粘弾性層をもつ二層円筒曲板の減衰特性*
(真直辺が単純支持された曲板の場合)岡崎 明彦*¹, 浦田 喜彦*¹
大河内 禎一*¹, 立道 有年*²Damping Properties of Two-Layered Cylindrically Curved Plates
with an Unconstrained Viscoelastic Layer
(The Case of Curved Plates with Simply Supported Straight Edges)Akihiko OKAZAKI, Yoshihiko URATA,
Teiichi OOKOUCHI, and Aritoshi TATEMACHI

A theoretical study is presented for the damping of cylindrically curved plates with an unconstrained viscoelastic layer. Natural frequencies and loss factors of flexural vibration are calculated, using the equations of motion on the basis of the Flügge's shell theory. Boundary conditions considered in this paper are as follows: Straight edges are simply supported, and curved edges are simply supported, clamped, or free. It is found that the damping properties of a curved plate depend on the existence of extensional deformation in the datum surface of displacements. In the case of the inextensional deformation, the damping properties are similar to those of a flat plate. On the other hand, if the deformation is extensional, loss factor of a curved plate is smaller than that of a flat plate, and the decrease of the loss factor with bending depends on the aspect ratio, the ratio of thickness to length, mode of vibration and boundary condition.

Key Words: Vibration, Damping, Two-Layered Cylindrically Curved Plate, Unconstrained Viscoelastic Layer, Natural Frequency, Loss Factor

1. 緒 言

共振時の振幅の増大を抑えるために、金属板の表面を減衰特性の大きい粘弾性材で被覆して板全体の損失率を高める簡便な方法がある。このような処理を施した真直ばりや平板の減衰特性は古くから研究され、二層被覆材の損失率を η 、粘弾性材の損失率を η_e とすると、曲げ振動の損失率比 η/η_e は弾性層と粘弾性層のヤング率と厚さだけで定まり、境界条件や振動モードには依存しないことが知られている⁽¹⁾⁽²⁾。また、はりや平板が湾曲すると曲率に比例した伸びひずみが接線方向に新たに発生するため、二層円筒殻の軸対称振動の減衰特性は振動数や波長にも依存することが Markus によって指摘されている⁽³⁾⁽⁴⁾。しかし、曲りばり、円筒曲板、回転殻など円筒殻以外の曲面板を扱った研究例は見当たらない。これらの曲面板も構造部材として多用され、円筒殻と同様、減衰特性は真直ばりや平板の特性とは異なることが予想される。このため、これらの減衰特性を明らかにしておくことも制振技術上の一

つの課題として実用上重要と思われる。

そこで著者らは、前報⁽⁵⁾において、円弧状に湾曲した二層曲りばりの減衰特性を曲げ振動と縦振動の連成振動について解析的かつ実験的に検討して、曲りばりの減衰特性が境界条件や振動モードによって異なり、弾性層と粘弾性層の変位の従属関係を表すために定めた基準面の伸び変形の有無が特性の違いに関与することを明らかにした。すなわち、伸び変形を伴わない振動の減衰特性は上記の真直ばりの特性と同じであるのに対し、振動時に伸び変形が生ずると、損失率比は境界条件、振動次数、細長比および中心角にも依存するのである。特に後者の特性は、扱った5種類の境界条件(両端単純支持、両端固定、両端ピン支持、両端自由、固定-自由)のうち両端固定と両端ピン支持の対称振動のみに顕著に現れ、湾曲の増加に伴い損失率比は真直ばりの値に比して一時かなり低下する。

この曲りばりの結果から、二層の円筒曲板や回転殻の曲げ振動の減衰特性も伸び変形の有無によって異なることが予想され、伸び変形を伴わない振動の損失率比は、二層平板の結果⁽²⁾を用いて推定できるものと思われる。しかしながら、単層の円筒曲板や回転殻で伸びなし変形が生ずるのは自由端をもつ場合のごく一部の振動に限られるため⁽⁶⁾⁽⁷⁾、これらの曲面板の減衰特

* 昭和63年8月24日 第951回講演会において講演、原稿受付 昭和62年11月24日。

*¹ 正員、名古屋工業大学(〒466 名古屋市昭和区御器所町)。

*² 正員、愛知学院大学(〒470-01 愛知県愛知郡日進町大字岩崎字阿良池12)。

性も境界条件や振動モードごとに調べておくことが必要になる。

以上の趣旨から本論文では、円筒状に湾曲した二層曲板の曲げ振動について、伸び変形の有無による減衰特性の違いを調べるとともに、理論的に厳密に扱える境界条件を対象に減衰特性を数値的に検討した。扱った境界条件は、真直ぐな2辺が単純支持、湾曲した2辺が単純支持、固定および自由の3種類である。

