時間領域の平均化を用いた実験モード解析*

岡田 養二^{*1}, 張 鉄林^{*2}, 遠藤 正規^{*3}Experimental Modal Analysis by Means of Time Domain Averaging
and Identification Technique

Yohji OKADA, Tie Lin ZHANG, and Masanori ENDOH

Experimental modal analysis has been widely used to identify the modal parameters of structures and reduce vibration. Mainly, it is based on frequency domain identification. Recently, a time domain technique has been proposed. This technique usually utilizes the FFT analyzer to condense the data, which is then inversely transformed to obtain the impulse responses. The main defect is the conversion error caused by the FFT calculation. This paper introduces a pure time domain technique. Impulse responses are calculated from the consecutive hammering force and response, and are then averaged to reduce experimental noise and error. The characteristic poles in the z -domain are calculated from these impulse responses and converted into the s -domain. The vibrating modes are determined so as to fit the response with the linear summation of the normalized responses of the identified poles. The proposed technique is applied and its accuracy is tested.

Key Words: Dynamics of Machinery, Measurement, Vibration, Identification, Experimental Modal Analysis

1. 緒 言

実験的に振動モードを推定し、動特性改善に役立てる解析手法は広く用いられている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。従来はFFTアナライザの発達もあって、主に周波数領域でモード同定が行われていた。近年時間領域でのいくつかの同定法が提案されている^{(6)~(7)}。しかし実際には、FFTアナライザを使用してデータを平均化し、その逆変換からインパルス応答を求めてモード特性を同定するものが主である。これらの手法の欠点は、FFTの基本特性である時間波形を周期的な波形とみなし、周波数領域へ変換する誤差が大きく影響する。そのためのウィンドウの工夫や、平均化による精度向上が計られてきた。

一方ランダムプロセスにおけるAR(自己回帰)法は、短いデータから系の特性が同定できると言われている^{(1)~(3)}。AR法を用いるモード解析も報告されているが、ランダム加振をしなければならないため、取扱

いの簡便さが失われる。現場的にはハンマリング加振の扱いやすさは、捨てがたい長所である。

本研究は、ハンマリング応答の時間領域波形のみを利用し、精度を向上したモード解析手法を提案する。基本的にはProny法を利用するが⁽⁸⁾、そのまま適用するにはハンマリング応答の信頼性が問題である。波形をモニタし、良さそうなデータのみを利用することはもちろんであるが、1回の測定データだけで伝達関数を同定するのは危険である。そこでハンマリング力と応答波形から、簡単な演算でインパルス応答を算出する。これを数回繰返して平均化し、同定データとする。これに離散方程式を適用し、固有振動数と減衰率を同定する。その後振動モードを同定する。また時系列解析の欠点である偽の根を取り除く手法として、応答評価指標を計算して比較し、有効な根のみを抽出する方法を提案する。

本手法の有効性を確かめるため、アナログ計算機上にシミュレートした5自由度モデル用い、モード同定を試みる。同定された固有振動数、減衰率、振動モードを理論値と比較し、測定ノイズの影響や平均化による精度向上を検討する。最後に宙すり平板を実際にハンマリングし、モード同定を行う。これも有限要素法で解析した結果と比較検討する。

* 昭和63年8月23日 第951回講演会において講演、原稿受付 昭和63年2月26日。

^{*1} 正員、茨城大学工学部(〒316 日立市中成沢町4-12-1)。

^{*2} 華北第三研究院(中国天津市(七)77信箱七室)。

^{*3} 准員、花王(株)生産技術研究所(〒321-34 芳賀郡市貝町赤羽2606)。

2. 同定アルゴリズム

2.1 特性根の同定 時刻 t ごとにサンプルされた系の入力を $u(i)$, 出力を $x(k)$ とすると, 離散系の入出力関係はインパルス応答 $g(k-i)$ を使って次のように表せる.

$$x(k) = \sum_{i=0}^k g(k-i)u(i) \quad (1)$$

ここで考えている図1のようなモード解析では, ハンマリング応答はたたき方によって入力波形が異なったり, ノイズに影響される. そこで式(1)より, インパルス応答を抽出する. ハンマリングの同期点を $x(1)$, $u(1)$ とし, $(2-L)$ より L 点までのデータで次のマトリックス式を作る.

