四乗の非線形復元力をもつ偏平軸および 非対称回転体の非線形強制振動*

(第2報, 和差調波・超和差調波振動の共振曲線の変化と不安定振動の発生)

池田 隆^{*1}, 石田 幸男^{*1}, 山本 敏男^{*2}

Nonlinear Forced Oscillations of an Unsymmetrical Shaft and an Unsymmetrical Rotor with Quartic Nonlinearity (2nd Report, Variations of Resonance Curves of Summed-and-Differential Harmonic and Super-Summed-and-Differential Harmonic Oscillations and the Occurrence of Unstable Vibrations) Takashi IKEDA, Yukio ISHIDA, and Toshio YAMAMOTO

This paper deals with the summed-and-differential harmonic and super-summed-and-differential harmonic oscillations in an unsymmetrical shaft system and an unsymmetrical rotor system with nonlinear spring characteristics, involving quartic nonlinear terms in addition to quadratic and cubic terms. The former system is constituted by an unsymmetrical shaft and a symmetrical rotor, and the latter by a round shaft and an unsymmetrical rotor. We theoretically investigated the effects of the directional difference of shaft stiffness or rotor inertia on these oscillations, paying attention to the nonlinear components represented by the polar coordinates. Resonance curves for each oscillation are obtained by numerical calculation. As the results, it is clarified that the shapes of resonance curves vary due to the unsymmetry of the shaft or the rotor, and that an unstable vibration occurs in a particular type of oscillation. In experiments, the probability of occurrence of this unstable vibration was investigated.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Bearing, Unsymmetrical Shaft, Unsymmetrical Rotor, Quartic Nonlinearity, Summed-and-Differential Harmonic Oscillation, Super-Summed-and-Differential Harmonic Oscillation, Unstable Vibration

1. ま え が き

複列アングュラ玉軸受で支持された対称回転軸系(真円軸に対称回転体を取付けた系)では, 復元力中に四乗の非線形項が顕著に現れ, その四乗項に起因して各種の非線形強制振動^{(1)~(3)}が発生することを報告した。第1報⁽⁴⁾では, 偏平軸系(偏平軸に対称回転体を取付けた系)あるいは非対称回転体系(真円軸に非対称回転体を取付けた系)において, 軸剛性や慣性モーメントの方向差がこのような振動のうちの1/4次分数調波振動と3/2次および2/3次の超分数調波振動⁽¹⁾に及ぼす影響について調べ, 共振曲線の形状が変化したり, 特定の様式の超分数調波振動に不安定振動が発生することを明らかにした。

本論文では, 第1報と同様な偏平軸系および非対称回転体系において, 四乗の非線形項に起因して対称回転軸系に定常振動として発生する和差調波振動と超和差調波振動⁽²⁾が軸の偏平性や回転体の非対称性によってどのように変化するかを調べた。特に, 極座標表示

の非線形成分⁽¹⁾⁽⁵⁾との関連に注意して理論解析を行い, さらに不安定振動発生の可能性について実験的にも検討した。

2. 運動方程式

理論解析では回転体のたわみと傾きが連成しない場合の傾き振動を扱う。第1報⁽⁴⁾に示したように, 無次元表示の運動方程式は偏平軸系の場合には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x - \Delta_s (\theta_x \cos 2\omega t \\ + \theta_y \sin 2\omega t) + N_{\theta x} \\ = (1 - i_p) \tau \omega^2 \cos(\omega t + \alpha_s) \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y - \Delta_s (\theta_x \sin 2\omega t \\ - \theta_y \cos 2\omega t) + N_{\theta y} \\ = (1 - i_p) \tau \omega^2 \sin(\omega t + \alpha_s) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここで, $\dot{}$ は時間微分, θ_x, θ_y は軸の傾き角の成分, ω は軸回転速度, i_p は回転体の極慣性モーメント I_p と直径まわりの慣性モーメント I の比, c は減衰係数, $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ は復元力の非線形成分, τ は動不釣り合い, α_s は τ の角位置, t は時間を表す。また, 軸の曲げ剛性の最大値, 最小値をそれぞれ $\delta + \Delta\delta, \delta - \Delta\delta$ とすると, 軸剛性の方向差を表す量 $\Delta\delta/\delta$ が Δ_s である。式(1)で

* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演, 原稿受付 昭和62年11月30日。

^{*1} 正員, 名古屋大学工学部 (〒464-01 名古屋市千種区不老町)。

^{*2} 正員, 名城大学理工学部 (〒468 名古屋市天白区塩釜口1-501)。

は, Δ_s, τ は微小量 ε の零乗程度 [以下 $O(\varepsilon^0)$ と略記] の量, c, N_{gx}, N_{gy} は $O(\varepsilon)$ の量と仮定する. 非線形項が, 座標 θ_x, θ_y の四乗までの項から成るとすると, 系のポテンシャルエネルギー V は一般に θ_x と θ_y に関する五次式で与えられる. それを, 式 $\theta_x = \theta \cos \varphi, \theta_y = \theta \sin \varphi$ を用いて変換し, 極座標 (θ, φ) で表示すると次式となる⁽¹⁾⁽⁵⁾.

$$V = V_0 + \{\varepsilon^{(1)} \cos(\varphi - \varphi_1) + \varepsilon^{(3)} \cos 3(\varphi - \varphi_3)\} \theta^3 + \{\beta^{(0)} + \beta^{(2)} \cos 2(\varphi - \varphi_2)\} \theta^4 + \beta^{(4)} \cos 4(\varphi - \varphi_4) \theta^4 + \{\mu^{(1)} \cos(\varphi - \varphi_1') + \mu^{(3)} \cos 3(\varphi - \varphi_3')\} \theta^5 + \mu^{(5)} \cos 5(\varphi - \varphi_5') \theta^5 \dots \dots \dots (2)$$

ここに, V_0 は復元力中の線形項に対応する項である. 式(2)により, ポテンシャルエネルギーの非線形部分は φ が 2π 変化する間に n 回 ($n=0, 1, \dots, 5$) 増減する成分に分けられる. これらの成分のうち, 復元力中の二乗項と三乗項から生じるものを記号 $N(n)$ ($n=0, 1, \dots, 4$), 四乗項から生じるものを記号 $N'(n)$ ($n=1, 3, 5$) で表す. 式(2)中の係数の肩の () 内の数字はこの n の値を示す. 固有振動数を p とすると, 偏平性 Δ_s の存在のため振動数 $\bar{p} (=2\omega - p)$ も共存し, 式(1)から振動数方程式は次式となる⁽⁶⁾.

$$G(p)G(\bar{p}) - \Delta_s^2 = 0 \dots \dots \dots (3)$$

ただし, $G(p) = 1 + i_p \omega p - p^2, G(\bar{p}) = 1 + i_p \omega \bar{p} - \bar{p}^2$ である. 式(3)はある ω の値に対し最大四つの実根をもつ. このうち, $\Delta_s = 0$ の場合の対称回転軸系に対応するものを $p_f (>0), p_b (<0)$ とし, 他の2根を $\bar{p}_f (=2\omega - p_f), \bar{p}_b (=2\omega - p_b)$ とする. 図1に $i_p = 0.3, \Delta_s = 0.2$ の場合の p - ω 線図を示す.

非対称回転体系の傾き振動に対する運動方程式は, 無次元表示で次式となる⁽⁴⁾.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_x + i_p \omega \dot{\theta}_y + c \dot{\theta}_x + \theta_x - \Delta_i \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_x \cos 2\omega t) \\ + \dot{\theta}_y \sin 2\omega t + N_{gx} \\ = \tau \omega^2 \{ (1 - i_p) \cos(\omega t + \alpha_i) \\ + \Delta_i \cos(\omega t - \alpha_i) \} \\ \ddot{\theta}_y - i_p \omega \dot{\theta}_x + c \dot{\theta}_y + \theta_y - \Delta_i \frac{d}{dt} (\dot{\theta}_x \sin 2\omega t) \\ - \dot{\theta}_y \cos 2\omega t + N_{gy} \\ = \tau \omega^2 \{ (1 - i_p) \sin(\omega t + \alpha_i) \\ + \Delta_i \sin(\omega t - \alpha_i) \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ここで, α_i は動不釣り合い τ の角位置である. また, 回転体の重心を通る直交3軸まわりの主慣性モーメントを I_p, I_1, I_2 ($I_1 > I_2$) とすると, 式(4)中の $\Delta_i [= (I_1 - I_2)/(I_1 + I_2)]$ は慣性モーメントの方向差を表す量で

ある. 式(1), (4)の二つの系は類似しているので, 3章では主に式(1)の偏平軸系に対して解析する.