2. 主 な 記 号

本論文で用いる主な記号は以下のとおりで、添字 $i(i=1, 2)$ によって層を区別する。

x, φ, z : 座標 (図1参照)

u_i, v_i, w_i : 層 i の中央面の x, φ, z 方向の変位

a_i : 層 i の中央面の半径

L : x 方向の辺長

H_i : 層 i の厚み

H : 平均厚み $= (H_1 + H_2)/2$

θ : 中心角

E_i, ν_i, ρ_i : 層 i のヤング率, ポアソン比, 密度

K_i : 層 i の伸び剛性 $= E_i H_i / (1 - \nu_i^2)$

D_i : 層 i の曲げ剛性

$= E_i H_i^3 / 12(1 - \nu_i^2)$

ξ : 辺長比 $= L/a_1 \theta$

ζ : 平均厚み対辺長比 $= H/a_1 \theta$

h : 厚み比 $= H_2/H_1$

e : 弾性パラメータ

$= E_2(1 - \nu_2^2) / E_1(1 - \nu_1^2)$

s : 密度比 $= \rho_2/\rho_1$

ω : 角振動数

η : 損失率

3. 解 析

3.1 振動方程式 図1に円筒状に湾曲した二層曲板を示す。層1が弾性層、層2が粘弾性層である。この二層曲板の振動方程式と境界条件式を、各層のひずみ-変位式に Flügge の式⁽⁸⁾を適用し、面外、面内および回転の慣性力を各層で考慮して Hamilton 原理を用いて導いた。図示の曲板のひずみエネルギー P と運動エネルギー T は、それぞれ次式で与えられる。

$$P = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_{-H/2}^{H/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{xi}^2 + \varepsilon_{\varphi i}^2 + 2\nu_i \varepsilon_{xi} \varepsilon_{\varphi i} + \frac{1 - \nu_i}{2} \gamma_{x\varphi i}^2) a_i d\varphi dx dz_i$$

$$T = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \rho_i \int_{-H/2}^{H/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} (u_i - z_i \frac{\partial w_i}{\partial x}) \right)^2 \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a_i - z_i}{a_i} v_i - z_i \frac{\partial w_i}{a_i \partial \varphi} \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] \\ \times a_i d\varphi dx dz_i$$

.....(1)

ただし、 u_i, v_i, w_i は各層の中央面の変位、また各層の中央面から z_i だけ離れた点のひずみ成分は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xi} &= \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{\varphi i} &= \frac{\partial v_i}{a_i \partial \varphi} - \frac{z_i}{a_i(a_i - z_i)} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi^2} - \frac{w_i}{a_i - z_i} \\ \gamma_{x\varphi i} &= \frac{a_i - z_i}{a_i} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{1}{a_i - z_i} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \\ &\quad - \left(\frac{z_i}{a_i} + \frac{z_i}{a_i - z_i} \right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial \varphi} \end{aligned} \right\}$$

.....(2)

ここで、変位成分の基準面の z 方向の位置を二層平板の中立面と同一位置に採り、層間にすべりがなく、各層のたわみ w_i が等しいことを仮定して、各層の中央面の変位 u_i, v_i, w_i を基準面の変位 u, v, w によって表すことにすれば、図2に示した幾何学的な関係から、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u - d \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2 = u + (H - d) \frac{\partial w}{\partial x} \\ v_1 &= \frac{a_1}{a} v - \frac{d}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \quad v_2 = \frac{a_2}{a} v + \frac{H - d}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ w_1 &= w, \quad w_2 = w \end{aligned} \right\}$$

.....(3)

ここに、 d は層1の中央面と基準面の距離、 H は層1と層2の中央面間の距離、 a は基準面の半径で

図1 二層円筒曲板と座標系

(a) x 方向 (b) φ 方向

図2 x 方向と φ 方向の変位

$$d = \frac{H_1}{2} - \frac{K_1 H_1 - K_2 H_2}{2(K_1 + K_2)}, \quad H = \frac{H_1 + H_2}{2},$$

$$a = a_1 + d$$

.....(4)

式(3)を式(1), (2)に代入したのち, Hamilton 原理を用いて変分計算を行えば, u, v, w を未知関数とする振動方程式と境界条件が得られる。

角振動数 ω の定常振動を仮定し, さらに

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (u, v, w)/H_1, \quad \bar{x} = x/L, \quad \bar{\varphi} = \varphi/\theta$$

.....(5)

$$\xi = \frac{L}{a_1 \theta}, \quad \zeta_i = \frac{H_i}{a_i \theta}, \quad h = \frac{H_2}{H_1}, \quad r_i = \frac{a_i}{a_1}$$

$$b_i = \frac{a_i + H_i/2}{a_i - H_i/2}, \quad e = \frac{E_2(1 - \nu_1^2)}{E_1(1 - \nu_2^2)}, \quad s = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho_1 H_1}{D_1}}, \quad \alpha_i = \frac{a_i}{a}, \quad \beta_1 = -\frac{d}{a\theta},$$

$$\beta_2 = \frac{H - d}{a\theta}$$

.....(6)

という記号を用いて無次元化すれば, 振動方程式は,

$(\quad)' = (\alpha_i/\xi) \partial(\quad)/\partial \bar{x}, (\quad)' = \partial(\quad)/\partial \bar{\varphi}$ として

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \{ \gamma_i [f_1 \bar{u}'' + f_3 \bar{u}'' + (f_2 + f_7) \bar{v}' + f_3 \bar{w}'' + (f_4 + f_8) \bar{v}'' + f_5 \bar{w}'] \\ & + \delta_i [f_1 \bar{u} + f_3 \bar{w}'] \} = 0 \\ & \sum_{i=1}^2 \{ \gamma_i [(f_2 + f_7) \bar{u}' + f_{13} \bar{v}'' + f_9 \bar{v}'' + f_{11} \bar{w}'' + (f_{10} + f_{14}) \bar{w}'' + f_{12} \bar{w}'] \\ & + \delta_i [f_{29} \bar{v} + f_{27} \bar{w}'] \} = 0 \\ & \sum_{i=1}^2 \{ \gamma_i [f_3 \bar{u}''' + (f_4 + f_8) \bar{u}''' + f_5 \bar{u}' + f_{11} \bar{v}''' + (f_{10} + f_{14}) \bar{v}''' + f_{12} \bar{v}' \\ & + f_{15} \bar{w}''' + (2f_{16} + f_{22} + f_{25}) \bar{w}''' + f_{18} \bar{w}''' + 2f_{17} \bar{w}'' + 2f_{19} \bar{w}'' + f_{26} \bar{w}] \\ & + \delta_i [f_3 \bar{u}' + f_{27} \bar{v}' + f_{15} \bar{w}'' + f_{28} \bar{w}'' - f_1 \bar{w}] \} = 0 \end{aligned} \right\}$$

