は0である。

5.1.3 制御の目標値が励振力になる場合 制御の目標値の変動が励振力になる場合を考える。いま、ジョイント J_m にある制御系の目標値に変動 Δu_1^m があるとすると、それによる影響は式(2)から、

$$\dot{z}_1^m, n_1^m = \Delta u_1^m \quad (46)$$

$$\dot{z}_3^m, n_3^m = d_1^m \Delta u_1^m \quad (47)$$

$$\Delta r_m = d_3^m d_1^m \Delta u_1^m \quad (48)$$

となり、

$$\vec{F}_{\text{sys}} = \{ (\mathbf{A}_0^{-1} \Delta \vec{r})^T, \Delta \vec{c} \}^T \quad (49)$$

となる。ここで、

$$\Delta \vec{r} = (\Delta r_1, \dots, \Delta r_{\lambda_D})^T \quad (50)$$

であり、 $\Delta \vec{c}$ は、 $\vec{z}_{\text{sys}}$ の中で式(46)、式(47)の左辺の状態変数のある列に各々の右辺の値が入っているベクトルである。

5.2 伝達関数解析 5.1 で求めた励振力が作用する状況での系の状態方程式は次式で表わされる。

$$\dot{\vec{z}}_{\text{sys}} = \mathbf{A}_{\text{sys}} \vec{z}_{\text{sys}} + \vec{F}_{\text{sys}} e^{j\omega t} \quad (51)$$

ここで、定常を仮定し、 $\vec{z}_{\text{sys}}$ を以下のようにおく。

$$\vec{z}_{\text{sys}} = \vec{z}_{\text{sys}} e^{j\omega t} \quad (52)$$

式(52)を式(51)に代入し、整理すると、

$$\vec{z}_{\text{sys}} = (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{sys}})^{-1} \vec{F}_{\text{sys}} \quad (53)$$

となり、これを解くことにより伝達関数の値が求まる。

図2 制御系の例

図1 産業用ロボット

図1 産業用ロボット

図3 伝達関数

6. 例題

本シミュレーション・システムを用いた解析例を次に示す。例として用いたのは、第3報⁽⁷⁾とまったく同じ6自由度の産業用ロボットで、各ジョイント毎に、図2に示すような制御系(ロボット・コントローラ)が組み込まれている。なお、ここでは、ジョイント番号を示すサフィックスmは省略している。

基準値として、第3報⁽⁷⁾で行った応答解析の最終姿勢(図1(a))を用いて振動解析を行った。その結果、固有振動数の中で最も振動的な周波数 f_1 と第3報⁽⁷⁾の図7に示されている残留振動の周波数が一致した。その振動数 f_1 に対応する振動モードを図1(b)に示す。また、同じ基準姿勢で、ロボットの先端に励振力を加えた時の伝達関数を図3に示す。図3のピークの振動数は、固有値解析より得られた最も振動的な周波数 f_1 と一致した。

7. 結論

第3報⁽⁷⁾で報告した機構系と制御系の状態方程式を用いて、機構系と制御系とを連成させた状態で固有振動数、振動モード、伝達関数を求める手法を示した。

本シミュレーション・システムを用いることにより、機構系と制御系の連成した複雑な微分方程式を作成することなく、容易に振動解析を行うことが可能となった。

文 献

- (1) 遠山, 高野, 昭和59年度精機学会秋季大会学術講演会論文集(昭59), 697.
- (2) 増井, 坂上, 杉本, 第24回計測自動制御学会学術講演会前刷(昭60), 525.
- (3) 増田, 小崎, 二川, 有本, 昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会論文集(昭61), 547.
- (4) 桜井, 中川, 一柳, 昭和61年度精密工学会春季大会学術講演会論文集(昭61), 551.
- (5) 黒岩, 本江, 平岡, 機論, 52-484, C(昭61), 3214.
- (6) 黒岩, 本江, 平岡, 高原, 機論, 53-486, C(昭62), 499.
- (7) 黒岩, 高原, 本江, 講演論文前刷, (第24回機械力学シンポジウム)(昭62-7) 投稿中
- (8) 本江, 黒岩, 佐藤, 東芝レビュー, 42-1 (昭62), 8.