車輪のスキールノイズに関する基礎的研究*
(第 4 報, 回転円板の鳴き音)中井 幹雄^{*1}, 横井 雅之^{*2}, 杉浦 正典^{*3}Railway Wheel Squeal
(4th Report, Squeal of a rotating disk)

Mikio NAKAI, Masayuki YOKOI, and Masanori SUGIURA

A steel rod was rubbed against the circumference of a thin steel rotating disk in its axial direction. A rotating disk serving as a railway wheel was clamped at the inner radius and free at the outer radius. A squeal occurs at low rotational speeds, when a nodal diameter mode of the disk is stationary in the space-fixed coordinate system. At relatively higher rotational speeds, a squeal with a forward or backward traveling wave is generated. Either of the two waves may occur depending on the vibration of the steel rod. Analytical responses of the rotating disk in both the disk-fixed and the space-fixed coordinate systems agreed with the experimental ones.

Key Words: Vibration of Continuous System, Rotating Circular Plate, Squeal, Railway Wheel, Self-Excited Vibration, Frictional Vibration

1. 緒 言

前報までの研究では^{(1)~(3)}車輪をシミュレートした円板は静止していた。実際の列車の車輪に近づけるため、本報では円板が回転しているときに発生するスキールについて検討する。

回転円板の自励振動については、内部共振のない場合とある場合について末岡らが研究している⁽⁴⁾⁽⁵⁾。これらの研究によると、自励振動はごく低回転においてのみ発生し、回転が高くなると、実験的・理論的にも発生しないことが報告されている。しかしながら、実際の列車の車輪のスキールは時速約 50 km でも発生している。本報では、ある程度高い回転においてもスキールが発生することを実験的、理論的に明らかにした。

2. 実験方法と実験結果

2.1 実験方法 前報⁽¹⁾と同じ実験装置を用い、内径固定、外径自由の回転している円板(S 45 C, 内径

5 cm, 外径 30 cm, 厚さ 0.75 cm) の円周面の一点を正方形断面をした鋼棒(1.6×1.6×60 cm)の中央付近を荷重 29.4 N で押しつけて円板の軸方向に摩擦させた。鋼棒の中央付近を摩擦させると、第 2 報に述べたように、(4-0)モード[($n-s$), n : 節直径の数, s : 節円の数]の単一モードのスキールが発生しやすい。反時計方向に円板を回転させ 3~60 rpm と変えながら、スキール発生時の円板の振動変位を空間に固定された静止座標系として、10° おきに設置された 6 個の渦電流型微小変位計によって測定した。その測定位置を図 1 に示す。なお、測定された変位には円板の偏心などによる低周波成分が含まれるので、これらをハイパスフィルタによってカットした。さらに、円板上に固定された回転座標系として、円板の円周面から 1 cm 内側

図 1 座標系と微小変位計による変位の測定位置

* 昭和 63 年 7 月 15 日 東海支部浜松地方講演会において講演, 原稿受付 昭和 63 年 1 月 20 日。

*¹ 正員, 京都大学工学部 (〒606 京都市左京区吉田本町)。

*² 正員, 大阪産業大学短期大学部 (〒574 大東市中垣内 3-1-1)。

*³ 日本電装(株) (〒448 刈谷市昭和町 1-1)。

に軸方向に貼り付けた重さ 2 g の振動加速度ピックアップによって、円板の振動加速度を測定した。振動ピックアップからの出力はスリップリングを介して取り出された。

2・2 実験結果 鋼棒の移動距離が短いため(長くすると第2報に述べたように他のモードのスキールが混在して発生する.)、スキール発生時間が短く、一定振幅のスキールを発生させるのは困難である。その全体的な様子を知るため、図1に示す各位置における円板の振動変位(静止座標系)および振動加速度(回転座標系)を 30, 60 rpm について示したのが図2である。かなり高い回転でもスキールが発生し、かつその変位が変動するのがわかる。スキール発生時の円板の振動モードを調べるため、図3(a)~(e)に図2の摩擦点(0°)の変位が最大になるところの時間軸を拡大

した静止座標系の変位を示す。このときスキールは安定状態にあると考えられる。なお、回転数は 0, 3, 15, 30 rpm および 60 rpm である。図2, 3から次のことがわかる。円板が静止しているとき[図3(a)], 20°と30°の変位は逆位相であり、振動モードの節はこの間にある。また、0°の変位が最も大きい。したがって、円板は摩擦点を腹とした(4-0)モードで振動している。

低速の 3 rpm では[図3(b)], 円板の振動モードは静止状態より節の位置が回転方向に移動した(30°付近)空間に固定された振動モード(静止モード)である。この結果は末岡らの結果⁽⁴⁾と同じである。

15 rpm では[図3(c)], 円板の振動モードは節が30°付近にある静止モードに近いが、各位置における波形をみると、振動が回転と逆方向に伝わっていく後退波がわずかに発生している。