3. 理論解析

図1に示す固有振動数 p_f, p_b と回転速度 ω の間に

$$kp_f + lp_b = m\omega \quad [\text{ただし, } k, l \text{ は整数 } (\neq 0), \\ m = 1, 2, 3, |k| + |l| + |m| = 5] \dots \dots \dots (5)$$

なる関係式を満たす回転速度付近で発生する和差調波振動と超和差調波振動について解析を行う. これらの振動を記号 $[(kp_f + lp_b)/m]$ で表す. ここで対象とする振動は $[3p_f - p_b], [p_f - 3p_b], [2p_f - 2p_b], [(2p_f - p_b)/2], [(p_f - 2p_b)/2]$, および $[(p_f - p_b)/3]$ の6種類である. 図1に固有振動数 p_f と p_b の結合振動数 $(3p_f - p_b, p_f - 3p_b)$ などが短い破線で描かれ, それと $p = \omega, p = 2\omega$, および $p = 3\omega$ の直線との交点が A~F の○印で示されており, 各振動の共振点は○印の横座標で与えられる. これらの共振点(記号 ω_0 で表す)付近では, 調和振動成分以外に四つ振動成分が $O(\varepsilon^0)$ の大きさで同時に発生する. これらの成分は $\omega = \omega_0$ での固有振動数 $p_{f0}, p_{b0}, \bar{p}_{f0} (=2\omega_0 - p_{f0}), \bar{p}_{b0} (=2\omega_0 - p_{b0})$ にほぼ等しい振動数をもつ. 前者二つの全位相を θ_f, θ_b とすれば, その瞬間振動数 $\dot{\theta}_f, \dot{\theta}_b$ はそれぞれ p_{f0}, p_{b0} にほぼ等しく, $O(\varepsilon^0)$ の精度では

$$\dot{\theta}_f = \frac{p_{f0}}{\omega_0} \omega (\equiv \omega_f), \quad \dot{\theta}_b = \frac{p_{b0}}{\omega_0} \omega (\equiv \omega_b) \dots \dots \dots (6)$$

が成立する. 振動 $[(kp_f + lp_b)/m]$ の近似解を $O(\varepsilon)$ の精度で次のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= R_f \cos \theta_f + R_b \cos \theta_b + \bar{R}_f \cos \bar{\theta}_f \\ &\quad + \bar{R}_b \cos \bar{\theta}_b + P \cos \theta_\omega \\ &\quad + \varepsilon f_1(\omega_f, \omega_b, \bar{\omega}_f, \bar{\omega}_b, 2\omega + \omega_f, \\ &\quad 2\omega + \omega_b, 2\omega + \bar{\omega}_f, 2\omega + \bar{\omega}_b) \\ \theta_y &= R_f \sin \theta_f + R_b \sin \theta_b + \bar{R}_f \sin \bar{\theta}_f \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

図1 偏平軸系の p - ω 線図 (二自由度系)

$$\left. \begin{aligned} & + \bar{R}_b \sin \bar{\theta}_b + P \sin \theta_\omega \\ & + \varepsilon f_2(\omega_f, \omega_b, \bar{\omega}_f, \bar{\omega}_b, 2\omega + \omega_f, \\ & 2\omega + \omega_b, 2\omega + \bar{\omega}_f, 2\omega + \bar{\omega}_b) \end{aligned} \right\}$$

ただし, $\theta_f = \omega_f t$

$+\delta_f, \theta_b = \omega_b t + \delta_b, \bar{\theta}_f = \bar{\omega}_f t - \delta_f, \bar{\theta}_b = \bar{\omega}_b t - \delta_b, \theta_\omega = \omega t + \beta, \bar{\omega}_f = 2\omega - \omega_f, \bar{\omega}_b = 2\omega - \omega_b$ である。また $f_1(\dots), f_2(\dots)$ の具体的な形は既報⁽⁷⁾に示されている。振幅 $R_f, R_b, \dots$, 位相角 δ_f, δ_b は時間的にゆっくり変化する $O(\varepsilon^0)$ の大きさの量とする。式(7)を式(1)に代入し, $O(\varepsilon^0)$ の精度で調和バランスをとれば, 調和振動解⁽⁴⁾(P, β), および振幅比

$$\frac{\bar{R}_f}{R_f} = \frac{G_f}{\Delta_s} = \frac{\Delta_s}{\bar{G}_f}, \frac{\bar{R}_b}{R_b} = \frac{G_b}{\Delta_s} = \frac{\Delta_s}{\bar{G}_b} \dots \dots \dots (8)$$

