水平に張られたローラチェーンの非線形調和パラメトリック共振*

末岡 淳男^{*1}, 近藤 孝広^{*2}, 田中 亨^{*3}Nonlinear Harmonic and Parametric Resonances
of a Roller Chain Stretched Horizontally

Atsuo SUEOKA, Takahiro KONDOU, and Tohru TANAKA

Chain has a heavy weight and a high tension stiffness, which are distinctive feature different from that of string. This paper describes the nonlinear harmonic and parametric resonances of a roller chain stretched horizontally, which is regarded as a system with many degree of freedom, when the elongation of the chain during vibration is taken into account. The resonance treated in this report is one of the resonances excited by combined forcing and parametric excitations in which the ratio of the frequency of the forced lateral displacement acting at the left end to that of the tension fluctuation is 1:2. The vibration characteristics are computed for three kinds of chain and are compared with the ones obtained from the experiments. In particular the effect of the chain weight upon the resulting vibrations is considered. A fine agreement between experimental and analytical results was confirmed.

Key Words: Vibration, Nonlinear Vibration, Combined Forcing and Parametric Excitations, Roller Chain, Multi-Degree-of-Freedom System

1. 緒 言

著者らは、既報^{(1)~(4)}で垂直に張られたローラチェーンに横方向強制変位および張力変動が同時に作用する場合の非線形強制パラメトリック共振を実験的および多自由度系として解析的に取扱った。

チェーンのリンク個数が多くなると、弦としての取扱いや、ガレルキン法を用いた低次の固有モード展開による近似的な解析も可能であろう。しかし、ローラチェーンは元来多自由度系であるので、強い非線形振動を解析する場合には、とくに多自由度系に対する解を直接求めることが精度的に必要となる。

また、チェーンは弦と異なり、自重が大きき、かつ引張り剛性が高いことが大きな特徴であり、いろいろな配置で使用されている。そこで本報では、水平に張られたローラチェーン系における非線形強制パラメトリック共振を取扱い、強制変位と張力変動の振動数比が1:2で生じる共振を既報⁽⁵⁾⁽⁶⁾の手法で解析する。

さらに、3種類のチェーンを用いた実験を行い、解

析結果と比較するとともに、重力の影響を考察する。

記 号⁽¹⁾⁽³⁾

- A : 左端横方向強制変位振幅
- E_d : チェーン系の単位ひずみ当たりの縦弾性係数
- g : 重力加速度
- h_1 : リンク重心の並進運動に対する粘性摩擦係数
- h_2 : リンク重心回り回転運動に対する粘性摩擦係数
- h_3 : リンク間の相対すべりに対する粘性摩擦係数
- K : リンク形状パラメータ
- m : ピッチ当たりの質量
- N : リンク総数
- P : ピッチ長さ
- $q\omega$: 張力変動の円振動数
- $Q^-(1-K^2)/4$
- $R_k=(k \text{ 番めローラの最大両振幅})/2A$
- t : 時間
- T_f : 与えられた張力変動量 $=\Delta T \cos q\omega t$
- T_m : 初期張力
- y_k : 左端から k 番めローラの横変位 (上方を正)
- y_0 : 左端の強制変位量 $=A \cos(\omega t - \phi)$
- $Y_k=y_k/A (k=0, \dots, N-1)$

* 昭和63年8月24日 第951回講演会において講演、原稿受付 昭和63年1月25日。

^{*1} 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 正員、福岡工業大学 (〒811-02 福岡市東区和白東3-30-1)。

^{*3} 学生員、九州大学大学院。

付け加わっている。

使用したチェーンは JIS No. 50 (チェーン#1, $N=40$, $K=0.961$), そのピンとブシュの間の接触部にミニチュア玉軸受を組み込んだもの (チェーン#2, $N=40$, $K=0.961$) およびスパン長は前二者と等しいがピッチがそれらの4倍でミニチュア玉軸受入りの特製のもの (チェーン#3, $N=10$, $K=0.890$) である。