さらに、回転が高くなり、30 rpm になると[図3(d)], 後退波成分が多くなり、60 rpm では[図3(e)], 矢印で示すように後退波が発生しているのがよくわかる。この位相差はほぼ $n\theta/\omega$ (ω : スキールの角振動数) に等しい。スキール発生時間が短いため、後退波の振幅が一定の時間は短く、図2(b)に示すように振幅が大きな山を示す過渡状態の時間は長い。この山の谷(振動の節)が図2(b)の矢印のように0°から30°の間に約1/12 s 進み、回転とともに移動しているところもある。このとき、円板に固定された振動モード(回転モード)に近い振動モードで円板は振動していることになる。図2(a)からわかるように、30 rpm では60 rpm ほど節の移動はみられない。

スキール発生ごとに円板の振幅は変動する

図2 各位置における円板の振動変位と振動加速度

図3 微小変位計による各位置における円板の振動変位

が、図4は回転数による摩擦点(0°)における円板の振幅の変化を示す。各振幅は円板静止時の振幅の平均値 w_s との比で示し、ばらつきの範囲も示している。低回転で変位はやや大きく、50 rpm ぐらいまでは、振幅はほぼ一定である。しかし、60 rpm になると円板と鋼棒の密着が十分でなく、スキルは発生し難くなり、わずかに振幅も小さくなる。

3. 理論解析

3.1 回転座標系 図1に示すような反時計方向に回転する円板に固定された回転座標系 (r, φ) によって、内部共振のない場合の円板の振動を考える。

角速度 Ω で回転している円板の円周面の1点 (r_0, φ_0) を押しつけ荷重 P_0 で摩擦した場合の円板の平衡位置からの軸方向変位 w を表す運動方程式は次式のように表される。なお、この場合、鋼棒の振動、円板の回転にともなう応力変化、円板の回転慣性およびせん断変形は無視する。

$$D\nabla^4 w + c \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = [\mu(v_r) - \mu(V)] P_0 \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 t : 時間、 D : 板の曲げ剛性、 h : 板厚、 c : 減衰係数、 γ : 比重量、 g : 重力の加速度、 r_0 : 外半径、 μ : 動摩擦係数であり、鋼棒と円板の相対速度 v_r の関数によって表される。前報と同様、 μ を v_r の多項式で表す⁽¹⁾。

$$\mu(v_r) = \mu_0 + \mu_1 v_r + \mu_2 v_r^3 \quad \dots\dots\dots (2)$$

μ_0, μ_1, μ_2 : 定数、 $v_r = V - (\partial w / \partial t)_{r_0, \varphi_0}$ 、 V : 鋼棒の移動速度、 $(\partial w / \partial t)_{r_0, \varphi_0}$: 鋼棒と円板の接触点における円板の軸方向速度、 δ : Dirac のデルタ関数、 φ_0 : 接触点の φ の座標、 Ω で回転しているとき $\varphi_0 = -\Omega t$ 。

円板上の (r, φ) の変位 w を次式のようにおく。

図4 スキル発生時の回転数による円板の振動変位の変化

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n,s} R_{ns}(r) [A_{ns}(t) \sin n\varphi + B_{ns}(t) \cos n\varphi] \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $A_{ns}(t), B_{ns}(t)$: 時間 t の関数、 $R_{ns}(r)$: $r = r_i$ (内半径) において固定、 $r = r_0$ において自由の境界条件から求められる固有関数で次のように表される。

$$R_{ns}(r) = J_n(k_{ns}r) + \bar{B}_{ns} Y_n(k_{ns}r) + \bar{C}_{ns} I_n(k_{ns}r) + \bar{D}_{ns} K_n(k_{ns}r)$$

$k_{ns}, \bar{B}_{ns}, \bar{C}_{ns}, \bar{D}_{ns}$: 振動数方程式から求められる係数、 $k_{ns}^4 = \gamma h \omega_{ns}^2 / Dg$, ω_{ns} : $(n-s)$ モードの固有角振動数、 J_n, Y_n : n 次の第1種および第2種のベッセル関数、 I_n, K_n : n 次の変形第1種および変形第2種ベッセル関数。

また、 $(\partial w / \partial t)_{r_0, \varphi_0}$ は $\dot{\varphi} = 0$ と考えて次のように表される。なお、 $[\dot{\quad}]$ は t に関する微分を表す。

