円筒の弾性流体潤滑に及ぼす受圧面幅変化の影響*
(数値計算による研究)寺内 喜男*¹, 野西 利次*²The Effect of Contact Surface Width Variation
on Elastohydrodynamic Line Contact

Yoshio TERAUCHI and Toshiji NONISHI

In the previous paper, the authors investigated the fluctuation of oil-film pressure and the vibration of cylinders caused by a periodical change in the width of the contact surface. The calculated results were obtained by solving a Reynolds equation and an equation of motion of the cylinder simultaneously, on the condition that the load on the cylinder is so low that the elastic deformation is negligible. In this paper, the effect of the contact-surface-width variation on the elastohydrodynamic line contact has been studied by solving the above-mentioned equations with a formula of elastic deformation and with a formula of pressure dependence of viscosity. One of these calculated results indicates that, under the condition of elastohydrodynamic lubrication, the oil film shape is changed with time similar to wave motions.

Key Words: Elastohydrodynamic Lubrication, Oil-Film Pressure, Line Contact, Surface-Width Variation, Oil-Film Shape

1. 緒 言

歯車の負荷運転中、一対かみあいから二対かみあいへ移行する場合、またはその逆のとき、歯面に加わる単位長さ当たりの荷重は変化し、歯面に生じる油膜圧力は変動することが予想される。その際、歯車の質量や歯のこわさなども油膜圧力変動に影響すると考えられる。

本研究では、その研究結果を歯面における油膜圧力変動の解析に、直接、用いることはできないが、基礎的研究として、円筒の回転にともない円筒の受圧面幅が変化する場合を想定し、それが油膜圧力などにどのような影響を及ぼすのか調べた。すなわち、受圧面幅の変化により、単位長さ当たりの荷重が変化し、それが原因となって生じる油膜圧力や油膜厚さの変動を数値計算により求め検討した。また、変動する油膜力が円筒に作用することにより加速度が生じるため、円筒の慣性力が潤滑に及ぼす作用も考慮して計算した。

著者らは前報⁽¹⁾で、円筒の弾性変形を無視して、受圧面幅の変化による回転円筒の振動や油膜圧力変動に

ついて研究し、レイノルズ方程式と円筒の運動方程式を連立させて解き、油膜圧力などの計算値を求めた。本研究においては、高負荷の場合を想定し、これに弾性式と潤滑油の高圧粘度の式を加えて、弾性流体潤滑状態にある回転円筒の、受圧面幅変化による油膜圧力変化や油膜厚さの変動を数値計算により調べた。

弾性流体潤滑の数値計算については、Dowson⁽²⁾を始め、数多くの研究報告がなされているが、本研究では小野の手法⁽³⁾を参考として、Newton-Raphson法を用いて解いた。

なお、本研究では円筒が油膜力を受けて上下運動するので、スクイーズ効果も考慮して弾性流体潤滑問題を解いている。

2. 理 論 解 析

2.1 解析モデル 半径 r の円筒が周速 u で回し、円筒の下部にある平面と接しているモデルを考える(図1参照)。この円筒と平面の接触は弾性流体潤滑状態にあるとし、その負荷は円筒ならびに円筒取付部の重量のみによるものとする。この円筒の表面は部分的に削られており、円周上のある点 a が平面と接するまでは受圧面幅は一定であるが、 a 点をすぎると受圧面幅は変化し、 b 点が平面と接する時点以後は再び受

* 昭和63年7月13日 九州支部鹿児島地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年12月28日。

*¹ 正員、広島大学工学部 (〒724 東広島市西条町下見)。

*² 正員、都城高等専門学校 (〒885 都城市吉尾町473-1)。

圧面幅は一定になるものとする。初め受圧面幅が一定であって、そして受圧面幅変化が急激でなく変化に時間幅のあるモデルを導入したのは、次の仮定(4)を用いていること、また後述のように Lundberg の式で弾性変位量を求めていることに関連している。

