静的曲げ問題のグリーン関数を用いた直交 異方性板の振動解析*

(第1報, 自由振動問題, 強制振動問題への適用)

坂田 敏行*¹, 細川 健治*²

A Numerical Approach to Vibrations of Orthotropic Plates Using Gureen's Function for a Static Bending Problem (1st Report, Application to Free and Forced Vibrations)

Toshiyuki SAKATA and Kenji HOSOKAWA

An approach is proposed for the numerical estimation of free, forced and transient vibrations of an orthotropic plate using Green's function for a static bending problem. Its merits are as follows 1) free, forced and transient vibrations can be solved using similar programs, 2) the algorithm for computation is very simple, 3) one can readily estimate a complicated system such as a plate with an attached spring-mass system... using Green's function for a simple system, and 4) the numerical process can be separated into two steps. One is to estimate Green's function and the other is to solve a set of simultaneous equations or an eigenvalue equation. In the present report, this numerical approach is applied to free and forced vibrations of a simply supported orthotropic rectangular plate and its accuracy is discussed. Furthermore, a free vibration of an orthotropic rectangular plate with an attached mass in the center is discussed numerically. In the second report, the transient vibration of an orthotropic plate will be discussed.

Key Words: Theory of Vibration, Green's Function, Vibration of Plate, Vibration of Orthotropic Plate, Vibration of Rectangular Plate

1. 緒 言

板は機械要素として重要であり, その力学的挙動は静的問題から動的問題まで広範に研究されている。等方性板の曲げ問題に限定しても, その支配微分方程式を境界条件のもとで解析的に解くことは特定の場合を除き極めて困難である。そのため, 差分法のような微分方程式の直接的な近似解法, 有限要素法のような変分原理による問題の近似解法, あるいは境界要素法のような積分方程式による近似解法など各種の数値解析法が研究されている。積分方程式を用いる解法には基本解を用いる方法, およびグリーン関数を用いる方法がある。例えば自由振動問題の場合には自由振動の基本解あるいは自由振動のグリーン関数を用いられている。前者は境界での積分を精度良く行えば高次振動まで高精度な解が求められる⁽¹⁾が, 固有振動数の計算に注意と労力が必要である。このため, 静的問題の基本解を用いる方法⁽²⁾⁽³⁾が提案されている。この方法では固有値の計算は簡単になるが, 板の境界のみならず内部領域でも数値積分を行うことが必要となる。後者は

レセプタンス法とも呼ばれ, はりで補強された板⁽⁴⁾, ばねおよび質量の付加された板⁽⁵⁾などの複合系の自由振動を解析する有力な解法である。この方法はそのまま直交異方性板にも適用可能である⁽⁶⁾が, 自由振動問題のグリーン関数を計算することが問題となる場合も多い。

本研究では計算の比較的簡単な板の静的曲げ問題のグリーン関数を用いて振動問題の微分方程式を積分方程式に変換し解析することを試みる (はりの自由振動の解析ではこの方法は多質点系置換法⁽⁷⁾あるいは集中質量法⁽⁸⁾と呼ばれている)。第1報では, 振動問題の基礎式から離散化運動方程式を誘導するとともに自由振動問題および強制振動問題の解法を提案する。次に, この方法を厳密解の容易に得られる四辺支持された直交異方性長方形板に適用し, その精度を明らかにする。さらに, 複合振動系への応用例として中心に付加質量を有する直交異方性長方形板の自由振動を解析する。第2報では離散化運動方程式にウィルソンの θ 法を適用し過渡振動問題を解析することを試みる。