を得る。ここで, $G_f = G(\omega_f), \bar{G}_f = G(\bar{\omega}_f), G_b = G(\omega_b), \bar{G}_b = G(\bar{\omega}_b)$ である。

次に, 式(7)を式(1)に代入し, $O(\varepsilon)$ の精度で調和バランスをとり, 式(8)を用いれば, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_f R_f \dot{\delta}_f &= \sigma_f R_f + N_f \\ A_f \dot{R}_f &= -c_f R_f + N'_f \\ A_b R_b \dot{\delta}_b &= \sigma_b R_b + N_b \\ A_b \dot{R}_b &= -c_b R_b + N'_b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

ただし, 式中の諸記号は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} A_f &= (i_p \omega - 2\bar{\omega}_f) G_f - (i_p \omega - 2\omega_f) \bar{G}_f \\ A_b &= (i_p \omega - 2\bar{\omega}_b) G_b - (i_p \omega - 2\omega_b) \bar{G}_b \\ c_f &= c(\omega_f \bar{G}_f - \bar{\omega}_f G_f) \\ c_b &= c(\omega_b \bar{G}_b - \bar{\omega}_b G_b) \\ N_f &= \{ \bar{G}_f (N_{fxc} + N_{fys}) + \Delta_s (\bar{N}_{fxc} + \bar{N}_{fys}) \} / 2 \\ N'_f &= \{ \bar{G}_f (N_{fzs} - N_{fyc}) - \Delta_s (\bar{N}_{fzs} - \bar{N}_{fyc}) \} / 2 \\ N_b &= \{ \bar{G}_b (N_{bxc} + N_{bys}) + \Delta_s (\bar{N}_{bxc} + \bar{N}_{bys}) \} / 2 \\ N'_b &= \{ \bar{G}_b (N_{bzs} - N_{byc}) - \Delta_s (\bar{N}_{bzs} - \bar{N}_{byc}) \} / 2 \\ \sigma_f &= G_f \bar{G}_f - \Delta_s^2, \sigma_b = G_b \bar{G}_b - \Delta_s^2 \end{aligned} \right\}$$

..... (10)

ただし, たとえば式(10)中の $N_{fxc}, \bar{N}_{bys}$ は, それぞれ式(7)中の $O(\varepsilon^0)$ の項を式(1)の $N_{\theta x}, N_{\theta y}$ に代入したときの $\cos(\omega_f t + \delta_f), \sin(\bar{\omega}_b t - \delta_b)$ の係数を表す。定常解 $R_f = R_{f0}, R_b = R_{b0}$ 間の振幅比 ν は, 式(9)の第2, 第4式の左辺を零と置いた式から次のように得られる。

$$\nu^2 = (R_{b0}/R_{f0})^2 = l c_f \bar{G}_b / (k c_b \bar{G}_f) \dots \dots \dots (11)$$