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{r_0, \varphi_0} = \sum_{n,s} R_{ns}(r_0) \times (-\dot{A}_{ns} \sin n\Omega t + \dot{B}_{ns} \cos n\Omega t) \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(3)を式(1)に代入して、固有関数の直交性などから、 Galerkin法を適用すると次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A}_{ns} + C\dot{A}_{ns} + \omega_{ns}^2 A_{ns} &= -\frac{g}{\gamma h} \cdot \frac{R_{ns}(r_0) \sin n\Omega t}{N_{ns1}} P_0 [\mu(v_r) - \mu(V)] \\ \ddot{B}_{ns} + C\dot{B}_{ns} + \omega_{ns}^2 B_{ns} &= \frac{g}{\gamma h} \cdot \frac{R_{ns}(r_0) \cos n\Omega t}{N_{ns2}} P_0 [\mu(v_r) - \mu(V)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $C = gc / \gamma h$,

$$N_{ns1} = \pi \int_{r_i}^{r_0} R_{ns}^2(r) r dr, \text{ ただし, } n=0 \text{ のとき}$$

$$N_{ns1} = 0$$

$$N_{ns2} = \varepsilon_n \pi \int_{r_i}^{r_0} R_{ns}^2(r) r dr, \varepsilon_n = \begin{cases} 2 (n=0) \\ 1 (n \neq 0) \end{cases}$$

第1報で検討したように⁽¹⁾、円板の内部共振がない場合、スキルは単一モードで発生する。そこで、解析を簡単にするため、単一モード $(n-s)$ についてのみ考えることにする。ただし、 $n \neq 0$ とする。

いま、

$$R = R_{ns}(r_0), \varepsilon = \frac{g}{\gamma h} \cdot \frac{P_0 R^2}{N_{ns1}} (\mu_1 + 3\mu_2 V^2),$$

$$E = 3\mu_2 VR / (\mu_1 + 3\mu_2 V^2),$$

$$F = \mu_2 R^2 / (\mu_1 + 3\mu_2 V^2),$$

$$A = A_{ns}, B = B_{ns}, \nu = n\Omega, \omega_0 = \omega_{ns}$$

とおくと、式(5)は次式のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + \omega_0^2 A &= \varepsilon f_A \\ \ddot{B} + \omega_0^2 B &= \varepsilon f_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで,

$$\begin{aligned} f_A &= f' \sin \nu t - C\dot{A}/\varepsilon \\ f_B &= -f' \cos \nu t - C\dot{B}/\varepsilon \\ f' &= -\dot{A} \sin \nu t + \dot{B} \cos \nu t - E(\dot{A}^2 \sin^2 \nu t - 2\dot{A}\dot{B} \\ &\quad \times \sin \nu t \cos \nu t + \dot{B}^2 \cos^2 \nu t) - F(\dot{A}^3 \sin^3 \nu t \\ &\quad + 3\dot{A}\dot{B}^2 \sin \nu t \cos^2 \nu t \\ &\quad - 3\dot{A}^2\dot{B} \sin^2 \nu t \cos \nu t - \dot{B}^3 \cos^3 \nu t) \end{aligned}$$

$\nu \ll \omega_0$ となるような非共振の場合を考え、式(6)を漸近法によって解く。第1近似までとると、解は

$$\left. \begin{aligned} A &= a \cos \phi + \varepsilon u(a, b, \phi, \bar{\phi}, \nu t) \\ B &= b \cos \bar{\phi} + \varepsilon v(a, b, \phi, \bar{\phi}, \nu t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

と表される。ここで、 $\phi = \omega_0 t + \phi$, $\bar{\phi} = \omega_0 t + \bar{\phi}$, ϕ , $\bar{\phi}$ は時間 t の関数。このとき次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, b), \quad a \frac{d\phi}{dt} = \varepsilon a B_1(a, b) \\ \frac{db}{dt} &= \varepsilon C_1(a, b), \quad b \frac{d\bar{\phi}}{dt} = \varepsilon b D_1(a, b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

まず、 A_1, B_1 を求める。 f_A および u を $\phi, \bar{\phi}, \nu t$ について三重フーリエ級数に展開する。すなわち、

$$f_A = \sum_{klm} f_{A,klm}^{(0)}(a, b) e^{i(k\phi + l\bar{\phi} + m\nu t)} \dots\dots\dots (9)$$

$$u = \sum_{klm} \bar{f}_{A,klm}(a, b) e^{i(k\phi + l\bar{\phi} + m\nu t)} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 k, l, m : 整数

$$f_{A,klm}^{(0)} = \frac{\nu}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_A e^{-i(k\phi + l\bar{\phi} + m\nu t)} d\phi d\bar{\phi} d\nu t \dots\dots\dots (11)$$

式(7), (8), (9), (11)を式(6)に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{klm} [\omega_0^2 - (k\omega_0 + l\omega_0 + m\nu)^2] \bar{f}_{A,klm} e^{i(k\phi + l\bar{\phi} + m\nu t)} \\ = \sum_{klm} f_{A,klm}^{(0)} e^{i(k\phi + l\bar{\phi} + m\nu t)} + 2\omega_0 B_1 a \cos \phi \\ + 2\omega_0 A_1 \sin \phi \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

