空間に固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答*

本田 善久^{*1}, 松久 寛^{*1}, 佐藤 進^{*1}

The Steady State Response of a Rotating Disk to a Concentrated Harmonic Force at a Space-fixed Point

Yoshihisa HONDA, Hiroshi MATSUHISA, and Susumu SATO

The steady-state response of a rotating disk to a concentrated harmonic force at a space-fixed point is analyzed. The eigenfunctions are proved to be orthonormal, and formulation of the response is derived as an eigenfunction series. It is proposed that the eigenfunctions are given in the form of rotating waves, and the resonant frequencies and vibratory modes are discussed. Resonance occurs when the exciting frequency coincides with one of the natural frequencies observed in the space-fixed coordinates. If two of the natural frequencies coincides with each other, the resonant mode that may be called "a quasi-standing wave" is formed in the space-fixed coordinates.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Rotating Disk, Steady-State Response, Resonance, Mode of Vibration

1. ま え が き

回転円板は、歯車、鉄道車輪、タービン翼車、丸のこ、磁気ディスクなどにみられるように機械の基本的な要素の一つであるが、しばしば空間に固定した位置で面外方向の外力を受けて屈曲振動を起こす。その結果、機械の運転に悪影響が生ずることがある。

回転円板の屈曲振動の理論解析における主要な問題点としては、外力の作用点が円板に対して相対的に回転していること、遠心力が円板の弾性的特性に影響を与えることの二つが挙げられよう。両者を総合して解析したものとしては、Iwan ら⁽¹⁾、Hutton ら⁽²⁾の研究があるが、いずれもガラーキン法を用いているために得られた式から一般的な特性を考察することが困難であり、回転円板の振動応答特性が十分に解明されているとは言い難い。

著者らは、前者の問題についてその応答特性をすでに明らかにしたが⁽³⁾、後者を考慮にいれていないために議論が低速の場合に限定されていた。そこで、本論文では後者の問題も含め高速領域に拡張して解析す

る。すなわち、空間に固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答を遠心力の影響を考慮にいれて定式化し、その特性を考察する。定式化にあたっては、考察が容易なように固有関数展開法を用いる。考察では、とくに共振時の振動モードに重点をおく。

2. 基 礎 式

一様な厚さの等方性の弾性円板が一定の角速度で回転する軸に取付けられているときの、屈曲振動について考える。遠心力の影響は考慮するが、板が薄いものとしてせん断変形と回転慣性の影響は無視する。また、減衰は線形の粘性減衰を仮定する。円板の密度を ρ 、ヤング率を E 、ポアソン比を ν 、板厚を h 、外半径を a 、内半径を b とする。本論文では、式展開を平易にするために、長さ、力、時間についてそれぞれ a 、 D/a 、 $a^2\sqrt{\rho h/D}$ を基準にとって諸量を無次元化する。ここで、 D は板の曲げ剛性で、 $Eh^3/12(1-\nu^2)$ で与えられる。時刻を τ 、円板の中心を原点とし円板に固定した極座標を (r, θ) とすると、回転円板の運動方程式はつぎのように表される。

$$L[w] + \Gamma \left[\frac{\partial w}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = f \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 w は横方向変位、 f は横方向分布外力、 Γ は

* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年11月30日。

*¹ 正員、京都大学工学部 (〒606 京都市左京区吉田本町)。

粘性減衰を表す線形微分演算子であり、

$$L[w] = \nabla^4 w - H[w] \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$H[w] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + N_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(4)の N_r, N_θ は遠心力によって生ずる半径方向、接線方向の面内力であり、次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{\Omega^2}{8} \left[c_1 + \frac{c_2}{r^2} - (3+\nu)r^2 \right] \\ N_\theta &= \frac{\Omega^2}{8} \left[c_1 - \frac{c_2}{r^2} - (1+3\nu)r^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 Ω は回転角速度、 c_1, c_2 は境界条件によって定まる定数である。円板の内周で面内変位が零、外周で N_r が零であるとする、 c_1, c_2 はそれぞれ次式で与えられる⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (1+\nu) \frac{(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4}{(1+\nu) + (1-\nu)\beta^2} \\ c_2 &= (1-\nu) \frac{(3+\nu) - (1+\nu)\beta^2}{(1+\nu) + (1-\nu)\beta^2} \beta^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\beta = b/a$ である。