2. 理 論

2.1 離散化運動方程式の誘導 板の中立面上に x - y 平面をとり, 板材の弾性主軸方向に x, y 軸を一

* 昭和63年7月15日 東海支部浜松地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年2月1日。

*¹ 正員, 中部大学工学部 (〒487 春日井市松本町1200)。

*² 正員, 中部大学大学院。

致させる。板材の内部減衰を無視すれば、板の曲げ振動の微分方程式は次のように表される。

$$L(w) + c\dot{w} + \rho h\ddot{w} = p \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $c(x, y)$ は外部粘性減衰係数、 $h(x, y)$ は厚さ、 $L(\)$ は微分演算子、 $p(x, y, t)$ は外力、 t は時間、 $w(x, y, t)$ はたわみ、 $\dot{w} = \partial w / \partial t$ 、 $\ddot{w} = \partial^2 w / \partial t^2$ および $\rho(x, y)$ は密度である。静的曲げ問題のグリーン関数 $G(x, y, \xi, \eta)$ は板の境界条件および微分方程式

$$L(G) = \delta(x - \xi) \cdot \delta(y - \eta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

を満足する。ただし、 $\delta(\)$ は Dirac のデルタ関数を示す。グリーン関数 $G(x, y, \xi, \eta)$ を用いれば、式(1)の解 $w(x, y, t)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \bar{w}(x, y, t) \\ &- \iint \dot{w}(\xi, \eta, t) \phi_c(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \\ &- \iint \ddot{w}(\xi, \eta, t) \phi_\rho(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ただし、積分は板の領域内で行う。また、

$$\phi_c(x, y, \xi, \eta) = c(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \phi_\rho(x, y, \xi, \eta) \\ = \rho(\xi, \eta) h(\xi, \eta) G(x, y, \xi, \eta) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\bar{w}(x, y, t) = \iint p(\xi, \eta, t) G(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \quad \dots\dots\dots (6)$$

式(3)を一般的に解くのは困難であり、近似積分を行う。図1に示すように板を分割し、 j 番めの微小領域(斜線部)の面積を ΔS_j 、この領域内の代表点の座標を (x_j, y_j) とする。この領域内で式(3)の被積分関数が一定であると仮定すれば、式(3)は次のように表される。

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \bar{w}(x, y, t) \\ &- \sum_{j=1}^J [\dot{w}(x_j, y_j, t) \phi_c(x, y, x_j, y_j) \\ &+ \ddot{w}(x_j, y_j, t) \phi_\rho(x, y, x_j, y_j)] \Delta S_j \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

点 (x_i, y_i) におけるたわみ $w(x_i, y_i, t)$ は

$$\begin{aligned} w(x_i, y_i, t) &= \bar{w}(x_i, y_i, t) \\ &- \sum_{j=1}^J [\dot{w}(x_j, y_j, t) \phi_c(x_i, y_i, x_j, y_j) \\ &+ \ddot{w}(x_j, y_j, t) \phi_\rho(x_i, y_i, x_j, y_j)] \Delta S_j \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

図1 板の分割方法

$$i = 1, 2, 3, \dots, J$$

式(8)は時間 t のみに関する連立常微分方程式であり、問題に応じて簡単に解くことが可能である。

2・2 自由振動問題 固有振動数および固有モードを求めるため、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} c(x, y) &= 0 \\ p(x, y, t) &= 0 \\ w(x, y, t) &= W(x, y) \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 ω は角振動数である。式(8)および式(9)より、

$$\begin{aligned} W(x_i, y_i) \\ = \omega^2 \sum_{j=1}^J \phi_\rho(x_i, y_i, x_j, y_j) \Delta S_j W(x_j, y_j) \\ i = 1, 2, 3, \dots, J \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

したがって、振動数方程式は

$$\begin{aligned} \det |\delta_{ij} - \omega^2 \phi_\rho(x_i, y_i, x_j, y_j) \Delta S_j| &= 0 \\ i, j &= 1, 2, 3, \dots, J \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし、 δ_{ij} は Kronecker の δ である。