A_1, B_1 を決定するためには $[\omega_0^2 - (k\omega_0 + l\omega_0 + m\nu)^2] = 0$ とすれば、

$$\begin{aligned} 2\omega_0 B_1 a \cos \phi + 2\omega_0 A_1 \sin \phi \\ = - \sum_{klm} f_{A,klm}^{(0)} e^{i(k\phi + l\bar{\phi} + m\nu t)} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

が成立する。すなわち、上式は $m=0, k+l=\pm 1$ のとき成立する。この式から、 A_1, B_1 を決定することができる。同様に、 C_1, D_1 も求められる。 A_1, B_1, C_1, D_1 が求まれば、式(8)は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon a}{64} [16C^* + F\omega_0^2(9a^2 + 6b^2 + 3b^2 \cos 2\theta)] \\ a \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{3}{64} \varepsilon F a b^2 \omega_0^2 \sin 2\theta \\ \frac{db}{dt} &= -\frac{\varepsilon b}{64} [16C^* + F\omega_0^2(6a^2 + 9b^2 + 3a^2 \cos 2\theta)] \end{aligned}$$

$$b \frac{d\bar{\phi}}{dt} = \frac{3}{64} \varepsilon F a^2 b \omega_0^2 \sin 2\theta \dots\dots\dots (14)$$

ここで、 $C^* = 1 + 2C/\varepsilon$, $\theta = \bar{\phi} - \phi = \bar{\phi} - \phi$ 。

式(14)の右辺を零とおくことによって、次のような定常解がえられる。

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & a=b=0 \\ \text{(II)} \quad & a^2 = -16C^*/9F\omega_0^2, \quad b=0 \\ \text{(III)} \quad & a=0, \quad b^2 = -16C^*/9F\omega_0^2, \\ \text{(IV)} \quad & a \neq b \neq 0, \quad \cos 2\theta = 1, \\ & a^2 + b^2 = -16C^*/9F\omega_0^2, \\ \text{(V)} \quad & a=b, \quad \sin 2\theta = 0, \quad a^2 = -16C^*/F\omega_0^2(15 \\ & + 3 \cos 2\theta) \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

これらの解のうち、解(IV), (V)は式(14)の変分方程式から安定性が検討でき、 $\cos 2\theta = -1$, $\theta = (m' + 1/2)\pi$, m' : 整数, $C^* > 0$ のとき解(V)は安定である。すなわち、減衰係数 C が小さく、押しつけ荷重 P_0 が大きいほど解は安定となる。また、解(IV)は $C^* > 0$ のとき不安定である。これら以外の解の安定性については、 $\bar{u} = a \cos \phi$, $\bar{v} = a \sin \phi$, $\bar{u} = b \cos \bar{\phi}$, $\bar{v} = b \sin \bar{\phi}$ において検討しなければならない。式(14)は次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{64} [16C^* \bar{u} + 3F\omega_0^2(3\bar{u}^3 + 3\bar{u}\bar{v}^2 \\ &\quad + 3\bar{u}\bar{u}^2 + \bar{u}\bar{v}^2 + 2\bar{v}\bar{u}\bar{v})] \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{64} [16C^* \bar{v} + 3F\omega_0^2(3\bar{v}^3 + 3\bar{v}\bar{u}^2 \\ &\quad + 3\bar{v}\bar{v}^2 + \bar{v}\bar{u}^2 + 2\bar{u}\bar{u}\bar{v})] \\ \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{64} [16C^* \bar{u} + 3F\omega_0^2(3\bar{u}^3 + 3\bar{u}\bar{v}^2 \\ &\quad + 3\bar{u}\bar{u}^2 + \bar{u}\bar{v}^2 + 2\bar{v}\bar{u}\bar{v})] \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{64} [16C^* \bar{v} + 3F\omega_0^2(3\bar{v}^3 + 3\bar{v}\bar{u}^2 \\ &\quad + 3\bar{v}\bar{v}^2 + \bar{v}\bar{u}^2 + 2\bar{u}\bar{u}\bar{v})] \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

式(16)の変分方程式から前述のように解の安定性を検討できる。その結果、 $C^* > 0$ のとき、解(I), (II), (III)はすべて不安定である。

次に、式(7)の u を求めてみよう。式(12)から、 $\omega_0^2 - (k\omega_0 + l\omega_0 + m\nu)^2 \neq 0$ に対して $\bar{f}_{A,klm}$ が

$$\bar{f}_{A,klm} = f_{A,klm}^{(0)} / [\omega_0^2 - (k\omega_0 + l\omega_0 + m\nu)^2] \dots\dots\dots (17)$$

のように求めることができるので、 u は

$$u = \sum_{klm} \frac{f_{A,klm}^{(0)}}{\omega_0^2 - (k\omega_0 + l\omega_0 + m\nu)^2} e^{i(k\phi + l\bar{\phi} + m\nu t)} \dots\dots\dots (18)$$