$$\begin{Bmatrix} x(L) \\ \vdots \\ x(2) \\ x(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \cdots & u(L) \\ u(0) & u(1) & \cdots & u(L-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(2-L) & \cdots & u(0) & u(1) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} g(L-1) \\ \vdots \\ g(1) \\ g(0) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式(2)のマトリックス $[u]$ の各要素は, ハンマリング力で構成されるため, 対角要素のまわりの狭いバンド幅のみ値がある. マトリックスは $L \times L$ なので, 簡単に式(2)をガウス消去法で解き, インパルス応答 $g(i)$ が求められる. これを平均化して信頼性を高めることができる. l 回 ($l=1, 2, \dots, K$) の試験ごとに求まったインパルス応答を $g^{(l)}(i)$ とすれば, 平均したインパルス応答とその分散は, 次式で求められる.

$$g(i) = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^K g^{(l)}(i)$$

$$\xi_i^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{l=1}^K [g^{(l)}(i) - g(i)]^2 \quad (3)$$

さて, インパルス応答は減衰自由振動であり, 次の離散系の差分方程式に支配される. ここで, n は差分方程式の次数であり, $E(i)$ は誤差である.

$$g(i) = \sum_{k=1}^n a_k g(i-k) + E(i) \quad (4)$$

これを式(3)で求めたインパルス応答にあてはめ, 係数 a_k を求める. 式(4)の $g(i)$ を, $i=n+1$ から L まで ($L > n$) 縦に並べ, 次のマトリックス式が成立する.

$$\begin{Bmatrix} g(n+1) \\ g(n+2) \\ \vdots \\ g(L) \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E \\ E \\ \vdots \\ E \end{Bmatrix} \quad (5)$$

あるいは多点参照方程式で, ハンマリング点を変えた測定データを複数個使う場合には, ハンマリング点 1, 2, $\dots$, M のデータを縦に配置して,

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_M \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E \\ E \end{Bmatrix} \quad (6)$$

より, 誤差 $[E]$ を小さくする差分係数が求められる. ここで $\{g_i\}$, $[G_i]$ は, l 点加振で求められたインパルス応答マトリックスである. 式(3)で分散 ξ_i^2 が求まっているので, これを使った最小二乗解は次式で与えられる.

$$\{a\} = ([G]^T [W] [G])^{-1} [G]^T [W] \{g\} \quad (7)$$

ここで $[W]$ は重みマトリックスで, 最尤解を使う場

図1 解析システムの構成

合は

$$[W] = \left[\text{diag} \left(\frac{1}{\xi_1^2}, \frac{1}{\xi_2^2}, \dots, \frac{1}{\xi_n^2} \right) \right] \dots \dots \dots (8)$$

である。式(7)で求めた係数 a_i より、離散系の特性方程式

$$1 - \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

を解き、 z 平面の根が求まる。この内の安定で低次の $2N$ 根 (N は振動モード数) を

$$s\tau = \ln z, z = \exp s\tau \dots \dots \dots (10)$$

によって s 平面に変換し、 $s = \sigma_i + j\omega_i = \zeta_i \omega_{ni} + j\omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ より系の固有振動数 ω_{ni} と減衰率 ζ_i が求まる。

2.2 モード形の同定と偽の根の除去

次に振動モードを同定する。振動数 $\omega_i = \omega_{ni} \sqrt{1 - \zeta_i^2}$ と減衰比 $\sigma_i = \zeta_i \omega_{ni}$ ($i=1, \dots, N$) を使って、 l ($l=1, \dots, M$) 点の自由振動 $g_l(k)$ は次式で表せる。なお、 $k=1, 2, \dots, L$ はインパルス応答の長さで、任意に選べる。

$$g_l(k) = \sum_{i=1}^N (b_{li} e^{-\sigma_i k \tau} \sin \omega_i k \tau + d_{li} e^{-\sigma_i k \tau} \times \cos \omega_i k \tau) + E_l(k) \dots \dots \dots (11)$$