一例として, 振動 $[(p_f - p_b)/3]$ に対する式(9)中の N_f, N_b などを次に示す。

$$\left. \begin{aligned} N_f &= 4\beta^{(0)} \bar{G}_f (g_1 R_f^2 + 2g_2 R_b^2 + 2k_1 P^2) R_f + 6\varepsilon^{(3)} \Delta_s \bar{G}_f n_3 P R_b \cos(\psi - \beta + 3\varphi_3) + 12\mu^{(3)} \Delta_s \bar{G}_f P R_b (3n_1 R_f^2 + n_2 R_b^2 \\ & + n_3 P^2) \cos(\psi - \beta + 3\varphi_3) + 12\mu^{(3)} \bar{G}_f P R_b (3n_4 R_f^2 + n_5 R_b^2) \cos(\psi + \beta + 3\varphi_3) + 4\mu^{(3)} \bar{G}_f n_6 P^3 R_b \cos(\psi - 3\beta + 3\varphi_3) \\ N'_f &= 6\varepsilon^{(3)} \Delta_s \bar{G}_f n_3 P R_b \sin(\psi - \beta + 3\varphi_3) + 12\mu^{(3)} \Delta_s \bar{G}_f P R_b (n_1 R_f^2 + n_2 R_b^2 + n_3 P^2) \sin(\psi - \beta + 3\varphi_3) \\ & + 12\mu^{(3)} \bar{G}_f P R_b (n_4 R_f^2 + n_5 R_b^2) \sin(\psi + \beta + 3\varphi_3) + 4\mu^{(3)} \bar{G}_f n_6 P^3 R_b \sin(\psi - 3\beta + 3\varphi_3) \\ N_b &= 4\beta^{(0)} \bar{G}_b (2g_2 R_f^2 + g_3 R_b^2 + 2k_2 P^2) R_b + 6\varepsilon^{(3)} \Delta_s \bar{G}_b n_3 P R_f \cos(\psi - \beta + 3\varphi_3) \\ & + 12\mu^{(3)} \Delta_s \bar{G}_b P R_f (n_1 R_f^2 + 3n_2 R_b^2 + n_3 P^2) \cos(\psi - \beta + 3\varphi_3) \\ & + 12\mu^{(3)} \bar{G}_b P R_f (n_4 R_f^2 + 3n_5 R_b^2) \cos(\psi + \beta + 3\varphi_3) + 4\mu^{(3)} \bar{G}_b n_6 P^3 R_f \cos(\psi - 3\beta + 3\varphi_3) \\ N'_b &= -6\varepsilon^{(3)} \Delta_s \bar{G}_b n_3 P R_f \sin(\psi - \beta + 3\varphi_3) - 12\mu^{(3)} \Delta_s \bar{G}_b P R_f (n_1 R_f^2 + n_2 R_b^2 + n_3 P^2) \sin(\psi - \beta + 3\varphi_3) \\ & - 12\mu^{(3)} \bar{G}_b P R_f (n_4 R_f^2 + n_5 R_b^2) \sin(\psi + \beta + 3\varphi_3) - 4\mu^{(3)} \bar{G}_b n_6 P^3 R_f \sin(\psi - 3\beta + 3\varphi_3) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

ただし, 上式中の諸記号は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= (G_f^2 + \bar{G}_f^2 + 4G_f \bar{G}_f) / \bar{G}_f^2 \\ g_2 &= \{ (G_f + \bar{G}_f)(G_b + \bar{G}_b) + 2\Delta_s^2 \} / (\bar{G}_f \bar{G}_b) \\ g_3 &= (G_b^2 + \bar{G}_b^2 + 4G_b \bar{G}_b) / \bar{G}_b^2 \\ k_1 &= (G_f + \bar{G}_f + 2\Delta_s \cos 2\beta) / \bar{G}_f \\ k_2 &= (G_b + \bar{G}_b + 2\Delta_s \cos 2\beta) / \bar{G}_b \\ n_1 &= (G_f + 2\bar{G}_f) / \bar{G}_f^2 + G_f / (\bar{G}_f \bar{G}_b) \\ n_2 &= (2G_b + \bar{G}_b) / (\bar{G}_f \bar{G}_b) + 1 / \bar{G}_b \\ n_3 &= 1 / \bar{G}_f, n_4 = G_f / \bar{G}_f, n_5 = G_f / \bar{G}_b, n_6 = 1 + G_f / \bar{G}_b \\ \psi &= \delta_f - \delta_b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

振動 $[(p_f - p_b)/3]$ には, 対称回転軸系では成分 $N(0), N'(3)$ が関与するが⁽²⁾, 式(12)からわかるように, 偏平軸系では同じ成分が $\Delta_s N(0), \Delta_s N'(3)$ のように積の形で関与するのに加え, 新たに別の成分 $N(3)$ が偏平性を介して関与

表 1 各振動に関する非線形成分

Types of oscillations	Relating nonlinear components	
	Symmetrical system	Unsymmetrical shaft system
$[3p_f - p_b]$	$N(0), N'(1)$	$N(0), N'(1), \Delta_5 N(0), \Delta_5 N'(1)$
$[p_f - 3p_b]$	$N(0), N'(3)$	$N(0), N'(3), \Delta_5 N(0), \Delta_5 N'(3)$
$[2p_f - 2p_b]$	$N(0), N'(1)$	$N(0), N'(1), \Delta_5 N(0), \Delta_5 N'(1)$
$[(2p_f - p_b)/2]$	$N(0), N'(1)$	$N(0), N'(1), \Delta_5 N(0), \Delta_5 N'(1)$
$[(p_f - 2p_b)/2]$	$N(0), N'(3)$	$N(0), N'(3), \Delta_5 N(0), \Delta_5 N'(3)$
$[(p_f - p_b)/3]$	$N(0), N'(3)$	$N(0), N'(3), \Delta_5 N(0), \Delta_5 N'(3)$