となる。式(18)を具体的に計算すると u は次式となる。

$$\begin{aligned} u &= a\omega_0(S_{-102} - S_{102})/4 - b\omega_0(C_{0-12} - C_{012})/4 \\ &\quad - Ea^2\omega_0^2[6S_{001} - 2S_{003} + S_{203} + S_{-203} - 3(S_{201} \\ &\quad + S_{-201})]/16 + Eab\omega_0^2[C_{113} + C_{-1-13} - C_{1-13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -C_{-113}-C_{111}-C_{-1-11}+C_{1-11}+C_{-111}]/8 \\
& -Eb^2\omega_0^3[2(S_{001}+S_{003})-S_{023}-S_{0-23}-S_{021} \\
& -S_{0-21}]/16+Fa^2\omega_0^3[4(S_{302}-S_{-302})-6S_{300} \\
& +S_{-304}-S_{304}+12(S_{-102}-S_{102}) \\
& +3(S_{104}-S_{-104})]/64+3Fab^2\omega_0^3[2(S_{-104} \\
& -S_{104}-S_{120})+S_{124}-S_{-1-24}+S_{1-24}-S_{-124}]/64 \\
& -3Fa^2b\omega_0^3[4(C_{0-12}-C_{012})+2(C_{212}-C_{-2-12} \\
& -C_{2-12}+C_{-212}+C_{014}-C_{0-14})-C_{214}+C_{-2-14} \\
& +C_{2-14}-C_{-214}]/64-Fb^3\omega_0^3[2(C_{032}-C_{0-32}) \\
& +C_{034}-C_{0-34}+6(C_{0-12}-C_{012}) \\
& +3(C_{0-14}-C_{014})]/64 \quad \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
S_{klm} &= \frac{\sin(k\psi + l\bar{\psi} + mvt)}{\omega_0^2 - (k\omega_0 + l\omega_0 + mv)^2} \\
C_{klm} &= \frac{\cos(k\psi + l\bar{\psi} + mvt)}{\omega_0^2 - (k\omega_0 + l\omega_0 + mv)^2}
\end{aligned}$$

v も u と同様にして求めることができる。

さらに, 安定解(V)の場合の円板の振動モードを検討する。式(3)から, $r=r_0$ における w は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
w &= Ra(\sin n\varphi \cos \psi + \cos n\varphi \cos \bar{\psi}) \\
&+ R\epsilon(u \sin n\varphi + v \cos n\varphi) \dots\dots\dots (20)
\end{aligned}$$

式(20)の第1項は $\theta=(m'+1/2)\pi$ を用いれば $Ra \sin [n\varphi + (-1)^{m'-1}\psi]$ と表され, m' が奇数のとき後退波, m' が偶数のとき進行波となる。

一方, 式(20)の第2項は v (すなわち, Ω) が大きくなると式(19)からもわかるように, u, v は小さくなり, 円板の振動モードは式(20)の第1項によって決定される。 v が小さくなると, とくに式(20)の第2項の u, v のうちの $k+l=\pm 1$ となる項の分母が $\omega_0^2 - (\pm\omega_0 + mv)^2$ となって小さくなる。したがって, u, v の値は大きくなる。そこで, $k+l=\pm 1$ となる項のみ用いて, u, v を計算すると次式がえられる。

$$\begin{aligned}
u &= a\omega_0(1+3Fa^2\omega_0^2/4)(M_2S_{-102}-M_1S_{102})/4 \\
v &= a\omega_0(1+3Fa^2\omega_0^2/4)(M_1C_{102}+M_2C_{-102})/4 \\
&\dots\dots\dots (21)
\end{aligned}$$

ここで, $M_1=1+(-1)^{m'}$, $M_2=1-(-1)^{m'}$ m' が奇数のとき, 式(21)を用いて, w を計算すると,

$$\begin{aligned}
w &= Ra \sin(\omega_0 t + n\varphi + \phi) - R\epsilon\bar{A} \cos[(\omega_0 - 2n\Omega)t \\
&- n\varphi + \phi]/[\omega_0^2 - (\omega_0 - 2\nu)^2] \dots\dots\dots (22)
\end{aligned}$$

ここで, $\bar{A}=a\omega_0(4+3Fa^2\omega_0^2)/8$

式(22)の第1項は角振動数 ω_0 の後退波であり, 第2項は角振動数 $\omega_0 - 2n\Omega$ の進行波である。 ν が小さくなるにつれ, 第2項の進行波成分が第1項の後退波成分と同じ大きさになって静止モードになる。

m' が偶数のとき, 円板の振動変位は

$$\begin{aligned}
w &= -Ra \sin(\omega_0 t - n\varphi + \phi) \\
&+ R\epsilon\bar{A} \cos[(\omega_0 + 2n\Omega)t \\
&+ n\varphi + \phi]/[\omega_0^2 - (\omega_0 + 2\nu)^2] \dots\dots\dots (23)
\end{aligned}$$