これをマトリックス形式にまとめて、次のように表

$$m_i = 0.25 [\text{kg}], k_i = 5 \times 10^4 [\text{N/m}], c_i = 5 [\text{Ns/m}]$$

図 2 5自由度集中質量モデル

図 3 同定されたモードと計算されたモードの比較
(同定条件: $\tau = 1.95 \text{ ms}$, $L = 90$, $n = 27$)

す。

$$[G^*] = [S][B] + [C][D] + [E] \dots \dots \dots (12)$$

ここで $[G^*]$ は $L \times M$ でインパルス応答, $[S]$ と $[C]$ は $L \times N$ で減衰正弦応答と減衰余弦応答, $[B]$ と $[D]$ は $N \times M$ で未知係数マトリックスであり、次のような要素で構成される。 L はインパルス応答の長さ, M は測定点数, N は含まれるモード数である。

$$G_{ki}^* = g_i(k), S_{ki} = e^{-\sigma_i k \tau} \sin \omega_i k \tau$$

$$C_{ki} = e^{-\sigma_i k \tau} \cos \omega_i k \tau, B_{li} = b_{li}, D_{li} = d_{li} \dots (13)$$

式(12)の $[G^*]$ マトリックス要素数を、未知係数 $[B]$, $[D]$ の要素数より多くとれば、誤差 $[E]$ を小さくする解を最小二乗法で解くことができる。重みを省略すると、

$$\begin{bmatrix} [B] \\ [D] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [S]^T [S] & [S]^T [C] \\ [C]^T [S] & [C]^T [C] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [S]^T [G^*] \\ [C]^T [G^*] \end{bmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

と求まる。これで求めた b_{li} と d_{li} より、モード振幅 A_{li} と位相 ϕ_{li} が計算できる。

$$A_{li} = \sqrt{b_{li}^2 + d_{li}^2}, \phi_{li} = \tan^{-1} [d_{li}/b_{li}] \dots \dots \dots (15)$$

この複素モードが描く空間ベクトルの、主軸への投影として実モードを近似することができる。

同定された根の中には、ノイズや計算誤差に基づく偽の根が混入する恐れがある。一方特性根 z_i とその振幅 A_{li} が求めれば、それに相当する応答の大きさとその収束速さから、モードの重要度がわかる。ここでは次のような指標によって、評価する。

$$RPF_i = \frac{\sqrt{\sum_{l=1}^N A_{li}^2}}{1 - |z_i|} \dots \dots \dots (16)$$

図 4 平均化によるノイズの影響の比較

図 5 点 18 加振の加速度波形の比較

いくつかの同定手法にこの指標を適用し、通常のノイズ状態では、真の根と偽の根では、この値が10倍以上離れ、自動的に選択できることがわかった。

3. 実験結果と考察

前述の実験モード解析手法の有効性を確かめるため、2種類の実験を行う。実際の構造では減衰率の理論値が求まらず、またノイズの影響もわからないので、まず5自由度のシミュレーションから実験する。

3.1 5自由度シミュレーション系 図2に示す5自由度系をアナログ計算機にシミュレートし、前節の手法を適用する。外力は発振器より擬似インパルス入力を加え、その応答を取り込む。ここでは m_2 に力を加え、変位応答 $x_1 \sim x_5$ を測定する。同定された固有振動数と減衰率(%)を図3の右に、モードを実線で示す。精度確認のため、シミュレーション設定値より求めた固有振動数と、減衰率(%)を同図左に、モードを点で示す。極めて良い一致を示している。

時間領域での同定は、そのままではノイズに弱い傾向がある。本手法は、インパルス応答の平均化を行っているので、同定精度の向上が期待できる。図2の変位測定に、標準偏差が応答振幅のおよそ50%のランダムノイズを加え、同定した結果を図4に比較する。左に平均しない場合、右に平均した場合を示す。平均化によって、特に減衰率の同定精度が向上している。モードは点線が一回測定を、実線が5回平均より同定した結果を示す。またノイズによって、偽の共振根を計算してしまう恐れがあるが、この点も改良されることがわかった。