一方、 w に関する境界条件は、内周で固定、外周で自由とすると、次式で与えられる。

$$w|_{r=\beta} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=\beta} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$B_M[w]|_{r=1} = 0, \quad B_V[w]|_{r=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} B_M[w] &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ B_V[w] &= \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) + (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

3. 回転円板の固有振動

3・1 固有振動数と固有関数 外力、減衰が作用せず、回転円板が固有モードで振動している場合を考える。横方向変位を

$$w = W(r, \theta) e^{-i\omega t} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とおくと、 W に関する微分方程式は式(1)より

$$L[W] = \omega^2 W \quad \dots\dots\dots (11)$$

と表される。また、 W の境界条件は式(7)、(8)より

$$W|_{r=\beta} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=\beta} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$B_M[W]|_{r=1} = 0, \quad B_V[W]|_{r=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

と表される。したがって、回転円板の固有振動の問題は式(11)～(13)で表される固有値問題で与えられる。この解を解析的に求めるのは困難であるが、数値的にはつぎのようにして求めることができる⁽⁵⁾。

まず、 W をつぎのようにおく。

$$W = R(r) e^{im\theta} \quad \dots\dots\dots (14)$$

これを式(11)に代入して整理すると、 R に関する4階常微分方程式が得られる。ここで、

$$R_0 = R, \quad R_j = \frac{d^j R}{dr^j} \quad (j=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (15)$$

とおくと、その4階常微分方程式は R_j に関する四元連立1階常微分方程式に変形される。その任意の初期条件に対する解ベクトル $\mathbf{R} = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}^T$ は、例えばアダムス法などを用いて、数値的に求めることができるが、本論文の場合は内周固定であるから、初期条件：

$$R_{p:j}|_{r=\beta} = \delta_{pj} \quad (p, j=0, 1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (16)$$

に対する4個の解ベクトル $\mathbf{R}_p = \{R_{p:0}, R_{p:1}, R_{p:2}, R_{p:3}\}^T$ を用いるのが適している。ここで δ はクロネッカーのデルタである。一般解はこの4個のベクトル $\mathbf{R}_p$ の一次結合で表すことができるが、式(12)、(16)を考慮すると、

$$\mathbf{R} = s_2 \mathbf{R}_2 + s_3 \mathbf{R}_3 \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。さらに、式(13)からつぎの終値条件式を得る。

$$C_m \mathbf{R}_e \begin{Bmatrix} s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、

$$\begin{aligned} C_m &= \begin{bmatrix} -\nu m^2 & \nu & 1 & 0 \\ (3-\nu)m^2 & -1-(2-\nu)m^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_e &= [\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3]|_{r=1} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

係数 s_2, s_3 に関する方程式(18)が自明でない解を持つための条件より、固有値 ω^2 を決定する方程式が次式のように定まる。

$$\text{Det}(C_m \mathbf{R}_e) = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

この ω^2 に関する超越方程式は、2分法などの反復的手法で数値的に解くことができる。

また、固有振動の振動形を与える固有関数は

$$W_{mn}(r, \theta) = R_{mn}(r) e^{im\theta} \quad \dots\dots\dots (21)$$

と表される。ここで

$$R_{mn} = s_2 R_{2:0} + s_3 R_{3:0} \quad \dots\dots\dots (22)$$

である。 s_2, s_3 は、対応する固有値 ω_{mn}^2 に対して式(18)によってその比が定められるが、その大きさは任意であるから、つぎの正規化の条件を付加してその大きさを定めることにする。

$$\int_S |W_{mn}|^2 dS = 1 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、積分は円板全体にわたる面積分である。