また, 前報⁽³⁾の1/3次分数調波パラメトリック結合共振の実験結果から, チェーンに作用する摩擦特性は摩擦係数 h_2 を用いて最もよく表されることが明らかになった。そこで, 本報でも摩擦の効果は h_2 のみを用いて計算した ($h_1, h_3=0$)。その h_2 の値は, 振幅が小さくへ跳躍する振動数が非常に一定している二次高調波共振の振幅特性の実験結果が計算結果とほぼ一致するように定めた。

本報では, 接触部のすきまの影響をできるだけ少なくするために, 初期張力を垂直方向の実験と比較して高く設定し, 静止チェーンへ与える水平方向引張張力をもって初期張力を近似した。

(1) まず, チェーン#3を用いた実験結果を示す。

図1(a)は $T_m=127$ N で図中のパラメータ値に対する単なる強制振動 ($\varepsilon=0$) の振幅特性の実験および計算結果である。 $\Omega \leq 1.5$ では, スパン中央ローラの振幅 R_5 , $\Omega \geq 1.5$ では, 1/4スパンローラの振幅 R_8 を振幅の代表として描いている。計算結果の内, 実線が安定, 破線が不安定であり, C_1 (実験値: $\bigcirc, \Delta$) および C_2 ($\bigcirc, \Delta$) は各々一次, 二次モードの調和振動, E ($\bullet$) および I は1/2次分数調波共振である。分枝 I の発生は確認できなかった。1/2次分数調波共振の計算結果は複雑さを避けるため安定分枝のみ図示している。1/2次分数調波共振付近の詳細な計算結果の拡大図を不安定分枝を含めて図中の右上に示す。

垂直に張られた摩擦の小さなチェーンの特性⁽¹⁾と異なる主なものは, $\Omega \geq 2.4$ で二次モードの調和振動分枝 (C_2) の途中から1/2次分数調波振動 (E) が分岐して発生し, 二次モード調和共振と1/2次分数調波共振が分離していない点である。すなわち, 強制振動数を徐々に上昇させる過程では, ある振動数で C_2 から E へ自然に移行⁽⁴⁾する。逆に十分に高い振動数で C_2 を発生させ, 徐々に振動数を降下させると, その $C_2 \rightarrow E$ 移行振動数よりもわずかに高いある振動数で C_2 から E への跳躍が見られる。よって, 分枝 C_2 には分枝途中で局所的に不安定領域が存在する (拡大図参照)。図中の矢印は移行または跳躍の方向を表す (以下同様)。この移行時には二次モードの調和共振から一次モードの1/2次分数調波共振へ変化する。この実験結果は計算

結果と一致する。

図1(b)は $\varepsilon=0.212$, $\phi=-45^\circ$ のときの図1(a)と同様な結果である。他のパラメータは図1(a)と同じである。低振動数側から二次高調波共振 A (実験値: $\blacktriangle$), 一次モードの調和パラメトリック結合共振 C_1 ($\bigcirc$), D_1 ($\bullet$), 二次モードの調和パラメトリック結合共振 C_2 ($\bigcirc$), D_2 ($\bullet$), 1/2次分数調波共振 E ($\bullet$), F ($\blacktriangle$), G ($\blacklozenge$) および H ($\blacktriangle$) である。

計算結果とは異なり, 実験では, 分枝 B と D_1 とはなめらかな一曲線とはなっておらず, ヒステリシスが

(a) 強制振動の振幅特性 ($\varepsilon=0$)

(b) 振幅特性 ($\phi=-45^\circ$)

(c) 張力変動特性 ($\phi=-45^\circ$)

図1 チェーン#3の実験結果と計算結果の比較 ($T_m=127$ N) (その1)