3.2 宙吊り平板の実験 最後に構造物のハンマリング応答にこの手法を適用する。厚さ4.5 mm、大きさ300×360 mmの鋼板をゴムで宙吊りとし、図1に示された点30に加速度計を取付け、点1より順にハンマリングを繰返す。この加速度応答波形に前述の手法を適用す

る。計算条件は $\tau=0.78$ ms, $L=250$, $n=67$ であり、5回の平均で求めた応答波形と、同定された根と振幅より計算したインパルス応答波形の比較例を図5に示す。これは点18を加振したときの点30の加速度応答波形であり、細い実線が測定データ、太い点線が同定された応答である。この例では、極めて良い一致を示している。

同定された5次までの共振根(一回励振と5回平均)および有限要素法(NASTRAN)計算の比較を表1に示す。FEMでは減衰の値は求められないが、5個の弾性モードの共振周波数はよく一致している。共振周波数ではあまり差がないが、減衰率、応答評価指標(RPF)あるいは同定モード形では平均化の効果が現れている。また偽の根のRPF比較でも、平均化の効果は明らかである。

モード形の比較を図1(モード1)と図6(モード2から5)に示す。細い実線は変形前の形状で、太い実線が同定されたモード形、点線がFEMで求めたモード形である。加速度計を取付けた影響や、ハンマリングの誤差によって少し違いがあるが、比較的良好な精度のモード形を示している。この計算時間はHP 9816

表1 同定された特性根の比較

F.E.M. CALCULATION		ESTIMATED VALUES			
		AVERAGED	R.P.F.	SINGLE	R.P.F.
POLES	ω [r/s] 133.3	130.65	551.9	130.72	35.9
	ζ -	.019		.031	
	ω [r/s] 172.7	173.74	20.8	173.83	1.97
	ζ -	.063		.083	
	ω [r/s] 263.2	270.43	10.3	270.69	1.53
	ζ -	.015		.018	
	ω [r/s] 321.6	321.02	27.0	321.23	4.68
	ζ -	.021		.027	
PHANTOM POLES	ω [r/s] 363.6	367.55	.72	367.62	.66
	ζ -	.036		.023	
	ω [r/s] -	154.65	.09	152.15	.21
	ζ -	2.299		2.868	
	ω [r/s] -	228.74	.04	225.32	.11
	ζ -	2.495		15.41

図6 同定された鋼板の振動モード

BASIC で 25 分であり, 計算効果も悪くない。

4. 結 論

すべて時間領域で, ハンマリング応答から直接伝達関数を同定することは, ノイズに弱いといわれていた。そのため FFT で平均化した後, 逆変換してインパルス応答を得たり, 比較的長いランダム加振応答に AR モデルを適用することが使われた。本論文は時間領域のみでインパルス応答を平均化する手法を提案し, 少なくともランダムノイズに対しては同定精度が改良されることを示した。また平均化を導入することで, 時系列データの長さも短くて良いことがわかった。

時間領域での同定でもう一つの問題は, 計算過程で現れる偽の根の混入である。本論文では簡単な応答評価指標を導入し, 自動的にこれが除去されることを示した。提案した手法をシミュレーションモデルと, 実

際の平板のモード同定に応用し, 精度を向上できることを示した。

本研究の遂行に当たり, 茨城大学卒研究生高樋昌君の協力があつたことを付記し, 感謝申しあげる。

文 献

- (1) 赤池・中川, ダイナミックシステムの統計的解析と制御, (昭 47), 50, サイエンス社.
- (2) 鈴木・河野辺, 機論, 53-496, C (昭 62), 2445.
- (3) 日野, スペクトル解析, (昭 52), 83, 朝倉書店.
- (4) 大久保, 機械のモーダルアナリシス, (昭 56), 34, 中央大学出版会.
- (5) 長松, モード解析, (昭 60), 99, 培風館.
- (6) Ibrahim, S. R. and Mikulcik, E. C., *The Shock and Vibration Bulletin*, 47-4 (1977), 183.
- (7) Vold, H., ほか 1 名, *ASME paper*, 85-DET-90, (1985).
- (8) Wang, Z. and Frang, T., *J. Appl Mech.* 35 (1986), 28.
- (9) Pandit, S. M., *ASME Journal of Dynamic System, Measurment and Control*, 107, (1985), 132-138.