解析に際し、次の仮定をおく。

- (1) 温度、圧縮性の影響を無視する。
- (2) 弾性変形は静荷重が作用する場合の式で与えられる。
- (3) 粘度は圧力の指数関数で与えられる。
- (4) 受圧面幅が変化する直前までは(図1のa点が平面と接する以前)、定常状態にあり油膜圧力などの変動はない。

2.2 方程式 油膜圧力を p 、油膜厚さを h 、潤滑油の粘度を μ とすれば、レイノルズ方程式は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12 \frac{\partial h}{\partial t} + 6u \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1)$$

ただし、 x ：平面上の距離、 t ：時間

u ：速度

潤滑油の粘度 μ と油膜厚さ h は次式で与えられる。

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (2)$$

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2r} - \frac{2}{\pi E'} \int_{s_1}^{s_2} p(s, t) \ln(x-s)^2 ds + c \quad (3)$$

ただし、

μ_0 ：大気圧における粘度

α ：潤滑油の粘度-圧力係数

h_0 ：弾性変形がないときの円筒の最下点の座標

s_1, s_2 ：油膜圧力発生域の上下限值

C ：時間の関数

E' ：等価縦弾性係数

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

ν_1, ν_2 ：ポアソン比

E_1, E_2 ：縦弾性係数

単位幅当たりの油膜力 w は次式で与えられる。

$$w = \int_{s_1}^{s_2} p dx \quad (4)$$

図1 円筒-平面の接触

この油膜力が円筒に作用するので、円筒ならびに円筒取付部の質量を m とすれば運動方程式は次式となる。

$$m \frac{d^2 h_0}{dt^2} = wl - mg \quad (5)$$

ただし、

l ：受圧面幅(時間の関数)

g ：重力の加速度

式(3)の C の値は、弾性流体潤滑状態においても、2円筒間接触問題で用いられる Lundberg の式⁽⁴⁾が成立すると仮定するならば次のように与えられる。 x 軸の原点における油膜厚さを h_{x0} 、円筒と平面の弾性変位量を δ_1, δ_2 とすれば、図2より次式が成立する。

$$h_{x0} = \delta_1 + \delta_2 + h_0 \quad (6)$$

弾性変位量 δ_1, δ_2 は Lundberg の式から

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{4w}{\pi E'} \left(1.8864 + \ln \frac{l}{2b} \right) \quad (7)$$

となる。

ただし、 $2b$ ：Hertz 接触幅

$$b = \left(\frac{8wr}{\pi E'} \right)^{1/2} \quad (8)$$

式(3)、(6)より C の値は

$$C = \delta + \frac{2}{\pi E'} \int_{s_1}^{s_2} p(s, t) \ln s^2 ds \quad (9)$$

となる。

なお、レイノルズ方程式(1)の境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} x=s_1 \text{ で } p=0 \\ x=s_2 \text{ で } p=\partial p/\partial x=0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

とした。

式(5)、(7)の受圧面幅 l の値は、前述のように円筒の回転位置により異なり、図1のa点が平面に接する直前までは一定値で、a b間の部分が接するときはその値は変化し、b点以後は再び一定値となる。これを示したものが図3である。横軸は時間で縦軸は l の値である。a、b点が平面と接する時刻をそれぞれ $t=0, t=t_b$ としている。

なお、Lundberg の式(7)は、接触幅が一定である一般的な円筒の弾性変位量を与えるものであるが、受圧面幅 l が変化する本研究の場合にも、接触域におけるその変化率は十分小さいものとして、この式が成立

図2 弾性流体潤滑における油膜厚さと円筒変位の関係

すると仮定する。

式(1)～(9)を連立させて解けば、円筒の各回転位置における油膜圧力、油膜力、円筒の変位、油膜厚さが求まる。解いていく手順を示すと、まず仮定(4)から、 $t \leq 0$ においては受圧面幅 l は一定であり、定常状態にあると考えて、式(1)で $\partial h / \partial t = 0$ とおいた弾性流体潤滑問題を解く。また、このとき、式(5)から $t \leq 0$ における油膜力 w_0 は次の値になる。

$$w_0 = \frac{mg}{l_a} \dots\dots\dots (11)$$

この定常状態における油膜圧力、円筒変位などを初期値として、 $t > 0$ での油膜圧力や油膜厚などを計算する。

2・3 方程式の無次元化 レイノルズ方程式(1)