生じている。すなわち、振動数上昇時には $B(\diamond)$ から $D_1(\bullet)$ に跳躍する。振動数下降時には逆に D_1 から B への跳躍が上昇時より低い振動数で生じる。分枝 B 〔図 1(d)〕は張力波形における初期張力からの低下が著しいことから、この実験と解析結果の相違はピンとブッシュの接触部に組み込まれたミニチュア玉軸受のすきまに起因していると考えられる。チェーンが水平に引張られたとしても、自重のために静止時にはチェーンはカテナリーを描く、チェーンはその曲線をほぼ中心

として振動するため、振動過程で静止時よりも張力がかなり低くなることが生じ得る。そのため、長手方向の引張剛性が高いチェーンでは、初期張力や振幅が小さいと、とくに接触部のすきまの影響が問題となる。初期張力 T_m を小さくすることは、 σ を大きくすることと同等である。よって、パラメータ σ とすきまの影響は相関があり、 σ が大きいときにはすきまの影響も大きく現れると考えられる。

図 1(c) は張力変動特性である。複雑さを避けるため不安定分枝の計算結果を省略したところもある。

(d) 実験振動波形 ($\phi = -45^\circ$, カッコ内は Ω の値)

(e) 理論振動波形 ($\phi = -45^\circ$, カッコ内は Ω の値)

図 1 チェーン#3の実験結果と計算結果の比較 ($T_m = 127 \text{ N}$)(その2)

単なる強制振動と比較して二次高調波共振の発生、一次、二次モードともに2種類の調和パラメトリック結合共振の発生、および4種類の1/2次分数調波共振の発生が見られる。二次モードの調和パラメトリック結合共振と1/2次分数調波共振の分枝 C_2 と E, D_2 と F の各々の関係は図1(a)の C_2 と E の関係と同じである。一方、分枝 G および H は半島状に突き出た形で、二次モードの調和パラメトリック結合共振から分離して存在している。振動数を降下する過程で分枝 G から E へ、および分枝 H から F へと跳躍する。すなわち、 C_2 , E, G および D_2 , F, H は一つのグループ関係にある。これは各グループ内では強制変位に対する調和振動成分の位相差が類似しているためと考えられる。

また、分枝 E および F の振動モードは各々分枝 G および H とほぼ鏡像関係にあることから〔図1(h)参照〕、垂直に張られたチェーンで分枝 E と G および分枝 F と H が同一の非対称波形を有する分枝であったものが、水平に張られると各分枝が重力の影響のために少し異なる二つの分枝へと分離し、ここでは、一つは二次モードの調和パラメトリック結合共振の分枝から分岐し、他の一つはそれから分離して半島状分枝となったものと推察される。なお、図1(b), (c)の他の

パラメータは不変とし、 h_2 のみを小さくして $h_2 = 0.004$ 程度にすれば、分枝 E が半島状になり、分枝 G が C_2 から分岐することを計算結果から確認した。このように、分枝 E と G は摩擦の大きさの変化によって、分枝間結合の様相が反転する。

図1(d)および(e)は各分枝の実験波形および理論波形である。ともに上段から振動中の張力変動 (T_m : 初期張力位置, 上方为正), スパン中央ローラ変位, 1/4 スパンローラ変位, 強制変位である。計算結果と実験結果の両者の波形は非常に良い一致を示している。ただし、分枝 B および L は実験波形のみ示す。

図1(f)はチェーン#3の $\phi = 0^\circ$, $\varepsilon = 0.212$ の場合の振幅特性である。調和パラメトリック結合共振の分枝 B と C_1 間のわずかなヒステリシスが見られる。また、分枝 C_1 と D_1 および C_2 と D_2 は区別できない程度に重なっている。計算では1/2次分数調波共振 F が $\Omega \approx 2.7$ までしか存在していないが、実験では $\Omega > 3$ まで存在した。これは h_2 を 0.005 として計算すると、 $\Omega > 3$ まで存在することから、1/2次分数調波共振に対する摩擦係数 h_2 は計算値 0.008 よりも小さいと考えられる。

図1(g)はチェーン#3の $\phi = 45^\circ$, $\varepsilon = 0.212$ の場合の振幅特性である。図1(b)と同様に、調和パラメト