と表され, 第1項は進行波, 第2項は後退波である。

図5は3 rpmと60 rpmについて, 回転座標系(r_0, φ)および静止座標系(r_0, θ)における円板の振動変位を計算した結果を示す。静止座標系の w は式(22)の φ に $\theta - \Omega t$ を代入することによってえられる。また, この計算には $\mu_0=1.69$, $\mu_1=-5.5 \times 10^{-3}$ s/cm, $\mu_2=1.0 \times 10^{-7}$ s³/cm³, $V=70$ cm/s, $C=8.0$ s⁻¹を用いた。3 rpmでは, 回転座標系の w は1/2回転に四つの山をもつ(4-0)モードに一致し, 静止座標系ではほぼ一定の振幅で円板は静止モードで振動しているのがわかる。高回転の60 rpmでは, 式(22)の第2項が無視でき, 両座標系の w がともにほぼ振幅一定の後退波である。

このように円板の振動を回転座標系によって解析すると, 実験結果にほぼ一致する結果がえられる。しかし, 回転座標系では ν が小さくなると式(7)の第2項の u, v が大きくなり, さらに, 高次項を考慮する必要があり, 理論解析が複雑になる。そこで, 3・2節では, 静止座標系によって, ν が小さいときの回転円板の振動を考える。

なお, 不安定解である解(II), (III), (IV)は回転数が高くなると, いずれも回転モード成分になる。

3・2 静止座標系 Nighら⁽⁶⁾, 末岡ら⁽⁴⁾が解析しているように空間に固定された静止座標系(r, θ)では式(1)に相当する円板の運動方程式は次式のように表される。

図5 回転および静止座標系における円板の振動変位の計算波形

$$D^4 w + c \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w + \frac{r h}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 w$$

$$= [\mu(v_r) - \mu(V)] P_0 \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)$$

$$\dots\dots\dots (24)$$

ここで, $v_r = V - (\partial w / \partial t + \Omega \partial w / \partial \theta)_{r_0, \theta_0}$

円板と鋼棒の接触点 (r_0, θ_0) を $\theta_0 = 0$ として, 3・1 節に述べた方法と同じようにして, 式(6)に相当する次式がえられる.

$$\ddot{A} + \omega_0^2 A = -C\dot{A} + C\nu B + 2\nu\dot{B} + \nu^2 A = f_A$$

$$\ddot{B} + \omega_0^2 B = \varepsilon[-\dot{B} - \nu A + E(\dot{B}^2 + \nu^2 A^2 + 2\dot{B}A\nu) - F(\dot{B}^3 + 3\nu^2 A^2 \dot{B} + 3\nu A \dot{B}^2 + \nu^3 A^3)]$$

$$- C\dot{B} - C\nu A - 2\nu\dot{A} + \nu^2 B = f_B \dots\dots\dots (25)$$

式(6)では右辺の非線形項は $\dot{A}, \dot{B}$ のみの関数であったが, 式(25)では $A, B, \dot{A}, \dot{B}$ の関数である. したがって, 角振動数は ω_0 と異なり変化する. この角振動数を ω とする. すなわち, 式(7)における $\phi, \bar{\phi}$ は $\phi = \omega t + \phi, \bar{\phi} = \omega t + \bar{\phi}$ とおく. 式(25)を次のように書き換える.

$$\ddot{A} + \omega^2 A = (\omega^2 - \omega_0^2) A + f_A$$

$$\ddot{B} + \omega^2 B = (\omega^2 - \omega_0^2) B + f_B \dots\dots\dots (26)$$

式(26)から, 式(14)と同様に次式がえられる.

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2\omega} (Caw - C\nu b \sin \Theta - 2\nu b \omega \cos \Theta)$$

$$a \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2\omega} [(\nu^2 + \omega^2 - \omega_0^2)a + C\nu b \cos \Theta - 2\nu b \omega \sin \Theta]$$

$$\frac{db}{dt} = -\frac{\varepsilon}{8\omega} [4(b\omega - \nu a \sin \Theta) + 3F(b^3\omega^3 + 2\nu^2 a^2 b\omega - \nu^2 a^2 b\omega \cos 2\Theta - 3\nu a b^2 \omega^2 \sin \Theta - \nu^3 a^3 \sin \Theta) + \frac{4}{\varepsilon} (Cb\omega - C\nu a \sin \Theta + 2\nu a \omega \cos \Theta)]$$

$$b \frac{d\bar{\phi}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{8\omega} \{-4\nu a \cos \Theta + 3F\nu a \cos \Theta (2\nu a b \omega \sin \Theta - b^2 \omega^2 - \nu^2 a^2) + \frac{4}{\varepsilon} [(\nu^2 + \omega^2 - \omega_0^2)b - C\nu a \cos \Theta - 2\nu a \omega \sin \Theta]\} \dots\dots\dots (27)$$

式(27)の右辺を零とおくことによって, a, b, ω, Θ の定常解を求めることができる.