2・3 強制振動問題 外部粘性減衰を有する強制振動問題の解を求めるため、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} p(x, y, t) &= P(x, y) \cos(\omega t) \\ \bar{w}(x, y, t) &= \bar{W}(x, y) \cos(\omega t) \\ w(x, y, t) &= W^c(x, y) \cos(\omega t) \\ &+ W^s(x, y) \sin(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)を式(8)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^J [B_{ij} W^c(x_j, y_j) + C_{ij} W^s(x_j, y_j)] \\ = \bar{W}(x_i, y_i) \\ \sum_{j=1}^J [-C_{ij} W^c(x_j, y_j) + B_{ij} W^s(x_j, y_j)] \\ = 0 \\ i = 1, 2, 3, \dots, J \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \delta_{ij} - \omega^2 \phi_\rho(x_i, y_i, x_j, y_j) \Delta S_j \\ C_{ij} &= \omega \phi_c(x_i, y_i, x_j, y_j) \Delta S_j \end{aligned}$$

この連立一次方程式(13)を解くことにより、たわみ振幅 $W^c(x_j, y_j)$ 、および $W^s(x_j, y_j)$ が得られる。また、たわみ振幅 $W(x, y)$ は次式で求められる。

$$W(x, y) = \sqrt{\{W^c(x, y)\}^2 + \{W^s(x, y)\}^2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

3. 計算精度

2章で提案した近似解法の収束性および精度を検討するために厳密解の得られる等厚かつ一様質量の四辺支持された直交異方性長方形板(図2参照)に本解法を適用した。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} h(x, y) &= h_0 & (\text{一定}) \\ \rho(x, y) &= \rho_0 & (\text{一定}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

板の曲げこわさを D_x, H, D_y とすると,

$$L(\quad) = D_x \frac{\partial^4(\quad)}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4(\quad)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4(\quad)}{\partial y^4} \dots\dots\dots (16)$$

板の境界条件は境界 $x=0$ および $x=a$ において

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots (17)$$

境界 $y=0$ および $y=b$ において

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

また, 強制振動問題の場合には外部粘性減衰の大きさも一様と仮定した。すなわち,

$$c(x, y) = c_0 \quad (\text{一定}) \dots\dots\dots (19)$$

さらに, 長方形板を図2に示すように等間隔 Δx (x 方向), Δy (y 方向) に分割し, 交点に通し番号 ($j=1, 2, 3, \dots, J$) をつける。このようにすれば,

$$\Delta S_j = \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{一定}) \dots\dots\dots (20)$$

3.1 グリーン関数 式(2)および板の境界条件を満足するグリーン関数は次のように表される。

$$G(x, y, \xi, \eta) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \frac{A_{kl}}{\gamma_{kl}} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \dots\dots\dots (21)$$

ただし,

$$A_{kl} = \frac{4}{ab} \sin\left(\frac{k\pi \xi}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi \eta}{b}\right) \dots\dots\dots (22)$$

$$\gamma_{kl} = D_x \left(\frac{k\pi}{a}\right)^4 + 2H \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 + D_y \left(\frac{l\pi}{b}\right)^4 \dots\dots\dots (23)$$

3.2 自由振動問題 振動数方程式(11)より得られた固有角振動数 $\omega_{r,s}$ の収束性および精度を表1, 2に示す。表1は等方性正方形板の固有角振動数の収束性に及ぼす分割数 J の影響を示す。表1中, 分割数 $J = m \times n$ とあるのは x 方向に $(m+1)$ 等分, y 方向に $(n+1)$ 等分することを表す。なお, フーリエ級数の項数は $K=L=100$ 項を用いた (本論文で提案する解法

の場合にはこれだけの項数を用いれば十分である)。また, 表の最下段には比較のため厳密解を併せ記した。厳密解は

$$\omega_{r,s} = \sqrt{\gamma_{rs}/\rho_0 h_0} \dots\dots\dots (24)$$

ただし, $\omega_{r,s}$ は辺 $x=0$, および $y=0$ に平行な節線の数それぞれ $(r-1)$ と $(s-1)$ である振動モードを有する固有角振動数である (この振動モードを $[r, s]$ で表す)。必ずしも対応しているわけではないが静的問題の基本解を用いる境界要素法でこの問題を解析した結果⁽²⁾⁽³⁾は次のようである。例えば x, y 方向ともに6等