上述の式展開から明らかなように、半径の関数 R_{mn} は実数値関数であり、かつつぎの関係式が成り立つ。

$$R_{mn} = R_{-mn}, \omega_{mn}^2 = \omega_{-mn}^2 \dots\dots\dots (24)$$

固有値 ω_{mn}^2 , 固有関数 W_{mn} の添字のうち, m はその絶対値が θ 方向に回転する波動の波数を表し, その符号が波動の回転方向を表す。つまり, $\Omega > 0$ とすると, $m > 0$ ならば円板の回転方向と同じ向きに回転する波動(前進波), $m < 0$ ならば逆向きに回転する波動(後退波)を意味する。また, 添字 n は変位の半径方向の関数 R_{mn} の零点の個数(節円数)を表す。

なお, 波数 m (符号付), 節円数 n の回転波形の固有モードを, 以下では (m, n) と表すことにする。

3・2 固有関数の直交性 ここでは, 固有関数が互いに直交していることを示す。まず, 円板内における内積を次式で定義する。

$$\langle W_i, W_j \rangle = \int_S W_i \bar{W}_j dS \dots\dots\dots (25)$$

ここで, バーは複素共役を表す。

微積分に関する種々の計算公式を用いると,

$$\begin{aligned} \langle W_i, \nabla^4 W_j \rangle &= \langle \nabla^4 W_i, W_j \rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[W_i B_r [\bar{W}_j] - \bar{W}_j B_r [W_i] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial W_i}{\partial r} B_r [\bar{W}_j] + \frac{\partial \bar{W}_j}{\partial r} B_r [W_i] \right] r d\theta \dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle W_i, H[W_j] \rangle &= \langle H[W_i], W_j \rangle \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[W_i \frac{\partial \bar{W}_j}{\partial r} - \bar{W}_j \frac{\partial W_i}{\partial r} \right] r N_r d\theta \dots\dots (27) \end{aligned}$$

を得る。ここで, W_i, W_j が境界条件式(12), (13)を満たすものとする, 式(26)の右辺は零となる。さらに, 面内力の境界条件を考慮すると, 式(27)の右辺も零となる。したがって, そのとき,

$$\langle W_i, L[W_j] \rangle = \langle L[W_i], W_j \rangle \dots\dots\dots (28)$$

よって, 固有値問題(11)~(13)は自己共役である。

このことから, 二つの異なる固有関数 W_{mn}, W_{pq} の直交関係が導かれる。

$$\langle W_{mn}, W_{pq} \rangle = 0 \quad (m \neq p \text{ or } n \neq q) \dots\dots\dots (29)$$

この式と, 正規化の条件式(23)をまとめて表すと,

$$\langle W_{mn}, W_{pq} \rangle = \delta_{mp} \delta_{nq} \dots\dots\dots (30)$$

となる。

4. 空間に固定した外力に対する定常応答

振幅 F , 角振動数 ω の横方向集中調和外力が, 空間に固定した点において回転円板に作用しているものとする, 運動方程式はつぎのように表される。

$$L[w] + \Gamma \left[\frac{\partial w}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = F \Delta e^{-i\omega\tau} \dots\dots\dots (31)$$

ここで,

$$\Delta = \delta(r - r_0) \delta(\theta - \phi_0 + \Omega\tau) / r \dots\dots\dots (32)$$

であり, δ はディラックのデルタ関数である。なお, 外

力が作用する点は, $\tau = 0$ のときに (r_0, ϕ_0) であるとしている。

境界条件式(7), (8)を満たす方程式(31)の定常解を固有関数展開によって求める。すなわち, 解を

$$w = \sum_{mn} W_{mn}(r, \theta) T_{mn}(\tau) \dots\dots\dots (33)$$

とおく。ここで, $\sum_{mn}$ は m, n に関する二重級数を表し, m についてはすべての整数, n についてはすべての非負の整数をとるものとする。これを式(31)に代入し, 両辺と W_{mn} の一つとの内積をとると, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{T}_{mn} + \sum_{pq} \gamma_{mn}^{pq} \dot{T}_{pq} + \omega_{mn}^2 T_{mn} \\ = F R_{mn}(r_0) e^{-im\phi_0} e^{-i(\omega - m\Omega)\tau} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