を x で積分し、無次元化すると次式となる。

$$\frac{H^3}{\nu} \frac{\partial P}{\partial X} = B \left(\int \frac{\partial H}{\partial T} dX + H - H_m \right) \dots\dots\dots (12)$$

式(2)を無次元化すると次式となる。

$$\nu = e^{GP} \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 H_m ：時間の関数

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x}{b_0}, H = \frac{h}{r}, P = \frac{p}{E'} \\ \nu &= \frac{\mu}{\mu_0}, T = \frac{t}{2b_0/u} \\ B &= 12U \left(\frac{8W_0}{\pi} \right)^{1/2} \\ W_0 &= \frac{w_0}{E'r}, b_0 = \left(\frac{8w_0 r}{\pi E'} \right)^{1/2} \\ U &= \frac{\mu_0 u}{2E'r}, G = \alpha E' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

式(14)で $2b_0$ は定常状態における油膜力 w_0 が作用した場合の Hertz 接触幅であり、 U, G, W_0 はそれぞれ、速度パラメータ、材料パラメータ、荷重パラメータ(時刻 $T=0$ における無次元油膜力)である。また、単位時間 $T=1$ は Hertz 接触幅だけ円筒表面が動くのに要する時間である。

式(3), (7), (9)から無次元油膜厚 H は次式で与えられる。

$$H = H_0 + C_1 X^2$$

図3 受圧面幅の変化

$$\begin{aligned} &+ C_2 \int_{s_1}^{s_2} P(S, T) \ln \frac{(X-S)^2}{S^2} dS \\ &+ \frac{4W}{\pi} \left(1.8864 + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{32} L^2 L^2 - \frac{1}{2} \ln W \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

無次元油膜力 W は式(4)から次式で与えられる。

$$W = C_0 \int_{s_1}^{s_2} P(S, T) dS \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{w}{E'r}, C_0 = \left(\frac{8W_0}{\pi} \right)^{1/2} \\ C_1 &= \frac{4W_0}{\pi}, C_2 = -\frac{8}{\pi} \left(\frac{W_0}{2\pi} \right)^{1/2} \\ H_0 &= \frac{h_0}{r}, L_r = \frac{l_a}{r}, L = \frac{l}{l_a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

運動方程式(5)を無次元化すると次式となる。

$$\frac{d^2 H_0}{dT^2} = \xi L W - \zeta \dots\dots\dots (18)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{32rw_0 l_a}{\pi m u^2} \\ \zeta &= \frac{32w_0 g}{\pi E' u^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ξ は円筒ならびに円筒取付部の質量の大きさを示すパラメータである。 ζ は式(11)から次の関係式が成立する。

$$\zeta = \xi W_0 \dots\dots\dots (20)$$

運動方程式(18)の初期条件は、定常状態における H_0 の値を H_{0*} とすれば、 $T=0$ で $H_0 = H_{0*}$, $dH_0/dT = 0$ となる。

なお、レイノルズ方程式(12)の右辺第1項は、式(15)を代入することより、また、 S_1, S_2 で $P=0$ となることから次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Y &= \int \frac{\partial H}{\partial T} dX = X \left\{ \frac{dH_0}{dT} + \frac{4}{\pi} \frac{dW}{dT} \left(1.8864 + \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{32} L^2 L^2 - \frac{1}{2} \ln W \right) + \frac{4W}{\pi L} \frac{dL}{dT} \right. \\ &\quad \left. - C_2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial P}{\partial T} \ln S^2 dS \right\} + 2C_2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial P}{\partial T} (X-S)(\ln |X-S| - 1) dS \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

2・4 計算方法ならびに計算手順 まず、潤滑領域を100に不等分割し、潤滑領域入口 S_1 の値を-5とした($X_1 = S_1, X_2, X_3, \dots, X_{101}$)。時間については等分割として、その分割点を $T_0, T_1, T_2, \dots$ とした。 T_0 は図3の t 軸の原