している。また、定常解 $R_{f0}, R_{b0}, \phi_0 (= \delta_{f0} - \delta_{b0})$ の値は、式(9)の左辺を零とおいた式と式(11)~(13)を用いて数値計算により求まり、その安定判別も既報⁽⁶⁾と同様に行える。他の振動については式(9)に相当する式の記述を省略するが、各振動に関する非線形成分を対称回転軸系と対比させて表1に示した。表1中の係数 Δ_i をもつ成分は、偏平性を介して関与することを意味する。また、偏平軸系で新たに関与する成分には下線を施してある。

非対称回転体系についても、偏平軸系と同様に解析でき、式(9)と同じ構成をもつ式が得られる。ただしその式中の諸記号について、式(10)と異なるものを次に示す。

$$\left. \begin{aligned}
 A_f &= (i_p \omega - 2\bar{\omega}_f) G_f - (i_p \omega - 2\omega_f) \bar{G}_f + 4\Delta_f^2 \omega_f \bar{\omega}_f (\omega - \omega_f) \\
 A_b &= (i_p \omega - 2\bar{\omega}_b) G_b - (i_p \omega - 2\omega_b) \bar{G}_b + 4\Delta_b^2 \omega_b \bar{\omega}_b (\omega - \omega_b) \\
 N_f &= \{ \bar{G}_f (N_{fxc} + N_{fys}) + \Delta_i \omega_f \bar{\omega}_f (\bar{N}_{fxc} + \bar{N}_{fys}) \} / 2 \\
 N'_f &= \{ \bar{G}_f (N_{fxs} - N_{fyc}) - \Delta_i \omega_f \bar{\omega}_f (\bar{N}_{fxs} - \bar{N}_{fyc}) \} / 2 \\
 N_b &= \{ \bar{G}_b (N_{bxc} + N_{bys}) + \Delta_i \omega_b \bar{\omega}_b (\bar{N}_{bxc} + \bar{N}_{bys}) \} / 2 \\
 N'_b &= \{ \bar{G}_b (N_{bxs} - N_{byc}) - \Delta_i \omega_b \bar{\omega}_b (\bar{N}_{bxs} - \bar{N}_{byc}) \} / 2 \\
 \sigma_f &= G_f \bar{G}_f - (\Delta_i \omega_f \bar{\omega}_f)^2, \sigma_b = G_b \bar{G}_b - (\Delta_i \omega_b \bar{\omega}_b)^2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(9)に相当する具体的な式の記述は省略するが、各振動に関する非線形成分の種類は、非対称性 Δ_i を介して現れる点を除けば、表1に示した偏平軸系の場合と全く同じである。

以上の解析をもとに、数値計算から求めた共振曲線を図2~8、および図10に示す。縦軸には振幅 R_{f0} と R_{b0} の和がとられている。実線は安定解、破線は不安定解を示す。振動 $[(p_f - p_b)/3]$ の基礎式である式(9)、(12)の例からもわかるように、ここで扱ったすべての様式の振動には振幅零 (すなわち $R_{f0} = 0, R_{b0} = 0$) の解が常に存在するが、図にはその表示を省略した。振幅零の解の安定性は、共振曲線が ω 軸と交わる2点間では不安定、その外側では安定である。

図2~7に、各振動に及ぼす偏平性 Δ_i の影響を示す。系の固有振動数に大きく影響する i_p の値は、各振動の共振点が主危険速度と重ならないように異なる値を与えた。図2~4は、それぞれ和差調波振動 $[3p_f - p_b], [p_f - 3p_b], [2p_f - 2p_b]$ に対する共振曲線である。いずれの場合も偏平性 Δ_i は共振点を移動させるだけであり、共振曲線に定性的な変化を及ぼさない。図5、6にそれぞれ超和差調波振動 $[(2p_f - p_b)/2], [(p_f - 2p_b)/2]$ に対する共振曲線を示す。両者は偏平性 Δ_i の影響が似ており、対称回転軸系 ($\Delta_i = 0$) の場合には