.....(7)

ただし, γ_i と $\delta_i (i=1, 2)$ は

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = eh$$

$$\delta_1 = \frac{\xi_1^2}{12\xi^4} \Omega^2, \quad \delta_2 = sh \frac{\xi_1^2}{12\xi^4} \Omega^2$$

係数 f_1, f_2, f_3 等は付録に示した。

また, 面内力 $N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}$, せん断力 Q_x, Q_φ , 曲げモーメント M_x, M_φ およびねじりモーメント $M_{x\varphi}, M_{\varphi x}$ は

$$\bar{N} = \frac{1}{K_1 \xi_1} N, \quad \bar{Q} = \frac{1}{K_1 \xi_1} Q, \quad \bar{M} = \frac{1}{K_1 H_1} M$$

によって無次元化して示すと

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \bar{N}_x \\ \bar{N}_\varphi \end{aligned} \right\} &= \sum_{i=1}^2 \gamma_i \left[\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} f_1 \\ f_2 \end{aligned} \right\} \bar{u}' + \left\{ \begin{aligned} f_2 \\ f_3 \end{aligned} \right\} \bar{v}' + \left\{ \begin{aligned} f_3 \\ f_{10} \end{aligned} \right\} \bar{w}'' \\ &+ \left\{ \begin{aligned} f_4 \\ f_{11} \end{aligned} \right\} \bar{w}'' + \left\{ \begin{aligned} f_5 \\ f_{12} \end{aligned} \right\} \bar{w} \end{aligned} \right] \\ \left\{ \begin{aligned} \bar{N}_{x\varphi} \\ \bar{N}_{\varphi x} \end{aligned} \right\} &= \sum_{i=1}^2 \gamma_i \left[\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} f_7 \\ f_8 \end{aligned} \right\} \bar{u}' + \left\{ \begin{aligned} f_{30} \\ f_7 \end{aligned} \right\} \bar{v}' + \left\{ \begin{aligned} f_{31} \\ f_8 \end{aligned} \right\} \bar{w}' \end{aligned} \right] \\ \left\{ \begin{aligned} \bar{M}_x \\ \bar{M}_\varphi \end{aligned} \right\} &= - \sum_{i=1}^2 \gamma_i \left[\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} f_3 \\ f_4 \end{aligned} \right\} \bar{u}' + \left\{ \begin{aligned} f_{10} \\ f_{11} \end{aligned} \right\} \bar{v}' + \left\{ \begin{aligned} f_{15} \\ f_{16} \end{aligned} \right\} \bar{w}'' \\ &+ \left\{ \begin{aligned} f_{18} \\ f_{19} \end{aligned} \right\} \bar{w}'' + \left\{ \begin{aligned} f_{17} \\ f_{19} \end{aligned} \right\} \bar{w} \end{aligned} \right] \\ \left\{ \begin{aligned} \bar{M}_{x\varphi} \\ \bar{M}_{\varphi x} \end{aligned} \right\} &= - \sum_{i=1}^2 \gamma_i \left[\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} f_{20} \\ f_{23} \end{aligned} \right\} \bar{u}' + \left\{ \begin{aligned} f_{21} \\ f_{24} \end{aligned} \right\} \bar{v}' + \left\{ \begin{aligned} f_{22} \\ f_{25} \end{aligned} \right\} \bar{w}' \end{aligned} \right] \\ \bar{Q}_x &= \bar{M}_x + \bar{M}_{\varphi x} - \sum_{i=1}^2 \delta_i (f_3 \bar{u} + f_{15} \bar{w}') \\ \bar{Q}_\varphi &= \bar{M}_\varphi + \bar{M}_{x\varphi} - \sum_{i=1}^2 \delta_i (f_{27} \bar{v} + f_{28} \bar{w}') \end{aligned} \right\}$$

.....(8)

3.2 解 以後の議論はすべて無次元形で進めるが, 簡単化のため無次元量を表すバーは省略する。ここでは, $\varphi = \pm 1/2$ の真直ぐな 2 辺 (真直辺と呼ぶ) の境界条件については, 厳密解が得られる単純支持だけを考える。この場合, n を φ 方向の半波数として

$$\left. \begin{aligned} u &= U(x) \sin n\pi(\varphi + 1/2) \\ v &= V(x) \cos n\pi(\varphi + 1/2) \\ w &= W(x) \sin n\pi(\varphi + 1/2) \end{aligned} \right\} \text{.....(9)}$$