点に対応する時刻とする。計算手順を以下に記述する。 W_0, U, G の値を与え、次に式(12)で $\partial H/\partial T=0$ において定常状態にある弾性流体潤滑問題を解き、時刻 T_0 における油膜圧力、油膜厚さ、 H_0 の値などを求める。この H_0 の値を、式(18)を差分化した式に代入して時刻 T_1 における H_0 の値を計算する。 T_1 における dH_0/dT の値は、 T_1 と T_0 での H_0 の差分で近似し、この H_0 と dH_0/dT の値を弾性式やレイノルズ方程式に代入することにより、時刻 T_1 における油膜圧力や油膜厚さを計算する。以後、同様にして時刻 $T_2, T_3, \dots$ における油膜圧力や油膜厚さを計算することができる。

3. 計算結果

図4は定常状態における弾性流体潤滑の計算結果である。最小油膜厚さ $H_{\min}$ は、 $W_0=3 \times 10^{-5}$, $U=10^{-12}$, $G=5000$ の条件で $H_{\min}=4.04 \times 10^{-6}$ となり、Dowsonの近似式で計算した場合 $H'_{\min}=4.06 \times 10^{-6}$ である。

以下、受圧面幅変化による過渡的弾性流体潤滑の計算結果について記述する。

本研究では、図3に示すように受圧面幅は時間経過につれ直線的に増大し、ある時間たつと一定値となる場合について調べた。受圧面幅の増加の始まりと終わりの時刻をそれぞれ $T=0, T_b$ とし、その増加率すなわち $(T=T_b$ のときの受圧面幅 l_b)/($T=0$ のときの受圧面幅 l_a)を R_{ab} とする。

図5は時間経過につれて変化していく油膜圧力分布曲線を三次元表示したものである。曲線群の1本の曲線はある時刻における油膜圧力分布で、曲線間の時間間隔は $\Delta T=0.2$ である。時間経過につれ、油膜圧力は減少、増加を繰返している。

図6(a), (b)は時間経過にともなう油膜形状の変化を三次元表示したものである。これから、波が伝ば

図4 油膜圧力と油膜厚さ

するように、油膜形状は変動しているのがわかる。また、図6(a)と図6(b)を比較すると、受圧面幅の増加速度が大きい図6(b)のほうが油膜形状の変動が大きくなっている。

図7は各時刻における油膜形状を同一平面内に描いたものである。受圧面幅の増加により単位長さ当たりの荷重が小さくなって、油膜厚さが大きくなり、また、油膜最小部が中央へ向かって移動していくのがわかる。定常状態においては、高圧力域の油膜厚さは一定で直線であるが、過渡状態では必ずしも一定とはならず、多少の傾きを有している。

図6(a), (b)で示される油膜形状の変動について、次のような解釈を加えることができる。レイノルズ方程式(1)を無次元化すると

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{H^3}{\nu} \frac{\partial P}{\partial X} \right) = B \left(\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial H}{\partial X} \right) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、また、仮想圧力

$$Q = (1 - e^{-GP})/G \quad \dots\dots\dots (23)$$

を導入すれば、式(22)は次式となる。

図5 油膜圧力の三次元表示

(a) 油膜形状の三次元表示

(b) 油膜形状の三次元表示

図6

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(H^3 \frac{\partial Q}{\partial X} \right) = B \left(\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial H}{\partial X} \right) \dots (24)$$

Grubin⁽⁵⁾が仮定したように、高压域では $Q \approx 1/G$ (一定) とすれば式(24)より

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial H}{\partial X} \approx 0 \dots (25)$$

図 7 各時刻における油膜厚さ

図 8 油膜圧力-時間曲線

図 9 油膜圧力-時間曲線

図 10 油膜力-時間曲線

図 11 油膜力-時間曲線

図 12 油膜厚さ-時間曲線

となる。これは波動を表す方程式であり、油膜厚さ H が波の伝ばのような変動をする可能性を示す。

図 8 は時間経過につれて変化する X 軸原点における油膜圧力を示したもので、パラメータとして T_b をとって、受圧面幅の増加速度の大小が油膜圧力変動に及ぼす影響を調べたものである。受圧面幅の増加速度が大きいほど (T_b が小さい)、油膜圧力の減少率は著しく、極大と極小の差も大きくなっている。