漸硬形の共振曲線であったものが、 Δ_i が大きくなるにつれて共振曲線の安定解の部分が反時計方向に回転し、上下に分割されるタイプの共振曲線が現れる。さらに Δ_i が増えると、すべて不安定解である共振曲線となる。この場合に振幅零の解は ω の全域において安定である。図7は超和差調波振動 $[(p_f - p_b)/3]$ に対する共振曲線である。 $\Delta_i = 0$ の場合に ω 軸から離れた位置に漸硬形で現れる共振曲線は、 Δ_i が大きくなるにつれ ω 軸と交わりと同時に共振領域も広がり、さらに Δ_i が増え $\Delta_i = 0.2$ の例では、共振曲線の安定部が反時計方向に回転し不安定解となる。このときの ω 軸との交点 A, B の間では振幅零の解も不安定であるため、この AB 間は安定解が全く存在しない不安定領域となることを示している。この不安定領域は非線形成分 $N'(3)$ の大きさにも影響を受ける。その一例を図8に示す。成分 $N'(3)$ の係数 $\mu^{(3)}$ の値が大きい場合には不安定領域は現れるが、 $\mu^{(3)}$ が小さくなると ($\mu^{(3)} = 0.005$) 漸硬形の共振曲線となり、不安定領域は存在しなくなる。

さて、図7、8で示された不安定領域は近似解から得られたものであるが、その精度を検討するため、図7の AB 間において運動方程式(1)を Runge-Kutta-Verner 法で直接数値積分した結果、図9の波形を得

た. $\omega=0.672$, $t=0$ での初期条件は $\theta_x=0.327$, $\dot{\theta}_x=0$, $\theta_y=0$, $\dot{\theta}_y=0.219$ とした. 図9から, 振幅が時間的に増大する不安定振動が発生していることがわかる.

以上の各振動について, 偏平性 Δ_s の影響を不安定振動の発生という観点から述べると次のようになる. すなわち, 対称回転軸系 ($\Delta_s=0$) において無減衰 ($c=$

0) の場合の共振曲線が ω 軸と2点で交わるタイプの振動 $[(p_f-p_b)/3]$ にのみ偏平性 Δ_s のため不安定領域が現れ, ω 軸と1点で交わるタイプの他の振動には不安定領域は現れない.

非対称回転体系についても, 偏平軸系と定性的に類似した共振曲線が得られたが, 非対称性 Δ_i の影響の一例として, 図10に振動 $[(p_f-p_b)/3]$ に対する共振曲線を示す. 図7と同様に, 非対称性 Δ_i が大きい場合 ($\Delta_i=0.14$ の例) に ω 軸上の交点 A, B の間が不安定領域となる. 他の様式の振動については, 非対称性 Δ_i により不安定領域が現れることはない.

4. 実験装置と実験結果

実験装置には, 第1報⁽⁴⁾と同様に1個の回転体をもつ弾性軸の上下端を鉛直に支持した構造の回転軸系を用いた. 以下に偏平軸系について述べる. 回転体の質量は 4.27 kg , $I_p=0.0200 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $I=0.0106 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, 偏平軸は長さ 700 mm で, 直径 13 mm の真円軸の両側面を厚さ 7.40 mm に削ったものを使用した. 軸の上部は複列自動調心玉軸受 (#1200), 下部は複列アン

図2 振動 $[3p_f - p_b]$ に及ぼす偏平性 Δ_s の影響

図3 振動 $[p_f - 3p_b]$ に及ぼす偏平性 Δ_s の影響

図4 振動 $[2p_f - 2p_b]$ に及ぼす偏平性 Δ_s の影響

図5 振動 $[(2p_f - p_b)/2]$ に及ぼす偏平性 Δ_s の影響

図6 振動 $[(p_f - 2p_b)/2]$ に及ぼす偏平性 Δ_s の影響

ギョウ玉軸受 (#5204) で支持し, 回転体は下部軸受から 140 mm の位置に取付けられた。下部軸受には約 0.11° の角度のがたが存在するため, そのがたの範囲と軸中心線の位置関係に応じて, 軸はさまざまな非線形ばね特性をもつ。実験装置は回転体のたわみと傾きが連成する四自由度系であり, 対称回転軸系に対応す

る固有振動数 $p_i (i=1\sim4, p_1 > p_2 > 0 > p_3 > p_4)$ と, 軸の偏平性により $\bar{p}_i (=2\omega - p_i)$ の固有振動数が共存する。実験では, 理論解析で不安定領域が現れる振動 $[(p_1 - p_0)/3]$ に対応する振動 $[(p_2 - p_3)/3]$ について不安定振動の発生の有無を調べた。振動測定は, 水平面内の直角 2 方向 (x, y 方向) における回転体の変位について行った。