表1 四辺支持された等方性正方形板の固有角振動数 $\omega_{r,s}/\sqrt{D_x/\rho_0 h_0 a^4}$ の収束性 $K=L=100$

Division J	Mode			
	[1,1]	[1,2]	[2,2]	[1,3]
3x3	19.6760	48.2340	74.2839	88.0273
5x5	19.7273	49.1507	78.1145	96.9458
7x7	19.7355	49.2884	78.7056	98.1898
9x9	19.7377	49.3243	78.8576	98.4986
11x11	19.7385	49.3367	78.9100	98.6034
13x13	19.7388	49.3421	78.9321	98.6474
15x15	19.7390	49.3445	78.9425	98.6678
Exact	19.7392	49.3480	78.9568	98.6960

表2 四辺支持された直交異方性長方形板の固有角振動数 $\omega_{r,s}/\sqrt{D_x/\rho_0 h_0 a^4}$ の精度 $K=L=100, J=15 \times 15$

$\frac{b}{a}$	$\frac{H}{D_x}$	$\frac{D_y}{D_x}$	$\omega_{r,s}/\sqrt{D_x/\rho_0 h_0 a^4}$		
1.0	1.0	1.0	19.739	49.345	78.943
			[1,1]	[1,2]	[2,2]
			(-0.001)	(-0.007)	(-0.018)
		0.5	18.464	40.691	48.847
			[1,1]	[1,2]	[2,1]
			(-0.001)	(-0.007)	(-0.010)
	0.5	1.0	17.095	45.225	68.369
			[1,1]	[1,2]	[2,2]
			(-0.001)	(-0.006)	(-0.015)
		0.5	15.605	35.583	44.683
			[1,1]	[1,2]	[2,1]
			(-0.001)	(-0.006)	(-0.009)
2.0	1.0	1.0	12.337	19.738	32.069
			[1,1]	[1,2]	[1,3]
			(-0.003)	(-0.008)	(-0.022)
		0.5	12.212	18.462	27.961
			[1,1]	[1,2]	[1,3]
			(-0.006)	(-0.013)	(-0.031)
	0.5	1.0	11.307	17.094	28.450
			[1,1]	[1,2]	[1,3]
			(-0.003)	(-0.006)	(-0.018)
		0.5	11.171	15.604	23.725
			[1,1]	[1,2]	[1,3]
			(-0.005)	(-0.010)	(-0.023)

Note: 1). $[r, s]$ means the mode.
2). The values in parenthesis are the error in percent.

図2 長方形板の分割方法

分した場合⁽³⁾ (表1では $J=5 \times 5$) の誤差は [1, 1] モードで 0.3%, [1, 2] モードでは 1.9%, [2, 2] モードでは 3.1% であり, 表1 (それぞれ, 0.01, 0.4% および 1.1%) に比較して精度が悪い. 文献⁽²⁾でも同様な結果である. 一方, 自由振動の基本解を用いる境界要素法⁽¹⁾では境界での積分を精度良く行った結果, 高次の固有値まで 1% 以下の誤差で求められている. 以上の結果は, 境界条件を精度良く満足させることが重要であることを示している. 表2は分割数を $J=15 \times 15$ として計算した直交異方性長方形板の固有角振動数の精度を示す. () 内は厳密解との誤差 (%) を示す. はりの固有振動数の計算結果によれば⁽⁷⁾, 計算精度と振動モードの間には密接な関係が認められるが, 表1および表2の場合にもほぼ同様な結果が得られている.

3.3 強制振動問題

3.3.1 厳密解 式(12)を式(1)に代入すれば,

$$\begin{cases} L(W^c) - \omega^2 \rho_0 h_0 W^c + \omega c_0 W^s = P \\ L(W^s) - \omega^2 \rho_0 h_0 W^s - \omega c_0 W^c = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (25)$$

板の境界条件および式(25)を満足する解 $W^c(x, y)$, $W^s(x, y)$ は次のように表される.