ここで, ドットは τ による微分を表す。また,

$$\gamma_{mn}^{pq} = \langle \Gamma[W_{pq}], W_{mn} \rangle \dots\dots\dots (35)$$

であるが, Γ が比例減衰形であると仮定すると,

$$\gamma_{mn}^{pq} = \gamma_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} = 2\zeta_{mn} \omega_{mn} \delta_{mp} \delta_{nq} \dots\dots\dots (36)$$

と表せる。あるいは, 減衰が小さい場合には式(36)が近似的に成立する⁽⁶⁾。以下では, 式(36)が成立するものと仮定する。このとき, 式(34)は独立な常微分方程式となり, その定常解は容易に得られて,

$$T_{mn}(\tau) = F A_{mn}(r_0, \phi_0) e^{-i(\omega - m\Omega)\tau} \dots\dots\dots (37)$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} A_{mn}(r_0, \phi_0) \\ = \frac{R_{mn}(r_0) e^{-im\phi_0}}{\omega_{mn}^2 - (\omega - m\Omega)^2 - 2i\zeta_{mn} \omega_{mn} (\omega - m\Omega)} \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

よって, 回転円板の定常応答はつぎのように表される。

$$w = F \sum_{mn} A_{mn}(r_0, \phi_0) W_{mn}(r, \theta) e^{-i(\omega - m\Omega)\tau} \dots\dots\dots (39)$$

さて, 角度座標 ϕ を

$$\phi = \theta + \Omega\tau \dots\dots\dots (40)$$

で定義すると, 円板に固定した座標系 (r, θ) に対して, 極座標 (r, ϕ) は空間に固定した座標系を表す。空間固定の座標系を用いると, 外力の作用する点は座標が (r_0, ϕ_0) で与えられる定点である。その外力に対する空間固定の点 (r, ϕ) における円板の定常応答を w_s と表すと, つぎのようになる。

$$w_s = F e^{-i\omega\tau} \sum_{mn} A_{mn}(r_0, \phi_0) R_{mn}(r) e^{im\phi} \dots\dots (41)$$

5. 考 察

回転円板の横振動に関する固有関数の θ の因子として, 従来の解析においては平方数 $m^2 (m > 0)$ に対して $\cos m\theta$ と $\sin m\theta$ の組を採用するのが一般的であ

ったが、本報では $e^{im\theta}$ と $e^{-im\theta}$ の組を採用した。いずれの組も、微分方程式 $d^2\theta/d\theta^2 + m^2\theta = 0$ の基本解系であるから数学的には同等であるが、物理的な意味は異なる。すなわち、前者の組は円板上に形成される m 本の節直径を有する定在波を表すが、後者の組は時間項 $e^{-i\omega_{mn}\tau}$ と結合して円板上を回転する波数 $\pm m$ の波動を表す。連続体の固有振動において、境界での反射が存在する場合は定在波形の固有関数しか存在しないと考えられるが、円板のような軸対称な連続体の場合、つまり、 θ に関しては境界での反射がなく 2π の周期性を満たせばよい場合には回転波形の固有関数の存在も許容し得る。そして、上述の解析や以下の考察から明らかなように、軸対称な連続体に対して加振点や観測点が相対的に回転している場合には、回転波形の固有関数を用いるほうが適している。