とおくと, 式(9)は $\varphi = \pm 1/2$ で次の単純支持の条件を満足する。

$$u = N_\varphi = w = M_\varphi = 0 \text{.....(10)}$$

したがって, 式(9)を式(7)に代入すれば, 振動方程式は $U(x), V(x), W(x)$ を未知関数とする定数係数連立常微分方程式になり, $U(x) = U \exp(\lambda x)$, $V(x) = V \exp(\lambda x)$, $W(x) = W \exp(\lambda x)$ において, 次の解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} U(x) &= \sum_{j=1}^4 U_j (A_j \sinh \lambda_j x + B_j \cosh \lambda_j x) \\ V(x) &= \sum_{j=1}^4 V_j (A_j \cosh \lambda_j x + B_j \sinh \lambda_j x) \\ W(x) &= \sum_{j=1}^4 (A_j \cosh \lambda_j x + B_j \sinh \lambda_j x) \end{aligned} \right\} \text{.....(11)}$$

ここに, A_j と $B_j (j=1 \sim 4)$ は定数, λ_j は, 振動方程式から $U(x)$ と $V(x)$ を消去して得られる 8 階線形微分方程式の特性方程式の絶対値が異なる四根, また U_j と V_j は λ_j に対応して振動方程式から定まる定数である。

3.3 振動数方程式 前述のとおり真直辺の境界条件は単純支持とし, $x = \pm 1/2$ の湾曲した 2 辺 (湾曲辺と呼ぶ) の境界条件として単純支持, 固定および自

由の場合を検討した。以後、湾曲辺の境界条件が単純支持の板を周辺単純支持板、固定の板を固定-単純支持板、自由の板を自由-単純支持板と呼ぶことにする。 $x = \pm 1/2$ における単純支持、固定、自由の各条件を示すと

$$\left. \begin{array}{l} \text{単純支持: } N_x = v = w = M_x = 0 \\ \text{固 定: } u = v = w = w' = 0 \\ \text{自 由: } N_x = N_{x\varphi} - \alpha_1 \theta M_{x\varphi} \\ \quad = Q_x + \alpha_1 M_{x\varphi} = M_x = 0 \end{array} \right\} \dots\dots (12)$$

式(9), (11)を式(12)に代入すれば, $A_1 \sim A_4$ と $B_1 \sim B_4$ を未知数とする同次の連立一次方程式が得られ, その8次の係数行列式を零に等置したものが振動数方程式になる。ただし, 対辺の境界条件が同じであれば, 振動を対称形と反対称形に分けて扱うことができ, 式(11)では定数 A_j の掛かる項が対称振動の解, 定数 B_j の掛かる項が反対称振動の解を表すため, 振動数方程式は4次の行列式の形で得られる。

3・4 損失率 減衰は粘弾性層のみで生ずるものとして, 減衰効果を表す損失率 η をひずみエネルギーから求める。二層曲板のある振動モードの全ひずみエネルギーの1周期中の最大値を P , 各層のひずみエネルギーを $P_i (i=1, 2)$, 粘弾性材単体の損失率を η_E とすれば, $\eta P = \eta_E P_2$ の関係が成立するため

$$\eta/\eta_E = P_2/(P_1 + P_2) \dots\dots\dots (13)$$

となる。 P_1, P_2 を無次元形で示すと

$$\begin{aligned} P_i = & \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} r_i \{ r_i (u_i')^2 + \frac{\zeta_i^2 r_i^2}{12} (2\theta u_i' \\ & + r_i w'') w'' + 2v_i [(v_i' - \theta w) u_i' \\ & + \frac{\zeta_i^2 r_i}{12} (\theta v_i' + w'') w'' + \frac{1}{r_i} (v_i')^2 \\ & + \left(\frac{\ln b_i}{\zeta_i r_i \theta} - \frac{1}{r_i} \right) \left(\frac{1}{\theta^2} w'' + 2w \right) w'' \\ & + \frac{\theta}{r_i} \left(\frac{\ln b_i}{\zeta_i} w - 2v_i \right) w \\ & + \frac{1 - \nu_i}{2} \left[\left(1 + \frac{\zeta_i^2 \theta^2}{4} \right) r_i (v_i')^2 + \frac{\ln b_i}{\zeta_i r_i \theta} (u_i')^2 \right. \\ & + \left\{ \frac{\zeta_i^2 r_i}{4} + \frac{r_i}{\theta^2} \left(\frac{\ln b_i}{\zeta_i \theta} - 1 \right) \right\} (w')^2 + 2u_i v_i' \\ & \left. + \frac{\zeta_i^2 r_i \theta}{2} v_i w' - \frac{2}{\theta} \left(\frac{\ln b_i}{\zeta_i \theta} - 1 \right) u_i w' \right] \} d\varphi dx \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

ただし,

$$u_i = u + \frac{\beta_i}{\alpha_1} w', \quad v_i = \alpha_1 v + \beta_i w'$$

4. 数 値 的 検 討

弾性層中央面の φ 方向の長さ $a_1 \theta$ に対する平均厚み H の比を二層曲板の平均厚み対辺長比 ζ として,

$\zeta = H/a_1 \theta$ とおけば, 式(7), (8), (14)に含まれる無次元量 $r_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, b_i$ は, 例えば

$$r_2 = 1 + \zeta \theta, \quad \zeta_1 = \frac{2\zeta}{1+h}, \quad \zeta_2 = \frac{2\zeta h}{(1+h)(1+\zeta \theta)}$$

$$\alpha_1 = \left[1 + \frac{\zeta \theta}{1+h} \left(1 - \frac{1 - eh^2}{1 + eh} \right) \right]^{-1}$$