$$\begin{cases} W^c = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L W_{kl}^c \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \\ W^s = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L W_{kl}^s \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし,

$$\begin{cases} W_{kl}^c = \frac{(\gamma_{kl} - \omega^2 \rho_0 h_0) P_{kl}}{(\gamma_{kl} - \omega^2 \rho_0 h_0)^2 + (\omega c_0)^2} \\ W_{kl}^s = \frac{(\omega c_0) P_{kl}}{(\gamma_{kl} - \omega^2 \rho_0 h_0)^2 + (\omega c_0)^2} \\ P_{kl} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dx dy \end{cases} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\dots\dots\dots (28)$$

3.3.2 近似解 式(6)に式(12)および式(21)を

表3 四辺支持された等方性正方形板の中心の
たわみ振幅 $\frac{W(0.5a, 0.5a)}{10^{-3} P_0 a^4 / D_x}$ の収束性
 $c_0 / \sqrt{D_x \rho_0 h_0 / a^4} = 1.0$, $K = L = 100$

Division J	ω			
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,3}$	$\omega_{3,3}$	$\omega_{1,5}$
3x3	81.838	8.8910		
5x5	82.076	10.703	0.93163	0.48767
7x7	82.112	10.885	0.99232	2.3718
9x9	82.122	10.926	1.0061	2.4778
11x11	82.125	10.939	1.0105	2.5065
13x13	82.126	10.944	1.0122	2.5169
15x15	82.127	10.946	1.0130	2.5215
Exact	82.1277	10.9496	1.01398	2.52709

代入し式(28)を考慮すると, 式(13)に含まれるたわみ振幅 $\bar{W}(x_i, y_i)$ は次のように表される.

$$\bar{W}(x_i, y_i) = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \frac{P_{kl}}{\gamma_{kl}} \sin\left(\frac{k\pi}{a} x_i\right) \sin\left(\frac{l\pi}{b} y_i\right) \dots\dots\dots (29)$$

表3は等分布荷重 $P_0 \cos \omega t$ を受ける等方性正方形板の中心のたわみ振幅 $W(0.5a, 0.5a)$ [式(14)参照] に及ぼす分割数 J の影響を示す. フーリエ級数の項数は $K = L = 100$, 外部粘性減衰係数は $c_0 = 1.0 \sqrt{D_x \rho_0 h_0 / a^4}$, 加振角振動数は $\omega = \omega_{r,s}$ (ただし, 固有角振動数 $\omega_{r,s}$ はそれぞれの分割数で得られた値) とした. 板の中心のたわみ振幅の周波数応答を図3に示す. 図3(a)は外部粘性減衰係数 c_0 が大きい場合の, 図3(b)は小さい場合の例である. 図中, W_{st} は等分布荷重 P_0 が静的に作用したときの板の中心のたわみである. 表4は等分布荷重 $P_0 \cos \omega t$ を受ける直交異方性長方形板の中心におけるたわみ振幅 $W(0.5a, 0.5b)$ の精度を示す (ただし, $J = 15 \times 15$, $c_0 = 1.0 \sqrt{D_x \rho_0 h_0 / a^4}$). 表4中,

(a) $c_0 = 10.0 \sqrt{D_x \rho_0 h_0 / a^4}$

(b) $c_0 = 0.1 \sqrt{D_x \rho_0 h_0 / a^4}$

図3 四辺支持された等方性正方形板の中心におけるたわみ振幅の周波数応答 (ただし, $K = L = 100$)

()内の値は厳密解との誤差を(%)で示す。表2および表4の [1, 1] および [1, 3] モードの値を比較すれば明らかなように、固有角振動数 $\omega_{r,s}$ の誤差と加振角振動数 $\omega = \omega_{r,s}$ のときの振幅の誤差はほとんど同じであり、お互いに密接な関係があることが明らかである。

4. 計算例

2章で提案した近似解法の応用例として、中心に1個の付加質量 $\bar{\rho}$ を有する四辺支持された直交異方性長方形板の自由振動問題を解析した。板の質量、厚さ、および板の分割方法は3章の場合と全く同じである〔図2および式(15)~(20)参照〕。ただし、板の中心をI番めの分割点になるように分割し、この点に質量が付加されたとする。ダランベールの原理より、質量 $\bar{\rho}$ を付加した位置 (x_1, y_1) で集中荷重 $-\bar{\rho}(\partial^2 w / \partial t^2)$ が板