まず、回転波形の固有関数で表される自由振動について考察する(減衰は無視する)。回転円板が固有モード (m, n) で自由振動しているとすると、その変位はつぎのように表せる。

$$w = AR_{mn}(r)e^{im\theta}e^{-i\omega_{mn}\tau} \dots\dots\dots (42)$$

これを空間固定の座標系に変換すると、式(40)より

$$w_s = AR_{mn}(r)e^{im\theta}e^{-i(\omega_{mn}+m\Omega)\tau} \dots\dots\dots (43)$$

となる。したがって、空間に固定された点で観測される見掛けの固有振動数は、

$$\omega = \omega_{mn} + m\Omega \dots\dots\dots (44)$$

で与えられる。つまり、回転円板上の振動数 ω_{mn} の自由振動は、空間固定の観測点からみれば、その振動数が回転の角速度 Ω に波数 m を乗じた分だけずれる。この振動数がずれる現象は、ドップラー効果の一種であり、位相角速度が ω_{mn}/m で回転する波動について観測点が媒体(円板)に対して相対的に角速度 $-\Omega$ で回転していることによるものと説明できる。

図1に空間固定点での見掛けの固有振動数と回転角速度の関係の一例を示す。図1の破線は遠心力の影響を無視した場合のものであり、 ω_{mn} が Ω に依存しないので傾き m の直線になっている。それに対して、遠心力の影響を考慮した場合の実線では Ω の増加とともにその直線から次第に高いほうへずれていく。このことは固有振動数に対する遠心力の影響を示すものであるが、これに関してはすでに多くの研究がなされているので、ここでは詳述しない。

つぎに、空間に固定した外力に対する定常応答について考察する。3・2節において回転円板の固有関数が互いに直交することを示せたので、その定常応答を回転波形の固有関数の級数として極めて明快に定式化することができた。それらの式は、

(1) 空間固定でみた応答の振動数は外力の振動数に一致すること

(2) 固有モード (m, n) が共振するときの外力の振動数は空間固定の座標系での見掛けの固有振動数、式(44)に一致すること

をめいりように示しているが、ここではこれらのことについて物理的な説明を与えよう。媒質(円板)に固定した座標系において、回転波の位相角速度を Ω_p 、加振点、観測点の相対角速度をそれぞれ Ω_s, Ω_o 、加振振動数、観測振動数をそれぞれ ω, ω_o とすると、ドップラー効果の式から、つぎの関係式が成り立つ。

$$\omega_o = \frac{\Omega_p - \Omega_o}{\Omega_p - \Omega_s} \omega \dots\dots\dots (45)$$

したがって、空間固定の観測点では $\Omega_o = \Omega_s$ であるから $\omega_o = \omega$ となり、(1)が説明される。また、固有モード (m, n) が共振する条件は、円板固定の観測点($\Omega_o = 0$)での観測振動数 ω_o が ω_{mn} に一致することである。そのとき、回転波の位相角速度 Ω_p は ω_{mn}/m に等しく、また、加振点の相対角速度 Ω_s は $-\Omega$ であるから、これらを式(45)に代入すると、式(44)が得られる。

図2に種々の回転角速度における共振曲線を三次元的に示す。モード減衰率 ζ_{mn} は簡単のためにモードにかかわらず一定としてある。図2の縦軸の W_{rms} は変位応答の空間に関する rms 値であり、式(41)より次式で与えられる。

$$W_{rms} = F \sqrt{\frac{\sum_{mn} |A_{mn}|^2}{\pi(1-\beta^2)}} \dots\dots\dots (46)$$

各曲線には共振によるピークがめいりように現れている

図1 回転円板の空間固定点での見掛けの固有振動数と回転角速度の関係 ($\beta=0.2, \nu=0.3$)

るが、その振動数は回転角速度とともに図1の見掛けの固有振動数のグラフと対応して変化する。一方、ピークの高さは $\zeta_{mn}\omega_{mn}^2$ に反比例し、 $R_{mn}(r_0)$ に比例するのでモードによって異なるが、図2では ζ_{mn} を一定としているので ω_{mn} が大きいモードほどその共振時のピークは低くなっている。