(f) 振幅特性 ($\phi = 0^\circ$)

(g) 振幅特性 ($\phi = 45^\circ$)

(h) 1/2次分数調波共振モードの時間経過 ($\Omega = 3$)

(1周期間を8等分し、時間経過の順に番号を付した)

図1 チェーン#3の実験結果と計算結果の比較 ($T_m = 127 \text{ N}$)(その3)

リック結合共振の一次モードに大きなヒステリシスが見られる。また、実験と計算結果が大きく異なる点は、実験でのみ一次の調和パラメトリック結合共振K(▽)が存在することである。この分枝Kは $\phi=0^\circ$ での分枝D₁に相当する。なぜならば、計算で他のパラメータは不変とし、 ϕ のみ 0° から 45° へ上げていくと、 $h_2=0.008$ では $\phi=20^\circ$ で分枝D₁は存在しなくなるが、 $h_2=0.002$ 以下では $\phi=45^\circ$ でも存在し、その波形は実験波形と非常によく似ているからである。

以上から、すべての分枝にわたって摩擦係数 h_2 に同じ値を用いた計算結果と実験結果は、すきまの影響もあり、良く一致しているとは言いがたい点もある。

図1(h)は図1(b)における4種類の1/2次分数調波共振の振動モードの計算結果を描いたものである。

垂直に張られた場合と比較して、強制パラメトリッ

(a) 強制振動の振幅特性 ($\varepsilon=0$)

(b) 振幅特性 ($\phi=45^\circ$)

(c) 張力変動特性 ($\phi=45^\circ$)

ク結合共振特性はあまり変化していないが、二次高調波共振や数多くの1/2次分数調波共振の発生など強制パラメトリック共振の様相はかなり変化する。両者の相違は、垂直に張られたときの共振が各々対称波形であるか非対称波形であるかに依存している。また、一自由度結合励振系⁽⁷⁾よりもかなり多様化している。

(2) 次に、チェーン#1の(1)と同様な実験結果を図2に示す。計算結果は安定分枝のみを実線で示す。チェーン#1は他の二つのチェーンと比較して摩擦が

(d) 実験振動波形 ($\phi=45^\circ$, カッコ内は Ω の値)

(e) 理論振動波形 ($\phi=45^\circ$, カッコ内は Ω の値)

図2 チェーン#1の実験結果と計算結果の比較 ($T_m=167\text{ N}$)(その1)

大きく、伸びに対する剛性が高い特徴がある⁽¹⁾⁽³⁾。

図2は初期張力が167 Nの結果である。図2(a)は単なる強制振動($\varepsilon=0$)の振幅特性(R_{20}, R_{30})である。一次の調和共振に $\Omega \approx 1.2$ での前述のすきまによる跳躍と、 $\Omega \approx 1.3$ での摩擦が大きいために生じる跳躍が見られる。分枝C₁内で前者の跳躍を生じているのは、チェーン#1はチェーン#3と比較して長手方向の剛性が非常に高いため、初期張力を高くしてもすきまの影響を小さくできないからだと考えられる。一方、二次モードには全く共振が見られない。

図2(b)は $\varepsilon=0.193$, $\phi=45^\circ$ の結果である。低振動数側から二次高調波共振A(▲), 一次および二次モードの調和パラメトリック結合共振C₁(○), C₂(○)および1/2次分数調波共振E(●)が観測されている。単なる強制振動と比較して、二次高調波共振、二次モードの調和パラメトリック結合共振および1/2次分数調波共振が新たに発生している。また、一次、二次調和パラメトリック結合共振分枝の低振動数側にすきまによる跳躍が見られる。 $h_2=0.035$ のとき、計算では1/2次分数調波共振は発生しなかったが、摩擦係数を小さくし、 $h_2=0.015$ 程度にすると図中の一点鎖線の領域で実験と類似した振動波形が確認された。さらに、計算では二次モードの調和パラメトリック共振が $\Omega \approx 2.6$