のように, すべて平均厚み対辺長比 ζ , 厚み比 h , 弾性パラメータ e と中心角 θ を用いて表すことができる。したがって, ζ, h, e, θ のほか, 辺長比 ξ , ポアソン比 ν_1, ν_2 および密度比 s の計8個の無次元量と φ 方向の半波数 n の値を定めれば, 無次元振動数 Ω と損失率比 η/η_E が求められる。

以下では, 振動時の変形状態が基準面にひずみを伴わない伸びなし変形のときの減衰特性をまず考察し, その後, 3・3節で述べた3種の境界条件について, φ 方向の辺長を一定 (無次元量では $\zeta = \text{一定}$) として中心角 θ を変化させたときの振動減衰特性を示す。

計算に用いた無次元量は, 次のとおりである。

$$\zeta = 0.005 \sim 0.04, \quad h = 1, \quad e = 0.01$$

$$\theta = 0^\circ \sim 180^\circ, \quad \xi = 0.25 \sim 4$$

$$\nu_1 = 0.3, \quad \nu_2 = 0.4, \quad s = 0.18$$

ただし, ポアソン比 ν_1, ν_2 と密度比 s の値は, 弾性層に軟鋼, 粘弾性層に硬質塩化ビニルを用いたときの値を代表値とした。

ところで, 本論文の振動方程式では面外と回転の慣性力のほかに面内の慣性力も考慮されている。このため, 上記の8個の無次元量と振動モードを指定したうえで3個の振動数が求められるが, 以下では各モードについて最も低い振動数の振動に限定して結果を述べる。なお結果の妥当性は, 振動数方程式から求めた振動数が二層板のひずみエネルギーと運動エネルギーをもとにレーレー商から求めた振動数と十分な精度で一致することを確認検証した。

4・1 伸びなし変形の減衰特性 振動時の基準面の変形状態がひずみを伴わない伸びなし変形であれば, 曲板の損失率比 η/η_E も, 平板と同様, 次式によって求められる。このことを損失率比の計算式(13), (14)を用いて説明する。

$$\frac{\eta}{\eta_E} = \frac{eh[h^2(1+eh)^2 + 3(1+h)^2]}{(1+eh)[(1+eh)(1+eh^3) + 3eh(1+h)^2]} \dots\dots\dots (15)$$

まず, 式(14)に含まれる無次元量 $r_i, \zeta_i, \alpha_i, \beta_i, b_i$ を ζ, h, e, θ を用いて表したのち, 式中の ζ を分母に含む係数と対数項 $\ln b_i$ を ζ のべき級数に展開して ζ^3 以上の項を無視すれば, 式(14)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
P_1 = & \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} [F_1 u' + F_2 (\dot{v} - \theta w) \\
& + F_3 (\dot{v} + \dot{u}) + F_4 w''] d\varphi dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\xi^2}{c_2^2} \{ c_1^2 (\theta \dot{v} + \dot{w})^2 \\
& + \frac{1}{12} (\theta^2 w + \dot{w})^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \left[\frac{1}{12} (\theta \dot{u} - \dot{w}')^2 \right. \\
& \left. + \left(4c_1^2 + \frac{1}{4} \right) (\theta \dot{v}' + \dot{w}')^2 \right] \} d\varphi dx \quad \dots\dots\dots (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2 = & \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} eh [F_5 u' + F_6 (\dot{v} - \theta w) \\
& + F_7 (\dot{v} + \dot{u}) + F_8 w''] d\varphi dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} eh \frac{\xi^2}{c_2^2} \{ (c_1^2 - 2c_1 c_2) \\
& \times (\theta \dot{v} + \dot{w})^2 + \left(c_2^2 + \frac{h^2}{12} \right) (\theta^2 w + \dot{w})^2 \\
& + \frac{1-\nu_2}{2} \left[\left\{ 4(c_1 - c_2)^2 + \frac{h^2}{4} \right\} (\theta \dot{v}' + \dot{w}')^2 \right. \\
& \left. + \frac{h^2}{12} (\theta \dot{u}' - \dot{w}')^2 \right] \} d\varphi dx \quad \dots\dots\dots (17)
\end{aligned}$$

ただし,

$$c_1 = \frac{eh(1+h)}{2(1+eh)}, \quad c_2 = \frac{1+h}{2}$$

また $F_1 \sim F_8$ は, $\xi, h, e, \theta, \xi, \nu_1, \nu_2$ および u, v, w の関数である.

ここで, 基準面の変位 u, v, w が伸びなし変形の条件⁽⁶⁾

$$u' = 0, \quad \dot{v} - \theta w = 0, \quad \dot{v} + \dot{u} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

を満足する場合を考える. このとき, w は x について零次または 1 次の関数であるため⁽⁶⁾

$$w'' = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

となる.

したがって, 基準面に伸び変形を伴わない振動では, 式(16)と式(17)の右辺第 1 項の積分値はともに零になる. 右辺第 2 項の積分値に対して式(18)の関係を考慮し, さらに $\nu_1 = \nu_2$ と近似すれば, 式(13)より式(15)が得られ, 伸びなし変形の η/η_E は弾性パラメータ e と厚み比 h のみで定まる.

図 3 w の x 方向分布

一方, 伸び変形が生ずる場合には, 式(18), (19)は満足されない. このため, 式(16), (17)の右辺第 1 項の積分値も P_1, P_2 の値に関係し, $\nu_1 = \nu_2$ としても, η/η_E は e, h のほか ξ, θ, u, v, w の各値に依存する. したがって, 基準面に伸び変形が生ずる場合の減衰特性は, 境界条件や振動モードごとに調べる必要がある.