最後に、空間固定の外力に対する応答の共振点付近での振動モードについて考察する。外力が円板の同一半径上を相対的に回転しているの、とくに円周方向の振動分布に注目する。

加振振動数の付近に見掛けの固有振動数が一つだけ存在する場合には、その固有モードを (m, n) とすると、式(41)より応答変位は近似的に次式で表される。

$$w_s \approx Z(r) e^{im(\phi - \phi_0)} e^{-i\omega\tau} \quad (47)$$

ここで、

$$Z(r) = \frac{FR_{mn}(r_0)R_{mn}(r)}{\omega_{mn}^2 - (\omega - m\Omega)^2 - 2i\zeta_{mn}\omega_{mn}(\omega - m\Omega)} \quad (48)$$

である。したがって、そのときの振動モードは、空間に対して位相角速度 ω/m で回転する波動が優勢になる。このことより、調和外力 ($\omega > 0$) に単独の固有モードが共振しているときの振幅分布は、半径が同じであれば角度 ϕ とは無関係にほぼ一定となる。ところが、見掛けの固有振動数が零になって静的な荷重と共振するときは、その波動は空間に対して静止する。

一方、加振振動数の付近に見掛けの固有振動数が二つ存在する場合もある。つまり、二つの固有モードの見掛けの振動数が一致または接近する場合であり、図1ではグラフの交点近傍に対応し、図2では二つのピ

図2 種々の回転角速度に対する空間固定の集中外力を受ける回転円板の共振曲線
($r_0=0.8$, $\beta=0.2$, $\nu=0.3$, $\zeta_{mn}=0.005$)

ークの重なりに対応する。このときそれらの固有モードを (m_1, n_1) , (m_2, n_2) とすると、式(41)より応答変位は近似的に次式で表される。

$$w_s \approx [Z_1(r) e^{im_1(\phi - \phi_0)} + Z_2(r) e^{im_2(\phi - \phi_0)}] e^{-i\omega\tau} \quad (49)$$

ここで、 Z_j ($j=1, 2$) は式(48)の右辺の m, n をそれぞれ m_j, n_j に置き換えたものである。複素数 Z_j の偏角を α_j と表すと、振幅分布は次式で与えられる。

$$|w_s|^2 \approx |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2| \cos[(m_1 - m_2)(\phi - \phi_0) + (\alpha_1 - \alpha_2)] \quad (50)$$

したがって、この場合には空間固定の座標系でみた円周方向の振幅分布は、式(50)の右辺第3項の余弦の値が $+1, -1$ になる点でそれぞれ極大、極小となり、極

(a) $|Z_1|=|Z_2|=0.8$

(b) $|Z_1|=1.0, |Z_2|=0.6$

(c) $|Z_1|=0.6, |Z_2|=1.0$

図3 準定在波の例: $m_1=1, m_2=-2, \alpha_1=\alpha_2$,
---包絡線, — $\omega\tau - \alpha_1 = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$