図 9 も同様に X 軸原点における油膜圧力を示すが、 ξ をパラメータとしている。 ξ は円筒ならびに円筒取付部の質量の大きさを表すパラメータで、式(19)に示すように、 ξ の減少は質量の増加を意味する。 ξ 値が大であるほど、変動成分の周期は短くなっている。これは、油膜のばね作用と円筒ならびに円筒取付部の質量から振動系が形成され、質量が小であるほど、その固有振動数が大きくなるためと考えられる。

図 10, 11 は単位幅当たりの油膜力の時間経過にともなう変化を示したもので、図 10 は T_b を、図 11 は ξ をパラメータとしている。図 8 や図 9 の油膜圧力の

図 13 油膜厚さ-時間曲線

変動と似た傾向にある。

図 12 は T_0 をパラメータにして受圧面幅の増加速度が異なるとき、 X 軸原点における油膜厚さの時間経過にともなう変化を示したものである。油膜厚さは受圧面幅の増加速度の大小にかかわらず、一度減少してから増大している。受圧面幅の増加速度が大であるほど、極小値は減少し、極大値は増加して変動が著しくなっている。

図 13 は ξ をパラメータにして円筒ならびに円筒取付部の質量が、 X 軸原点における油膜厚さの時間経過にともなう変化に及ぼす影響を調べたものである。図 9 の油膜圧力変動と同様に、 ξ 値が大であるほど、変動成分の周期は短くなっている。

4. 結 言

弾性流体潤滑状態にある円筒-平面接触において、

円筒回転にともなう受圧面幅の変化によって生じる油膜圧力や油膜厚さの変動を数値計算により研究した結果、次の結論を得た。

(1) 高圧力発生域の油膜厚さは、定常状態では一定で直線となるが、受圧面幅の変化により生じる過渡状態においては必ずしも一定とはならず、多少、傾斜のある形状となる。

(2) 高圧力発生域の油膜形状は波が伝ばするように変動し、受圧面幅の増加速度が大であるほどその変動は著しくなる。

(3) 油膜圧力は受圧面幅の増加にともない減少するが、受圧面幅の増加速度が大であるほど変動成分が大きくなる。また、円筒ならびに円筒取付部の質量が変われば油膜圧力の変動成分の周期も変化する。これは円筒部の質量と油膜のばね作用によって形成される振動系の固有振動数に関連するものと考えられる。

(4) 高圧力発生域中央の油膜厚さに関しては、受圧面幅の増加にともない一度減少しその後増加している。受圧面幅の増加速度が大であるほど、その変動は著しい。

文 献

- (1) 寺内・野西, 機論, 52-473, C (昭 61), 361.
- (2) Dowson, D. and Higginson, G. R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, (1966), 1, Pergamon Press.
- (3) 小野, 潤滑学会講習会教材, (昭 52), 21, 日本潤滑学会.
- (4) Lundberg, G., *Forsch. Ing.-Wes.*, 10-5 (1939), 201.
- (5) Grubin, A. N. and Vinogradova, I. E., *Central Sci. Res. Inst. Technol. Mech. Eng.*, Book No. 30, Moscow (1949) (D. S. I. R. Translation No. 337).

討 論

〔質問〕 和田 稲 苗〔早稲田大学理工学部〕

動荷重が作用する弾性流体潤滑に関する研究に興味深く拝見した。ついては、二、三の点について伺いたい。

(1) 図 3 に示されている受圧面幅の変化と歯車の場合とではどのように対応するのか、説明していただきたい。

(2) 油膜力の周期性は、主として質量のみに支配されると考えてよいのか。

(3) 有限幅理論の受圧面幅の変化に及ぼす影響について論及していただきたい。

〔回答〕 (1) 歯車の歯面においては歯のかみあ

い状態によって荷重が変化し、一対かみあいでは全荷重が一対の歯面に作用するが、二対かみあいでは荷重はそれぞれの対の歯面に分担される。その分担される荷重の大きさは対によって異なるが、単位幅当たりの荷重は減少し、接触幅の総和は増加することになる。