に作用すると考え、式(5)で定義した関数 ϕ_o の代わりに、

$$\begin{aligned} \phi_o(x, y, \xi, \eta) = & [\rho(\xi, \eta)h(\xi, \eta) \\ & + (\bar{\rho}/4S_1)\delta(\xi-x_1)\delta(\eta-y_1)]G(x, y, \xi, \eta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (30)$$

を用いればよい。同様な取扱いはばねなどが作用する場合にも可能である。

質量が付加された板の自由振動問題は従来より数多く発表されている。例えば、四辺支持された等方性正方形板の自由振動問題はDiracのデルタ関数と有限フーリエ変換を用いて解析した研究⁽⁹⁾、有限フーリエ変換とラプラス変換を用いて解析した研究⁽¹⁰⁾、理論的モード解析法を用いて解析した研究⁽¹¹⁾などがある。それぞれの方法で求められた固有角振動数を表5に示す(ただし、 $\bar{\rho} = 0.25\rho_0 h_0 a^2$ 、分割数は $J = 15 \times 15$)。文献(11)は付加質量を有しない板のモード関数を利用しているので、そのモードの節線が板の中心を通る場合には固有角振動数は厳密解と一致する。表5より、文献

表4 四辺支持された直交異方性長方形板の中心のたわみ振幅 $W(0.5a, 0.5b)/(10^{-3}P_0 a^4/D_x)$ の精度

$$c_0/\sqrt{D_x \rho_0 h_0/a^4} = 1.0, K = L = 100, J = 15 \times 15.$$

$\frac{b}{a}$	$\frac{H}{D_x}$	$\frac{D_y}{D_x}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,3}$	$\omega_{3,3}$
1.0	1.0	1.0	82.127 (-0.001)	10.946 (-0.030)	1.0130 (-0.099)
		0.5	87.797 (-0.002)	7.1069 (-0.026)	1.0842 (-0.121)
	0.5	1.0	94.832 (-0.001)	11.475 (-0.029)	1.1697 (-0.082)
		0.5	103.88 (-0.001)	77.139 (-0.023)	12.815 (-0.096)
2.0	1.0	1.0	131.39 (-0.003)	16.875 (-0.022)	1.6149 (-0.273)
		0.5	132.72 (-0.005)	19.362 (-0.033)	1.6283 (-0.462)
	0.5	1.0	143.36 (-0.003)	19.034 (-0.018)	1.7561 (-0.245)
		0.5	145.08 (-0.005)	22.851 (-0.023)	1.7826 (-0.406)

Note: The values in parenthesis are the error in percent.

表5 中心に付加質量 $\bar{\rho}$ を有する四辺支持された等方性正方形板の固有角振動数 $\omega_{r,s}/\sqrt{D_x/\rho_0 h_0 a^4}$ の精度 $\bar{\rho} = 0.25\rho_0 h_0 a^2, K = L = 100, J = 15 \times 15$

$r \ s$	$\omega_{r,s}/\sqrt{D_x/\rho_0 h_0 a^4}$				
	Ref.(9)	Ref.(10)	Ref.(11)	Present	Exact
1 1	13.793	13.737	13.729	13.726	
1 2			49.348	49.345	49.348
1/3+3/1	68.995	65.557	65.005	64.931	
1/3-3/1				98.668	98.696
2 2			78.957	78.943	78.957
2 3			128.30	128.24	128.30
3 3	162.65	153.57	151.97	151.76	

表6 中心に付加質量 $\bar{\rho}$ を有する四辺支持された直交異方性長方形板の固有角振動数 $\omega_{r,s}/\sqrt{D_x/\rho_0 h_0 a^4}$ $K = L = 100, J = 15 \times 15$