までしか存在していないことを考えると、チェーン#3と同様に、高次では実験結果に対応した摩擦係数 h_2 は0.035よりは小さいと考えられる。図2(c)は張力変動特性である。図2(d)および(e)は各分枝の実験および理論波形である。ただし、1/2次分数調波共振Eのみは実験と理論波形の h_2 と Ω が異なる。それ以外の各分枝の両者の波形は良い一致を示している。

図2(f)および(g)は各々 $\phi=0^\circ$ および -45° と変化したときの振幅特性である。図2(f)の1/2次分数調波共振(E)の計算結果は $h_2=0.015$ のものである。 ϕ

(f) 振幅特性($\phi=0^\circ$)

(g) 振幅特性($\phi=-45^\circ$)

図2 チェーン#1の実験結果と計算結果の比較 ($T_m=167$ N)(その2)

(a) 強制振動の振幅特性($\varepsilon=0$)

(b) 振幅特性($\phi=45^\circ$)

図3 チェーン#2の実験結果($T_m=147$ N)

図4 チェーン#3の振幅特性($T_m=98$ N)

図5 不規則的振動波形の例(チェーン#3, $\Omega=2.75$)

による振動特性の変化は理論と良い一致を示している。

(3) 最後に、チェーン#2の結果を示す。図3(a)は初期張力147 Nで $\varepsilon=0$ の振幅特性、図3(b)は $\varepsilon=0.205$, $\phi=45^\circ$ の場合の振幅特性である。チェーン#3の $\phi=45^\circ$ では、計算上は存在しなかった分枝 D_1 が、ここでは実験、計算結果とも存在している。チェーン#2はチェーン#1よりも摩擦係数、引張剛性とも小さく、振動特性はチェーン#3と非常に類似している。よって、チェーン系では、リンク個数 $N=10$ と40、すなわち、自由度9と39の相違は非線形振動特性への定性的な変化を与えないことが明らかになった。

(4) チェーン#3で初期張力を低くした場合の振幅特性の一例($T_m=98$ N, $\phi=-45^\circ$)を図4に示す。分枝Bと D_1 のヒステリシスが見られる。二次調和パラメトリック結合共振の分枝 Δ の左側に、この初期張力で $\varepsilon=0$ のときに比較的広く存在し、図1(a)でもわずかに存在していた、比較的小振幅の1/2次分数調波共振 $\blacklozenge$ が見られる。この共振の振動中の張力は部分的に初期張力よりもかなり低くなっていること、この共振が大きな σ に対して発生していることから、その発生は接触部のすきまに起因していると考えられる。

計算結果では分枝Hはほぼ $\Omega=3$ から、分枝Gは $\Omega=2.9$ から高振動数側に存在する。分枝E, GとC2との分枝間結合の対応関係が実験と計算結果とで逆となっている。しかし、図1(b)で説明したのと同様に、 h_2 を0.005にして計算すると、図4の実験結果と同じ対応関係が見られる。実験において分枝Iの発生は $\Omega \leq 3$ では確認されなかった。

初期張力が低いと一、二次調和パラメトリック結合共振を過ぎた右側の分枝(Δ)ですきまに起因した不規則的な振動を生じることがある。図4におけるこの

ような振動波形の一例を図5に示す。垂直に張られたチェーンの場合には見られなかった現象である⁽¹⁾。

(5) チェーン#3の強制パラメトリック共振の実験では、 $\Omega \geq 1.7$ で振動中の張力が初期張力よりかなり低くなることのある2/3次超分数調波共振 $L(\blacklozenge)$ が観測される。計算では、 $h_2=0.002$ 程度にすると、その発生を確かめることができる。この結果を図1、図4に一点鎖線で示す。その波形は実験と良い一致を示しているが、紙面の都合上、波形の表示は省略する。