4.2 自由-単純支持板 湾曲辺が自由の単層円筒曲板では, $u(x)=0, v(x)=一定, w(x)=一定$ となる振動や $u(x)=一定, v(x)=-x, w(x)=x$ となる振動があり, これらの変形状態は中央面にひずみを伴わない伸びなし変形であることが知られている⁽⁶⁾.

二層の円筒曲板でもこのような振動が生じ, 図 3 (a) に示す $m=1$ モードが前者, $m=2$ モードが後者の振動にそれぞれ対応している. 一方, $m=3, 4$ モードは $w(x)$ が両端自由はりの曲げ振動の 1 次と 2 次の固有モードと類似な振動で, これらは伸びなし変形の条件を満足していない. このため, 自由-単純支持板の振動減衰特性は, 下記のように x 方向の振動モードによって著しく異なるのである.

図 4, 5 に, 自由-単純支持板の振動数 Ω と損失率比 η/η_E の中心角 θ に対する変化を示した. 板は $\xi=0.01, \xi=1, h=1, e=0.01$ の正方形板で, $\theta=0^\circ$ は二層

図 4 自由-単純支持板の Ω と θ および振動モードとの関係

図 5 自由-単純支持板の η/η_E と θ および振動モードとの関係

平板, θ の増加は湾曲の増大を表す。また, n は 3・2 節で述べた φ 方向の半波数であり, m は自由-単純支持板と後述の固定-単純支持板では $m-1$ が x = 一定の節線の数, 周辺単純支持板では x 方向の半波数を表す (図 3 参照)。

図示のとおり, 伸び変形を伴わない $m=1, 2$ モードの振動では, 中心角 θ が増加しても振動数 Ω と損失率比 η/η_E の値はほぼ一定で, とくに η/η_E は m, n の値にもほとんど依存していない。この特性は, 両端が単純支持された二層曲りばりの特性と同じで, 辺長比 ξ や平均厚み対辺長比 ζ の値が異なる場合も, η/η_E の値にはほとんど変わりはない。

一方, 伸び変形を伴う $m=3, 4$ モードの振動数 Ω と損失率比 η/η_E は, 中心角 θ の増加とともにかなり変化する。 θ が増加すれば, Ω は増大し, η/η_E は減少する。 η/η_E は振動モード (m, n) によっても異なり, n の値が小さいモードほど, わずかな湾曲によって急減する。また, 辺長比 ξ や平均厚み対辺長比 ζ の値が異なれば, 後述の周辺単純支持板や固定-単純支持板と同様に, η/η_E の値も異なる。

4・3 周辺単純支持板と固定-単純支持板 周辺単純支持と固定-単純支持の曲板では, 振動モードに関

係なく振動時に伸び変形を伴う。このため, これらの板の損失率比 η/η_E は, 弾性パラメータ e と厚み比 h のほかに中心角 θ , 振動モード (m, n) , 辺長比 ξ および平均厚み対辺長比 ζ の各値にも依存する。

図 6, 7 には, 周辺単純支持板と固定-単純支持板の $m=1, n=1 \sim 4$ および $m=1 \sim 4, n=1$ の各モードの損失率比 η/η_E の中心角 θ に対する変化を示した。板は $\zeta=0.01, \xi=1, h=1, e=0.01$ の正方形板である。自由-単純支持板の $m=3, 4$ モードの特性と同様, 周辺単純支持板と固定-単純支持板の η/η_E は, 中心角 θ の増加とともに減少する。また, η/η_E の値は境界条件や振動モードごとに異なる。

図 8, 9 は, 図 6, 7 に対応する振動数曲線である。周辺単純支持板と固定-単純支持板の振動数 Ω は, 中心角 θ の増加とともに一般に大きくなり, 湾曲に伴う増加量は n の値が小さいモードほど大きい。このため, θ が増加すると, 最小振動数モードは $(m, n)=(1, 1)$ モードから $(1, 2), (1, 3)$ モードに変化する。

最後に, 辺長比 ξ と平均厚み対辺長比 ζ の値が異なる板の損失率比 η/η_E を $(m, n)=(1, 1)$ モードの振動について図 10, 11 に示した。実線は周辺単純支持板, 破線は固定-単純支持板の η/η_E である。図示のとおり,

$$\zeta=0.01, \xi=1, h=1, e=0.01$$

図 6 周辺単純支持板の η/η_E と θ および振動モードとの関係

$$\zeta=0.01, \xi=1, h=1, e=0.01$$

図 8 周辺単純支持板の Ω と θ および振動モードとの関係

$$\zeta=0.01, \xi=1, h=1, e=0.01$$

図 7 固定-単純支持板の η/η_E と θ および振動モードとの関係

$$\zeta=0.01, \xi=1, h=1, e=0.01$$

図 9 固定-単純支持板の Ω と θ および振動モードとの関係

図 10 周辺単純支持板と固定-単純支持板の η/η_E と θ および ξ との関係

図 11 周辺単純支持板と固定-単純支持板の η/η_E と θ および ξ との関係

伸び変形を伴う振動の η/η_E は、境界条件のほか ξ や ζ にも依存し、とくに ζ が小さい薄肉板ほど、わずかな湾曲で η/η_E は急減する。

このように、真直辺の境界条件は二層曲りばりと同じでも、湾曲辺の境界条件の関与によって、二層曲板の減衰特性は曲りばりとは異なった特性を示す。

5. 結 言

本論文では、円筒状に湾曲した二層曲板の減衰特性が基準面の伸び変形の有無によって異なることを明らかにし、真直辺の境界条件が単純支持、湾曲辺が単純支持、固定および自由の曲板の減衰特性を数値的に検討して、次の結論を得た。