$$m_1 = 0, m_2 = 1, \omega = 5.193, \Omega = 0.362$$

$$m_1 = -1, m_2 = -2, \omega = 3.438, \Omega = 1.775$$

$$m_1 = 0, m_2 = -2, \omega = 5.219, \Omega = 0.652$$

$$m_1 = -1, m_2 = -3, \omega = 2.553, \Omega = 4.165$$

$$m_1 = 1, m_2 = -2, \omega = 5.402, \Omega = 0.549$$

$$m_1 = 0, m_2 = -3, \omega = 5.760, \Omega = 2.625$$

$$m_1 = 1, m_2 = -3, \omega = 7.277, \Omega = 1.975$$

$$m_1 = 0, m_2 = -4, \omega = 6.679, \Omega = 4.414$$

$$m_1 = 2, m_2 = -3, \omega = 9.164, \Omega = 1.227$$

$$m_1 = 1, m_2 = -4, \omega = 9.624, \Omega = 3.443$$

$$m_1 = 2, m_2 = -4, \omega = 12.572, \Omega = 2.533$$

$$m_1 = 1, m_2 = -5, \omega = 12.090, \Omega = 4.831$$

図 4 二つの固有モード $(m_1, 0), (m_2, 0)$ が空間固定の集中調和外力に共振しているときの回転円板の振動モードの等高線図, (A) w_s の絶対値, (R) w_s の実部, (I) w_s の虚部, $\times$ 加振点, 等高線間隔 w_s/F : 0.1, 一零, 一正, 一負. ($r_0=0.8, \beta=0.2, \nu=0.3, \zeta_{mn}=0.005$)

図5 回転数の変化に対する準定在波の位相角の変化： w_s の絶対値の等高線，×加振点，等高線間隔 w_s/F ：0.1. ($\omega=5.402$, $r_0=0.8$, $\beta=0.2$, $\nu=0.3$, $\zeta_{mn}=0.005$)

大値および極小値の個数は等しく $|m_1 - m_2|$ である。とくに、 $|Z_1| = |Z_2|$ の場合には極小値が零となり、節が形成される。このように、式(50)の右辺で表される波動の重ね合わせは定在波と類似しており、広義の定在波、あるいは準定在波と呼ぶべきものである。実際、二つの波数の関係が $m_2 = -m_1$ であれば、式(50)の右辺は定在波そのものを表す。

図3に準定在波の例として、 $m_1=1$, $m_2=-2$, $\alpha_1=\alpha_2$ の場合について、円周方向の変位分布とその包絡線を示す。波数の差が3であるから、振幅分布の極大、極小となる点がそれぞれ3個ずつ、 $2\pi/3$ の間隔で存在する。図3(a)は二つの波の振幅が等しい場合で、定在波と同様に振幅分布の極小値は零となり節が形成されているが、位置によって位相が異なる点が定在波の場合と異なる。図3(b), (c)は二つの波の振幅が異なる場合で、図3(b)と図3(c)では振幅の組合せが入れ替わっている。二つの波の振幅の組合せが入れ替わっても振幅分布は同じであるが、各時刻での変位分布は異なる。

図4に回転円板の二つの固有モードが空間固定の集中調和外力に共振しているときの振動モードの例を示す。各図の(A)は変位の振幅分布を示し、(R), (I)は $\omega\tau=0, \pi/2$ の瞬間における変位の分布をそれぞれ示している。上で考察したように、振幅が極大(極小)となる半径の数が二つの固有モードの波数の差に一致していることが、各図の(A)から明らかである。波数の差が同じ組については、振幅分布は同じパターンを示しているが、重ね合わされるモードが違うので瞬間の変位の分布は全く異なる。また、二つのモード応答の大きさの差が小さいほど振幅分布の山と谷が鮮明に現れるが、逆に差が大きいと応答の大きいほうのモードが優勢となり、山と谷が不鮮明になって等高線が同心

円状になる。

ところで、 Z_j の偏角 α_j は加振点を通る半径におけるモード応答の位相遅れを意味しており、共振周波数で $\pi/2$ となり、軽減衰ならばその前後で零から π に急激に変化するものである。したがって、準定在波の位相角 $\alpha_1 - \alpha_2$ は、加振振動数および回転数がわずかに変化しても大きく変化する。図5に回転数の変化に対する準定在波の位相角の変化の例を示す。図4では二つのモードがともに共振しているので、 $\alpha_1 = \alpha_2$ となり、振幅分布は加振点を通る半径に関してほぼ対称となっているが、わずかにその回転数がずれても準定在波の位相角は大きく変化することが図5からわかる。

6. あとがき

回転円板の固有関数の直交性を示し、空間に固定された点で集中調和外力を受ける回転円板の定常応答を回転波形の固有関数の級数として定式化して、回転円板の振動応答特性を明らかにした。回転波形の固有関数の有用性を示すとともに、とくに準定在波と呼ぶべき特異な振動モードが存在することを示した。