$\frac{H}{D_x}$	$\frac{D_y}{D_x}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{\bar{\rho}}{\rho_0 h_0 a^2}$	1st	2nd	3rd
1	1	1	0	19.739	49.345	78.943
			0.01	19.354	49.345	78.943
			0.1	16.591	49.345	75.269
			1	8.4739	49.345	56.299
			∞	0	49.345	52.621 (52.619)
	0.5	1	0	12.337	19.738	32.069
			0.01	12.095	19.738	31.456
			0.1	10.305	19.738	27.925
			1	5.0930	19.738	23.673
			∞	0	19.738	22.796 (22.797)
	0.5	0.5	0	17.095	45.225	68.369
			0.01	16.761	45.225	68.369
			0.1	14.380	45.225	68.369
			1	7.3837	45.225	52.856
0.5	1	1	∞	0	45.225	49.234 (49.231)
			0	11.307	17.094	28.450
			0.01	11.085	17.094	27.909
			0.1	9.4412	17.094	24.853
			1	4.6606	17.094	21.240
			∞	0	17.094	20.496 (20.497)
	0.5	0.5	0	15.605	35.583	44.683
			0.01	15.301	35.583	44.683
			0.1	13.118	35.583	44.683
			1	6.7076	35.583	44.622
	0.5	0.5	∞	0	35.583	41.797 (41.795)
			0	11.171	15.604	23.725
			0.01	10.951	15.604	23.275
			0.1	9.2761	15.604	20.834
			1	4.4691	15.604	18.248
			∞	0	15.604	17.763

Note: The values in parenthesis are approximate ones from Ref.(12).

(11) はかなり高精度であると結論できるが, $[1/3+3/1]$ モードと $[1/3-3/1]$ モードが明りょうに区別されていない。

直交異方性長方形板の中心に質量を付加した場合の計算結果を表6に示す(分割数は $J=15 \times 15$)。固有角振動数 $\omega_{r,s}$ は小さい順に示したので必ずしもモード別にはなっていない。付加質量が無限大の場合には質量を付加した位置で点支持された場合に相当する。表6では付加質量を有する場合と点支持された場合の対応を明確に示すために点支持の場合の固有角振動数の最小値を零としたが、実際の基本固有角振動数は2番めの値である。点支持された板の固有角振動数はすでに著者らにより高精度に求められている⁽¹²⁾ので、表6中の()内にその値を示した。両者を比較すれば付加質量を有する場合にも本解法により固有角振動数を精度良く求め得ると結論できる。

5. 結 論

静的曲げ問題のグリーン関数を用いて直交異方性板の振動問題を解析するための数値計算法を提案した。

最初に、計算精度を検討するため解析的に解の求められる四辺支持された長方形板の自由振動問題および強制振動問題に本解法を適用した。その結果、板の分割数を適当に選べば十分な精度の値を求め得ることが明らかになった。特に、低次の固有角振動数および加振振動数が小さいときの強制振動の振幅は少ない分割

数でも高精度の値が求められた。

次に、計算プログラムのごくわずかな変更により複合振動系のさまざまな問題に本解法が適用可能であることを示すために、一例として中心に付加質量を有する四辺支持された長方形板の自由振動問題を解析した。固有角振動数の収束性は付加質量を有しない板の場合と同様の傾向を示した。また、付加質量を無限大にしたときの固有角振動数の値を他の解法で求めた高精度な値と比較した結果十分な精度の値が求められることが明らかになった。

文 献

- (1) 丹羽・小林・北原, 土木学会論文報告集, 304 (昭和55), 1.
- (2) 登坂・角田, 日本建築学会論文報告集, 328 (昭和58), 36.
- (3) 田中・山際・宮崎, 第65期全国大会講演会講演予講集, (昭62), 117 A.
- (4) Nicholson, J. W., *AIAA J.*, 24-3 (1986), 485.
- (5) Nicholson, J. W., and Bergman, L. A., *Proc. ASCE, J. Eng. Mech.*, 112-1 (1986), 14.
- (6) 坂田, 機論, 53-496, C (昭62), 2477.
- (7) 小坪, 土木振動学, (昭48), 214, 森北出版.
- (8) 宮田, わかりやすい振動の知識, (昭58), 147, 鹿島出版会.
- (9) Amba-Rao, C. L., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 3 (1964), 550.
- (10) Magrab, E. B., *Trans. ASME, I. Appl. Mech.* 2 (1968), 411.
- (11) Nicholson, J. W., and Bergman, L. A., *J. Sound Vib.*, 103-3 (1985), 357.
- (12) 坂田・細川, 機論, 52-482, C (昭61), 2656.