図 11 に偏平軸系で得られた共振曲線の一例を示す。その形状は漸硬形となっている。軸受のがたと軸中心線の位置関係をいろいろ変えた他の組立状態においても, 振幅の大きさや共振領域は多少変化するものの図 11 と類似した共振曲線が得られ, 不安定振動は観察されなかった。その理由は次のように考えられる。3 章の理論解析によれば, 振動 $[(p_2 - p_3)/3]$ の不安定振動の発生に大きく関与する非線形成分は $N'(3)$ である。式(2)からわかるように, この成分は方向角 φ が 2π 変化する間に 3 回その大きさが増減し, その変化回数が多いため実際の装置では成分 $N'(1)$ ほど大きく現れない。したがって成分 $N'(3)$ が不安定振動を発生させるのに十分な大きさではなかったと考えられる。分数調波振動と超分数調波振動を扱った第 1 報⁽⁴⁾によれば, 理論解析では振動 $[(+3/2)\omega], [-(3/2)\omega]$ に不安定振動が現れるが, 実験では成分 $N'(1)$ が関与する振動 $[(+3/2)\omega]$ にのみ不安定振動が発生し, 成分 $N'(3)$ が関与する振動 $[-(3/2)\omega]$ には不安定振動は発生しなかった。本実験で超和差調波振動 $[(p_2 - p_3)/3]$ に不安定振動が現れなかったのは, 第 1 報⁽⁴⁾の振動 $[-(3/2)\omega]$ の場合と同じ理由である。

5. 結 言

軸受の角度のがたに起因して, 復元力に二乗, 三乗, および四乗の非線形項が含まれる偏平軸系と非対称回転体系において, 軸の偏平性や回転体の非対称性が四

図 7 振動 $[(p_1 - p_0)/3]$ に及ぼす偏平性 Δ_s の影響

図 8 振動 $[(p_1 - p_0)/3]$ に及ぼす非線形成分 $N'(3)$ の大きさの影響

図 9 振動 $[(p_1 - p_0)/3]$ の不安定領域内の数値シミュレーション結果 ($\omega = 0.672$)

図 10 振動 $[(p_1 - p_0)/3]$ に及ぼす非対称性 Δ_i の影響

図 11 偏平軸系における振動 $[(p_2 - p_3)/3]$ の共振曲線

乗の非線形項に起因する和差調波振動と超和差調波振動に及ぼす影響について理論的, 実験的に調べた結果, 以下のことが明らかとなった。

(1) 偏平軸系や非対称回転体系において四乗項に起因する和差調波振動と超和差調波振動には, 対称回転軸系の場合に関与する非線形成分のほかに, 偏平性や非対称性を介して同じ非線形成分が関与するタイプ

と, 新たに別の種類の非線形成分が関与するタイプがある。

(2) 二自由度の理論解析の結果, 四乗項に起因する6種類の振動に対する偏平性と非対称性の影響はさまざまであり, 共振曲線の形状がほとんど変化しないもの, 形状が大きく変化するもの, 形状の変化にともない不安定領域が現れるものがある。

(3) 不安定領域が現れる振動様式は, 無減衰の場合の対称回転軸系に対する共振曲線が ω 軸と2点で交わるタイプの振動 $[(p_1 - p_0)/3]$ だけであり, その領域内では振幅が時間的に増大する不安定振動が現れる。

(4) 実験において振動 $[(p_2 - p_3)/3]$ の不安定振動が発生しなかったのは, 関与する非線形成分 $N'(3)$ の大きさが十分ではなかったためである。

文 献

- (1) 石田・ほか2名, 機論, 52-476, C (昭61), 1280.
- (2) 石田・ほか3名, 機論, 52-476, C (昭61), 1289.
- (3) 石田・ほか2名, 機論, 52-476, C (昭61), 1257.
- (4) 池田・ほか3名, 機論, 54-497, C (昭63), 108.
- (5) 山本・石田, 機論, 41-345 (昭50), 1374.
- (6) 山本・ほか2名, 機論, 44-382 (昭53), 1934.
- (7) 山本・ほか2名, 機論, 46-405, C (昭55), 465.