(1) 基準面にひずみを伴わない伸びなし変形の振動では、曲板の損失率比 η/η_E も、二層平板と同様、弾性パラメータ e と厚み比 h のみで定まる。一方、伸び変形を伴う振動の損失率比は、 e , h のほかに中心角 θ 、辺長比 ξ 、平均厚み対辺長比 ζ 、境界条件および振動モードに依存する。

(2) 曲板の場合、伸びなし変形は、湾曲辺の境界条件が自由の板の一部の振動モードに限られる。この特別な振動モードを除けば、二層板の損失率比はまっすぐな平板のときに最も大きく、湾曲すれば損失率比は低下する。とくに φ 方向の半波数 n の値が小さい振動モードほど、また ζ が小さい薄肉の板ほど、わずかな湾曲によって損失率比は急激に減少する。このため、二層の円筒曲板の減衰効果を平板や曲りばりの結果に基づいて予測すると過大に評価する恐れがある。

付 録

式(7), (8)の係数 $f_1 \sim f_{31}$ は次のようになる。

$$f_1 = r_i, \quad f_2 = \nu_i \alpha_i, \quad f_3 = \frac{r_i \beta_i}{\alpha_i} + \frac{\zeta_i^2 r_i^2 \theta}{12}$$

$$\begin{aligned} f_4 &= \nu_i \beta_i, \quad f_5 = -\nu_i \theta, \quad f_6 = \frac{1-\nu_i}{2} \frac{\ln b_i}{\zeta_i r_i \theta} \\ f_7 &= \frac{1-\nu_i}{2} \alpha_i, \quad f_8 = f_6 \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i} - \frac{r_i}{\theta} \right) + \frac{1-\nu_i}{2} \left(\frac{1}{\theta} + \beta_i \right) \\ f_9 &= \frac{\alpha_i^2}{r_i}, \quad f_{10} = \frac{\nu_i \alpha_i}{r_i} f_3, \quad f_{11} = \frac{\alpha_i \beta_i}{r_i} \\ f_{12} &= -\frac{\theta \alpha_i}{r_i}, \quad f_{13} = f_7 \alpha_i r_i \left(1 + \frac{\zeta_i^2 \theta^2}{4} \right) \\ f_{14} &= f_7 \left[r_i \beta_i + \frac{\beta_i}{\alpha_i} + \frac{\zeta_i^2 r_i \theta}{4} (1 + \theta \beta_i) \right] \\ f_{15} &= \frac{r_i \beta_i^2}{\alpha_i^2} + \frac{\zeta_i^2 r_i^2}{6} \left(\frac{\theta \beta_i}{\alpha_i} + \frac{r_i}{2} \right) \\ f_{16} &= \nu_i \left[\frac{\beta_i^2}{\alpha_i} + \frac{\zeta_i^2 r_i}{12} (1 + \theta \beta_i) \right] \\ f_{17} &= f_5 \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \quad f_{18} = \frac{\beta_i^2}{r_i} + \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{\ln b_i}{\zeta_i r_i \theta} - \frac{1}{r_i} \right) \\ f_{19} &= \frac{1}{r_i} \left(\frac{\ln b_i}{\zeta_i \theta} - 1 - \theta \beta_i \right), \quad f_{20} = \frac{1-\nu_i}{2} \beta_i \\ f_{21} &= f_7 r_i \left[\beta_i + \zeta_i^2 \theta \left(\frac{\theta \beta_i}{4} + \frac{1}{6} \right) \right] \\ f_{22} &= \frac{1-\nu_i}{2} \left\{ \beta_i^2 \left(r_i + \frac{1}{\alpha_i} \right) + \frac{\zeta_i^2 r_i}{12} [\theta \beta_i (3\theta \beta_i + 5) \right. \\ &\quad \left. + 2] \right\}, \quad f_{23} = f_8 - \frac{1-\nu_i}{2} \beta_i, \quad f_{24} = \frac{1-\nu_i}{2} \frac{f_{10}}{\nu_i} \\ f_{25} &= f_8 \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i} - \frac{r_i}{\theta} \right) + \frac{1-\nu_i}{2} \left[\frac{\beta_i}{\theta} \left(\frac{1}{\alpha_i} - r_i \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta_i^2 r_i}{12} (1 + \theta \beta_i) \right], \quad f_{26} = \frac{\theta \ln b_i}{\zeta_i r_i} \\ f_{27} &= \alpha_i r_i \left[\beta_i + \zeta_i^2 \theta \left(\frac{\beta_i}{4} + \frac{1}{6} \right) \right] \\ f_{28} &= r_i \left[\beta_i^2 + \zeta_i^2 \left(\frac{\theta^2 \beta_i^2}{4} + \frac{\theta \beta_i}{3} + \frac{1}{4} \right) \right] \\ f_{29} &= r_i \alpha_i^2 \left(1 + \frac{\zeta_i^2 \theta^2}{4} \right) \\ f_{30} &= f_{13} - f_7 \alpha_i r_i \frac{\zeta_i^2 \theta^2}{6}, \quad f_{31} = f_{14} - f_7 \frac{\zeta_i^2 r_i \theta}{6} \end{aligned}$$

文 献

- (1) Oberst, H. and Frankenfeld, K., *Acustica* 2, AB (1952), 181.
- (2) Beranek, L. L., *Noise and Vibration Control*, (1971), 457, McGraw-Hill.
- (3) Markus, S., *J. Sound Vib.*, 48-4 (1976), 511.
- (4) Markus, S., *J. Sound Vib.*, 21-1 (1979), 33.
- (5) 岡崎・ほか3名, *機論*, 54-498, C (昭63), 402.
- (6) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, (1959), 501, McGraw-Hill.
- (7) Flügge, W. (坪井校閲・寺崎訳), *曲面板の力学*, (昭40), 257, コナ社.
- (8) Flügge, W., *Stresses in Shells*, (1962), 210, Springer-Verlag.