討 論

〔質問〕 山 口 秀 谷〔防衛大学校〕

グリーン関数のフーリエ級数表示の項数 K, L をいづれの数値計算例でも100項まで採用しているが、級数の収束が速いことおよび板の分割数を J とした場合に系を自由度 J の振動系と考えられることを考慮すると、 J がそれほど大きくなければ高次の級数項を含まなくとも解が収束していると推測される。また項数が多すぎると数値計算の丸め誤差が増加することも考えられる。これらの点から項数 K, L について詳しいご見解をお持ちでしたらお示し願いたい。

〔回答〕 ご指摘のとおり、グリーン関数の収束性はきわめて速く低次振動の場合には本論文に用いたように $K=L=100$ まで計算する必要はない。一例を示すと、付表1のようになる。この例は本文表1の計算例で分割数 $J=9 \times 9$ とした場合である。本計算例の場合には項数を20も取れば十分であると考えている。本

論文で項数を100としたのは下記の理由からである。

(1) 板の形状、境界条件および板の分割数を決めれば、グリーン関数の計算は一度限りですむのでグリーン関数そのものの計算時間はあまり問題とならない。

付表1 四辺支持された等方性正方形板の固有角振動数 $\omega_{r,s}/\sqrt{D_x/\rho_0 h_0 a^4}$ の収束性

$K=L$	Mode			
	[1,1]	[1,2]	[2,2]	[1,3]
20	19.7385	49.3362	78.9039	98.5898
40	19.7379	49.3265	78.8667	98.5163
60	19.7378	49.3250	78.8606	98.5044
80	19.7377	49.3245	78.8585	98.5004
100	19.7377	49.3243	78.8576	98.4986
Exact	19.7392	49.3480	78.9568	98.6960

(2) 同じグリーン関数を用いて、自由振動、強制振動および過渡振動まで計算するので、いずれの場合にも利用できる精度のよいグリーン関数を求めたい。

〔質問〕 長屋 幸助〔群馬大学工学部〕

複雑な異方性板の数値解法を提示されたことに敬意を表す。

(1) 貴報の方法はガラーキン法の積分を離散化したものに相当するのではないか。

(2) 貴報で用いるグリーン関数は境界条件さえ満足すればどのような関数を仮定してもよいのではないか。また本解では板の静的解（フーリエ級数）を用いているので、高次モードまでの解が得られているが、たとえば内部に節線のない関数を仮定した場合は、高次モードの結果が得られなくなるのではないか。

〔回答〕 (1) 重み関数としてグリーン関数 G をたわみとして W を用いれば、

$$\iint L(W) G d\xi d\eta = -\omega^2 \iint \rho h W G d\xi d\eta \quad \cdots \cdots (i)$$

また、

$$\iint L(G) W d\xi d\eta = W(\xi, \eta) \quad \cdots \cdots (ii)$$

したがって、式(iii)が成立すれば、ご指摘のとおりだと思われる。

$$\iint L(W) G d\xi d\eta = \iint L(G) W d\xi d\eta \quad \cdots \cdots (iii)$$

一般論としての証明は現在できていないが、本論文で対象としている四辺支持された長方形板の場合にはご指摘のとおりになる。

(2) 式(ii)を導くために、本文式(2)を用いているので、関数 G はグリーン関数である必要がある。ただし、ガラーキン法を用いて固有振動数を求めるという意味であれば、ご指摘のように W , G ともに単に境界条件を満足する任意関数でよいと思われる。そのときには求めたいモードに応じた関数を用いる必要がある。本論文で用いた方法では、たわみ W を J 個の未知の離散化値で近似している。したがって、(内部に節線を含まない) 静的問題のグリーン関数を用いて高次の固有振動数が求められる。