一例として, 図6は(4-0)モード, $P_0 = 29.4 \text{ N}$ について Ω に対する a, b, ω, Θ の定常解を計算した結果である. なお, Θ については $-\pi/2 < \Theta < \pi/2$ の範囲のみ示している. 図6のように次の2種類の解がえられた.

$$(A) \quad \omega \approx \omega_0, \quad \sin \Theta \approx 0 \dots\dots\dots (28)$$

$$(B) \quad a = b, \quad \sin \Theta \rightarrow \pm 1$$

Ω が小さいとき, 解(A)は安定で, 末岡らの解⁽⁴⁾ [式(25)の右辺の A, B を含む項を無視するとえられる.]

$$a = \frac{2\nu b}{C}, \quad b = \sqrt{-\frac{4}{3F\omega^2} \left(1 + \frac{C}{\varepsilon} + \frac{4\nu^2}{\varepsilon C} \right)}$$

にほぼ等しい値である. この解は $\nu \approx n\Omega > C/2$ になると不安定になる. 解(A)が不安定になると同時に回転

(a)

(b)

(c)

(d)

図6 Ω に対する a, b, ω および Θ の定常解の計算結果

図7 計算による各位置における円板の振動変位

座標系の解(V) $a=b=\sqrt{-4C^*/3F\omega_0^2}$ にほぼ等しい安定な解(B)がえられる。このとき θ は $\pi/2$ あるいは $-\pi/2$ に近づき、 ω は Ω が大きくなるにつれて、図6(d)に示すように $\omega_0 - n\Omega$ あるいは $\omega_0 + n\Omega$ に近づく。これは回転座標系で考えた式(22), (23)の第1項の ϕ に $\theta - \Omega t$ を代入したときの角振動数に一致する。

次に、式(7)の u, v について検討する。 $u=0$ であり、 v (式省略) は式(25)が自律系であるので a, b に比べて非常に小さく(計算結果では a, b の値より約 10^{-3} 小さい)、円板の振動変位を考える場合、 v は無視して、 a, b のみ考えればよい。

円板の振動モードについて考える。解(A)の場合、 $\sin \theta \approx 0$ から $r=r_0$ における w は

$$w = R\sqrt{a^2 + b^2} \sin(n\theta \pm \bar{\theta}) \cos \psi \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $\bar{\theta} = \tan^{-1}(b/a)$, $+$: $\theta \approx 0$, $-$: $\theta \approx \pi$

となって、空間に固定された静止モードである。解(B)の場合、 θ が $\pi/2$ あるいは $-\pi/2$ に近づくにつれて、進行波あるいは後退波に近いモードとなる。しかし、 Ω が小さい $\Omega/2\pi \approx 0.2$ Hz では、 $\theta = \pi/4$ であり、円板の振動モードは静止モードと後退波あるいは進行波が混在したモードとなる。なお、式(25)を直接 Runge-Kutta-Gill 法で計算した結果においても解(A), (B)を確認した。

3.3 実験結果との比較検討 両座標系による理論解析から、低回転では静止モードの解が、回転が高くなるにつれて、後退波あるいは進行波の解がそれぞれ安定解としてえられることが明らかになった。

図7は15, 60 rpmについて、後退波が生ずる場合の各位置における円板の振動変位を計算した結果を示す。図3(c), (e)と比較して、両者はほぼ一致している。また、回転数に対する摩擦点(0°)における円板の

図8 各位置における円板の振動変位(進行波が生ずる実験結果, 鋼棒の長さ 57.5 cm)

振幅の変化を計算した結果を前述の図4に実線で示しているが、実験結果と同じような傾向を示している。

しかしながら、理論解析では、進行波、後退波ともに安定解となるが、実験では鋼棒の長さ 60 cm に対しては後退波のみ発生する。いずれの波が発生するかは鋼棒の振動によって決定されと考えられる。進行波が発生する例として、鋼棒の長さが 57.5 cm の場合の円板の変位を図8に示す。このことについては、今後詳細に円板と鋼棒の連成を考慮して検討する。また、実験では高回転において、過渡状態で円板が後退波をとめた回転モードのスキールを発生している場合が多い。3.1節で検討された解(II), (III), (IV)はいずれも不安定解であるが、円板の振動モードが回転モードになる解である。したがって、過渡状態でこれらの解が発生する可能性はある。しかし、このことについては、今後さらに検討する必要があると思われる。