(6) 摩擦係数 h_2 の値は低振動数側の二次高調波共振の実験結果を基準として定めたが、本報の全体の実験結果から考えて、少なくとも高振動数側の共振に対しては h_2 の値をやや小さめにするほうが計算結果と実験結果のより良い一致が図れる。また、一般に、すきまを考慮していない本解析では、チェーンの種類や発生分枝のうちで、すきまの影響が大きいものほど、 h_2 の値を実験から定めた値よりもかなり小さく取らなければ実験と計算結果の良い対応がとれない。

4. 結 言

水平に張られたチェーンに働く強制変位と張力変動の振動数比が1:2の場合の非線形強制パラメトリック共振を取扱い、前報⁽¹⁾の垂直に張られた場合と比較した。以下のようにまとめられる。

(1) 強制変位とパラメトリック励振の同時作用の影響は振動特性に垂直方向の場合とほぼ同様の多様化をもたらす。しかし、水平に張られている場合、垂直に張られている場合よりも偶数次の高調波共振、分数調波共振が発生しやすいこと、1/2次分数調波共振の発生する種類が非常に多くなることなどを確認した。

(2) 振動中の張力が部分的に初期張力よりもかなり低くなる振動モードに対しては、ローラ接触部のすきまの影響が生じてくる。

文 献

- (1) 末岡・ほか4名, 機論, 51-465, C (昭60), 912.
- (2) 末岡・ほか3名, 機論, 52-480, C (昭61), 2044.
- (3) 末岡・ほか3名, 文献(2)の2053ページ.
- (4) 末岡・ほか3名, 機論, 52-483, C (昭61), 2782.
- (5) 近藤・ほか2名, 機論, 51-466, C (昭60), 1180.
- (6) 田村・ほか3名, 機論, 52-473, C (昭61), 40.
- (7) Ness, D. J., Trans. ASME, Ser. E., 38-3 (1971), 585.
- (8) 末岡・田村, 機論, 46-410, C (昭55), 1217.

討 論

〔質問〕 佐藤 秀紀〔金沢大学工学部〕

(1) モードという言葉で振動様式を分類され、また、自由度9と自由度39との結果の定性的相異はないと述べられているが、解を線形モード展開で仮定し、ガレルキン法などを用いて解く手法との解析結果に現れる定性的相異は主にどのような点にあるとお考えか。

(2) 1/2次分数調波共振におけるIタイプの応答は他のEタイプ($\varepsilon \neq 0$ ではE, F, G, Hタイプに分かれるように理解したが)とは特性が異なるのであろうか。

(3) 二次モードに対する二次高調波共振は現れないのか。

〔回答〕 (1) ご指摘の手法による解析を実際に行っていないので、明らかなことは申し上げられないが、これまでの経験から以下のことが予想される。

(i) ガレルキン法を用いる場合、モード数をいかにとれば十分な精度の解が得られるか、また、 $N-1$ 個の全モードを用いた場合にも、本報で求めた非線形多自由度系の直接解と一致するかどうか定かでない。

(ii) 本報のように多様な振動特性を取扱う場合、二、三のモードによる近似解では本報の解との対応性および安定性に問題が生じると考えられる。

(2) 本報で示した計算結果、実験結果だけではIタイプの特性を明らかに示すことはできないが、一連の実験および計算結果から、IタイプはEタイプと異

付図 1

なり、

(i) C_2, D_2 と同一グループの分枝ではない。

(ii) パラメータが変化して、Iタイプの安定領域が広がってくると、二次モードの逆位相分枝($\Omega \geq 2.3$ の振幅の小さな分枝、実験値 Δ)と結合するようになる。

(iii) 実験的には、Iタイプの存在をチェーン#3, $T_m=98N$, $\varepsilon=0$ で確認している(付図1, 実験値 $\blacklozenge$)。解析的には、 σ の値を実際の設定値よりも大きく見積もってやれば、上記(ii)および分枝Jとの関連も説明できる。要するに、分枝I, Jはすきまの影響を受けやすい一対の分枝と考えられる。

(3) 実験では現れていない。解析的にも数値計算を試みたが、見いだしていない。