よって、単純な見方をすれば図 3 の $t < 0$ では一対かみあい、 $t > t_0$ では二対かみあいに対応するものと考えられるが、歯車では上記のように対によって分担荷重が異なり単純に接触幅が増加することにはならないことや歯のこわさが与える影響も考えられ、論文中有るように本研究の結果をそのまま歯面に用いることはできない。しかし、歯面においても、本研究の結果

に類似した現象が生じていると推測することはできると思う。

(2) 図 11 より油膜力の周期は, ξ 値が増加すれば短くなっており, ξ 値(質量を表す)の周期性へ及ぼす影響は認められる。しかし, 図 10 によれば油膜力の周期性は T_b 値の影響をあまり受けないことが見られ, 受圧面幅の増加速度の大小による周期の変化はほとんどないことがわかる。

(3) 本研究では円筒の弾性流体潤滑を取扱っており, 円筒軸線方向の潤滑領域に対し, 図 1 の x 軸方向のそれは非常に狭く, 円筒軸線方向の状態量変化は基本的には無視可能と考えられる。

しかし, 受圧面幅が急激に変化する場合には円筒軸線方向の状態量変化が大になることは十分考えられ, より厳密な結果を得るには円筒軸線方向の状態量変化を考慮する必要があると思う。

本研究の結果に関しては受圧面幅の変化に多少の時間幅がある場合について求められており, この受圧面幅の変化が緩やか(T_b 値が大)であるほど誤差は小さくなると考えられる。

〔質問〕 橋 本 巨〔東海大学工学部〕

円筒の受圧面幅が時間的に変化する場合は油膜圧力分布の挙動を EHL 理論に基づいて手際よく検討されていることに対して敬意を表する。2 点質問させていただく。

(1) 貴論文では円筒の受圧面幅の時間変化を図 3 のような直線で近似しておられるが, 受圧面幅に対してこのようなモデルを導入された根拠をお伺いしたい。

(2) 圧力分布の時間変化を Step by step で計算

する場合, 計算値の精度は時間の増分 ΔT のとり方に大きく影響されると思う。貴論文においてこの点につき検討を加えておられるならばコメントしていただきたい。

〔回答〕 (1) 受圧面幅がある時点で瞬間的に変化するモデルの場合, その受圧面幅変化の境目が平面と接するときの弾性変位量を Lundberg の式で求めることには難点がある。また, 円筒軸線方向の油膜圧力などの状態量の変化も大きくなることが予想され, 式 (1) で示されるレイノルズ方程式による計算値の誤差が増加すると考えられる。

以上の点をさけるため, 本研究では受圧面幅の変化に多少の時間幅のあるモデルを導入した。直線的な受圧面幅変化を選んだのは, 直線が最も単純であり, 受圧面幅の増減状態を直線の傾きだけで示すことができるからである。

(2) 本研究では時間増分 $\Delta T = 0.1$ として計算値を求めているが(図 5, 図 6 では見やすくするため 0.2 間隔で描いてある), 時間増分を 2 倍, すなわち $\Delta T = 0.2$ として求めた値と比較した結果を以下に示す。

$\Delta T = 0.1$ で計算した, 潤滑領域におけるある分割点の油膜圧力を P_1 , 油膜厚さを H_1 として, $\Delta T = 0.2$ で計算したそれを P_2, H_2 とする。それらの油膜圧力, 油膜厚さの相対的差の平均値, すなわち潤滑領域全分割点における $|P_2 - P_1|/P_1, |H_2 - H_1|/H_1$ の平均値を求めると, 例えば $W_0 = 3 \times 10^{-5}, U = 10^{-12}, G = 5000, \xi = 10, Ra_0 = 2, T_b = 5$ の条件で時刻 $T = 5$ における値はそれぞれ $9.4 \times 10^{-3}, 9.3 \times 10^{-3}$ となった。他の条件についても同程度の値となり, 許容できる精度の計算結果と考える。