4. 結 言

回転円板のスキールについて、実験的、理論的に検討した結果、次のような結論がえられた。

(1) 低回転では、従来の研究のように、ほぼ静止モードに近いスキールが発生するが、ある程度高い回転でも、進行波または後退波のスキールが発生する。いずれの波が発生するかは鋼棒の振動によって決定されと考えられる。また、進行波あるいは後退波の振幅は変動し、とくに過渡状態では、円板が回転モードに近い状態で振動するように振幅は変動する。

(2) 回転および静止座標系から、円板の摩擦振動を理論解析した結果、低回転で円板の振動モードが静止モードとなる解と高回転で進行波あるいは後退波が発生する解が安定解として存在し、実験結果とほぼ一致する。

(3) 回転座標系で考えた場合、高回転で円板の振

動モードが回転モードとなるような不安定解が存在し、実験結果と同様このようなスキールが過渡状態で発生する可能性がある。

文 献

(1) 中井・ほか2名, 機論, 47-423, C (昭56), 1466.

- (2) 中井・横井, 機論, 49-442, C (昭58), 1001.
 (3) 中井・横井, 機論, 50-455, C (昭59), 1214.
 (4) 末岡・ほか4名, 機論, 53-485, C (昭62), 21.
 (5) 吉武・ほか3名, 機論, 53-486, C (昭62), 364.
 (6) Nigh, G. H. and Olson, M. D., *J. Sound Vib.*, 77-1 (1981), 61.

討 論

〔質問〕 末岡 淳男〔九州大学工学部〕

貴論文の鳴き音は、摩擦係数の負のこう配が非常に大きく、荷重も大きい場合に生じる自励振動と考える。

(1) 回転円板のスキールが単一モードで発生するとされた理由は何か。

(2) 回転円板の Imperfection の影響は大きいと考える。円板に2 gの加速度ピックアップを付けておられるが、その影響はないと考えられないのではないか。

(3) 図2の波形の中にあるギザギザした突出部は、棒と円板が離れているためではないか。また、棒はどのように円板との掃引関係を一定に保たれたのか。

〔回答〕 本論文における鳴き音は理論的には解の安定条件を満足すれば発生し、鳴き音の発生条件は摩擦係数の負のこう配が非常に大きく、荷重も大きい場合に限定されない。

(1) 多自由度で回転円板について内部共振のない場合を検討した結果、定常状態で単一モードの解のみが安定となったことおよび実験でもほとんど単一モードの鳴き音が発生したことを考え、定常状態を論じた本報では、問題を理解しやすくするために単一モードで解析した。

(2) ご指摘のとおり、鳴き音の周波数付近を zooming して周波数分析すると、わずかに imperfection の影響がある。振動ピックアップを取り外して実験も行っているが、振幅がわずかに変化することを除いて鳴き音の特性は変化しなかった。

(3) 鋼棒と円板の離脱は電気回路でチェックしており、振幅が非常に大きくなると離脱する。しかし、図2の場合には離脱していない。波形のギザギザは間欠的よりむしろ周期的(約200 Hz)で、振幅が小さいときでも生じており、系全体の固有振動数によるものではないかと考えられる。鋼棒の掃引は当初モータによ

って行っていたが、鋼棒断面が比較的大きく掃引が困難なため手動で行い、移動速度を一定に保つために光センサによって移動速度をチェックし、一定速度のデータのみ採用している。しかし、移動速度が多少変化しても実験結果によれば、回転による鳴き音の特性は変化しなかった。

〔質問〕 木村 康治〔東京工業大学〕

(1) 2・2節実験結果に関して、鋼棒の移動距離を長くすると他のモードのスキールが混在して発生する現象は、本報の回転する円板の場合についても前報⁽²⁾と同様に観察されたのか。また、上記現象を、粗面上を転動する円板の接触共振振動と結びつけて考えることは可能か。非常に興味があるので、ご教示いただければ幸いである。

(2) 3・1節回転座標系を用いた理論解析において、摩擦係数に含まれる非線形モード連成部分についても、対象とする単一モードのみを採用されているが、これは、単一モードで発生するスキールに対しては、他のモードはほとんど影響しないと考えることによるものだろうか。

〔回答〕 (1) 回転円板のときも、鋼棒の移動距離が長くなると、鋼棒が他のモードの鳴き音が発生しやすい位置まで移動し、そのモードの鳴き音に移るまでの過渡状態のときは二つのモードが混在する。しかし、完全な鳴き音では、一つのモードの鳴き音になる。粗面上を転動する円板の場合、鳴き音は発生しないと思われるが、表面粗さが小さくなり、かつ、円板の軸方向に摩擦力が加わるとき、同じような現象が生ずる可能性があるように思う。

(2) 回転円板について多自由度で検討した結果、内部共振がない場合、単一モードの解のみが定常状態で安定となった。定常状態で、お説のとおり、他のモードの影響がないので、問題を理解しやすくするため、単一モードで解析した。