討 論

〔質問〕 長 南 征 二〔東北大学工学部〕

境界条件をとりかえ、湾曲辺の境界条件は単純支持とし、真直辺の境界が単純支持、固定および自由と変化した場合、同様な傾向が得られるのか。

〔回答〕 湾曲辺の境界条件を単純支持とし、真直辺を固定、自由とした場合をそれぞれ単純支持-固定板、単純支持-自由板と呼んで、これらの板の η/η_E の θ に対する変化を付図1, 2に示した。図で m は x 方向の半波数, n については $n-1$ が平板 ($\theta=0^\circ$) における φ = 一定の節線の数を表す。すべての辺が単純支持された場合は図6に示すとおりである。単純支持-固定板と単純支持-自由板の特性は複雑で、 η/η_E は θ の増加とともに極小・極大値をとりながら減少する。これは付図3, 4に示すように、 θ の増加とともに φ = 一定の節線の数や位置が変化するためと考えられる。

なお、付図4において $n=1$ と3, $n=2$ と4では類似の振動形が現れるが、これらは振動数、節線の位置および振幅が異なっている。また単純支持-自由板の $n=1, 2$ モードでは、平板のとき伸びなし変形であったものが、 θ の増加とともに基準面に伸び変形が生じるため、 η/η_E は n や θ の値に依存している。

〔質問〕 山 田 元〔北海道大学工学部〕

解析では単純支持された直線辺を有する曲面板を取扱っておられるので、これは二層円筒殻の一部とみなすことができる。したがって、円筒殻の外表面に粘弾性層をもたせたとしても、 $n=1, 2$ のモードに対しては、 $\eta/\eta_E \approx 0.01$ 程度の損失率しか期待できないということか。

〔回答〕 本文中の無次元量を用いれば、図1に示した曲板と同じ断面構成の二層円筒殻の形状は

付図1 単純支持-固定板の η/η_E と θ および振動モードとの関係
($m=1$, $\zeta=0.01$, $\xi=1$, $h=1$, $e=0.01$)

付図2 単純支持-自由板の η/η_E と θ および振動モードとの関係
($m=1$, $\zeta=0.01$, $\xi=1$, $h=1$, $e=0.01$)

付図3 単純支持-固定板の w の φ 方向分布
($m=1$, $\zeta=0.01$, $\xi=1$, $h=1$, $e=0.01$)

付図4 単純支持-自由板の w の φ 方向分布
($m=1$, $\zeta=0.01$, $\xi=1$, $h=1$, $e=0.01$)

$$L/a_1 = \xi\theta, \quad H/a_1 = \zeta\theta, \quad H_2/H_1 = h,$$

$$H = (H_1 + H_2)/2$$

によって定まる。したがって、図4～11において $n\pi/\theta$ (θ の単位はラジアン) が整数値となるとき n, θ に対応する無次元振動数 Ω と損失率比 η/η_E の値が、長さ-半径比 $\xi\theta$ 、平均厚み-半径比 $\zeta\theta$ 、厚み比 h 、弾性パラメータ e 、ポアソン比 ν_1, ν_2 、密度比 s の両端単純支持、両端固定および両端自由の二層円筒殻の曲げ振動における $(m', n') = (m, n\pi/\theta)$ モード ($m'-1: x =$ 一定の節線の数, n' : 円周方向の波数) の Ω と η/η_E になる。これより、本文で扱った曲板に対応する円筒殻 ($L/a_1 \leq 4\pi, H/a_1 \leq 0.04\pi, h=1, e=0.01$) の η/η_E も平板に比べると一般に小さく、両端単純支持や両端固定の $(m', n') = (1, 1), (1, 2)$ モードの振動では、 L/a_1 が 0.5 以下の短い円筒殻を除けば、 $\eta/\eta_E \approx 0.01 \sim 0.03$ となる。このため2層の曲板や円筒殻で大きな減衰効果を得るには粘弾性層に h, e, η_E の大きい材料を用いることが必要になる。

なお参考のため、本文と同様の解析法を用いて求めた両端単純支持の二層円筒殻の η/η_E の半波長-半径比

付図5 両端単純支持の二層円筒殻の η/η_E と $L/m'a_1$ の関係 ($H_1/a_1=0.01, h=1.0, e=0.01$)

$L/m'a_1$ に対する変化を付図5に例示した(付1)。 $n'=0$ (軸対称) および $n'=1$ (Beam-type) の振動と $n' \geq 2$ モードの振動では、曲線の挙動が著しく異なり、 n' の値の小さいモードほど η/η_E は小さくなっている。

(付1) 立道・岡崎, 機講論, No.813-3(昭56), 95.