本研究は文部省昭和61年度科学研究費補助金奨励研究(A)の補助を受けて行った。また、数値計算および作図にあたっては京都大学大型計算機センター(FACOM M 780)を利用した。

文 献

- (1) Iwan, W. D. ほか1名, *J. Appl. Mech.*, **43** (1976), 485.
- (2) Hutton, S. G., ほか2名, *J. Sound Vib.*, **112-3** (1987), 527.
- (3) Honda, Y., ほか2名, *J. Sound Vib.*, **102-4** (1985), 457.
- (4) Eversman, W., ほか1名, *AIAA J.*, **7-10** (1969), 2010.
- (5) Barasch, S., ほか1名, *J. Appl. Mech.*, **39** (1972), 1143.
- (6) Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, (1967), 429, Macmillan.

討 論

〔質問〕 長 南 征 二〔東北大学工学部〕

(1) 数値計算では m, n に対して何項まで考慮されたのか。またその場合の解の収束性はどうか。

(2) 回転円板に対して式(31), (32)で表される外力の具体例があったらご教示願いたい。

(3) Γ が比例減衰形でない場合、貴解析法はそのまま適用されるのか。

〔回答〕 (1) 数値計算では、 (m, n) と $(-m, n)$ を合せて1項として数えて、71項までとった。これらは、静止($\Omega=0$)時に $\omega_{mn} < 500$ となる固有モードのすべてである。収束性は、例えば図1の W_{rms} の値について71項までのものを基準として、図1の範囲で相対誤差が10項までで 10^{-3} 以内、20項までで 10^{-4} 以内、40項までで 10^{-5} 以内、60項までで 10^{-6} 以内であり、十分であると考えられる。

(2) 本論文は空間固定点で外力を受ける回転円板の振動応答の一般的な特性を説明することを目的としたものであり、系が線形であることから重ね合わせの原理が成り立つので、外力のモデルとして最も単純な1点に集中する単一の周波数成分の外力をとりあげた。式(31), (32)で表されるような具体例は厳密には存在しにくいと思われるが、例えば磁気ヘッドの振動による磁気ディスクの励振、歯車のかみあい位置におけるかみあい周波数による軸方向の励振などは、近似的に式(31), (32)で表されるものとする。

(3) 比例減衰でない場合は、式(34)が非連成とならないため、 T_{mn} は式(37)のように単純な形では求められず、 m, n を有限項で打ち切って連立方程式を解くことになると考えられる。

〔質問〕 末 岡 淳 男〔九州大学工学部〕

式(49)から、 Z_1, Z_2 は r の関数であるが、図3において、 $(m_1, n_1)=(1, n_1)$, $(m_2, n_2)=(-2, n_2)$ に対して、 $|Z_1|, |Z_2|$ を一定値に設定できること、また、 $\alpha_1=\alpha_2$ とおけることをご教示願いたい。

$|Z_1(r)|=|Z_2(r)|$ となるのは、 $|m_1|=|m_2|$, $n_1=n_2$ のときに限られるのではないか。

また、図3の ω, Ω はいくらに定められているのか。

〔回答〕 振動モードに関する考察は、本文中で述べているように、円周方向の振動分布に注目している。そこで、ある半径の同心円上における円周方向の振幅分布、変位分布の例を単純化して図3に示した。したがって、図3における Z_1, Z_2 はある特定の r における関数値である。この関数値は、 F, ω, Ω, r_0 および r のうちのいくつかを適当に選ぶことにより、任意の固有モードの組 $(m_1, n_1), (m_2, n_2)$ に対して、任意に設定することができる。

また、一定値の ωr に対して式(49)では上記の Z の外には ω, Ω が表れていない。式(50)でも Z の外には ω, Ω が表れていない。したがって、そのグラフを表した図3は、 ω, Ω の値を特定するものではない。