並流・向流熱交換器の動特性を表す
簡易集中定数モデルの導出について*山本 勉^{*1}, 西関 寛^{*1}, 河合素直^{*2}

A New Simple Dynamic Model of Parallel and Counter Flow Heat Exchangers Based on their Static and Structural Characteristics

Tsutomu YAMAMOTO, Hiroshi NISHIZEKI, and Sunao KAWAI

The dynamic characteristics of heat exchangers are described by partial differential equations. However the expressions are complicated and thus are not suited for practical use. Therefore, the development of a simple lumped-parameter model becomes an important factor in estimating the dynamic behavior of systems with heat exchangers and in designing optimal control systems. In this paper, a relatively simple dynamic model for parallel and counter flow heat exchangers is derived by applying the method of weighted residuals (MWR). A good approximation is obtained for a heat exchanger where liquid 1 and liquid 2 exchange heat, with a 2nd-order MWR model which is governed by four parameters, i. e. k_1 and k_2 which depend upon the steady-state temperatures of liquid 1 and liquid 2, and τ_1 and τ_2 which indicate the residence times of the liquids. Furthermore, the results of an experimental study are also presented to validate the analytical results.

Key Words: Application of Control, Parallel and Counter Flow Heat Exchanger, Dynamic Characteristics, Method of Weighted Residuals, Simple Lumped-parameter Model

1. ま え が き

化学プロセスをはじめとする各種プロセス工業において用いられている熱交換器の形態は多岐にわたっている。近年、いわゆる省エネルギーなどの観点から、熱交換器を含むシステム全体の力学的挙動を解明すること、あるいはより高度な制御を行うことが要求されている。このような要求に対して、従来の熱交換器のモデルは分布定数モデルを基本としているために、周波数領域での検討は容易であるが、システム全体の時間領域におけるシミュレーションなどを具体的にを行うためには使用しにくいという欠点をもつ。このため、熱交換器の動特性を低次元の近似集中モデルで表すことが特に必要になってきた。

このような背景のもとに、著者らは熱交換器の動特性を、熱交換器を含むシステムの時間領域における力学的挙動を検討しうるような形で把握し、その結果をもとにシステムの力学的挙動について考察することを目的に実験研究に着手した。この報告は、プロセス工

業などで多く用いられている両流体とも相変化を伴わない並流および向流熱交換器の動特性を、その静的特性値と構造定数とをもとに低次元の集中定数モデルで表すことを目的としたものである。

熱交換器の動特性を集中定数モデルで表す試みは、単純な集中定数モデル⁽¹⁾では良好な近似が得られないために、良好な近似を得るために差分法を用いた高橋⁽²⁾の研究があるが、この方法は近似精度をあげるためには分割数を多くとらなければならないという欠点をもつ。他方、重み付き残差法がこのような用途に用いられはじめ、嘉納らはこの方法をもとに熱交換器の周波数応答やフィードバック制御系の安定性などについて検討している⁽³⁾。しかし、この近似集中定数モデルを熱交換器の静的特性値と構造定数との関係で一般的な形として表すことについての検討が行われていないために、具体的なシステムのシミュレーションなどに使用しにくいのが現状である。そこで著者らは、別の機会に報告した水蒸気による水加熱器の動特性⁽⁴⁾に引き続き、相変化を伴わない並流・向流熱交換器について、重み付き残差法により低次の集中定数モデルを一般的な形で導き、さらにその結果の妥当性を実験的に検討した。そして一応の成果をえたので、ここに結果を抄述する。

* 昭和63年10月19日 第66期全国大会講演会において講演。原稿受付 昭和63年3月25日。

^{*1} 学生員、早稲田大学大学院 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)。

^{*2} 正員、早稲田大学理工学部。

2. 記 号 表

c : 流体の比熱	J/kgK
g : 流体の流量	m ³ /s
K : 熱通過率	W/m ² K
L : 伝熱管長さ	m
N : 近似の次数	
r : 流体 1 と流体 2 の滞留時間の比	$\equiv \bar{v}_2/\bar{v}_1$
S : 断面積	m ²
t : 時間	s (t^* : 無次元化時間)
U : 単位長さ当たりの伝熱面積	m ² /m
v : 流体の流速	m/s
w : 流体の単位長さ当たりの熱容量	$\equiv \rho Sc$ J/km
x : 距離	m (x^* : 無次元化距離)
θ : 温度	°C (θ^* : 無次元化温度)
ρ : 密度	kg/m ³
τ : 滞留時間	s

なお、添字 1, 2 はそれぞれ流体 1, 2 を、添字 i, o はそれぞれ熱交換器入口、出口を表す。

3. 基 礎 式

本研究で対象とする熱交換器は図 1 のようにモデル化する並流・向流熱交換器であり、しかも両流体とも相変化を伴わない場合を考える（なお、図中の記号は向流熱交換器の場合である）。基礎式を導出するに際して、次の仮定をおく。（１）流動方向に直角な断面での流体の温度分布は均一とする。（２）外部への熱損失はないとする。（３）熱通過率は場所によらず一定とし、流体の流量による熱通過率の変化を考慮に入れる。（４）伝熱管および外壁の熱容量は考慮に入れない。このとき、流体 1 および流体 2 の熱収支式は次のようになる。

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \frac{KU}{w_1} (\theta_2 - \theta_1) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} \pm v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \frac{KU}{w_2} (\theta_1 - \theta_2) \quad (2)$$

なお、複号は並流の場合は上部を、向流の場合は下部をとるものとする（以下同様）。

4. 近似集中定数モデルの導出

並流・向流熱交換器の動特性を近似集中モデルで表すことは、分布定数系として導いた基礎式〔式（１）、（２）〕を近似集中定数モデルで表現することに帰着する。結果を一般化しやすいように次の無次元化を行う。まず、長さについては図 2 に示すように座標を定め、

次のように無次元化する（なお図中記号は向流の場合を示す）。

$$x^* \equiv 2x/L - 1 \quad (3)$$

また温度については流体 1 の入口温度と、流体 2 の入口温度を基準に無次元化する。

$$\theta^* \equiv \frac{\theta - \bar{\theta}_{2i}}{\bar{\theta}_{1i} - \bar{\theta}_{2i}} \quad (4)$$

さらに時間については、流体 1 の滞留時間により無次元化する。

$$t^* \equiv t/\tau_1 \quad (\tau_1 \equiv L/\bar{v}_1) \quad (5)$$

一般的には熱通過率は両流体の流速の関数として表すことができるので、次の形で表す。

$$\Delta K(t) = K \{ (1 + f_1)^{q_1} \cdot (1 + f_2)^{q_2} - 1 \} \quad (6)$$

ここに、

$$f_1 \equiv \Delta v_1(t)/\bar{v}_1 [\equiv \Delta g_1(t)/\bar{g}_1]$$

$$f_2 \equiv \Delta v_2(t)/\bar{v}_2 [\equiv \Delta g_2(t)/\bar{g}_2]$$

q_1, q_2 はべき数で一定値

以上の無次元量を用い、定常状態からの変化分をとって基礎式を書き改めると、次のようになる（変化分には Δ を付し、定常値には $-$ を付す）。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Delta \theta_1^*(t^*, x^*)}{\partial t^*} + 2(1 + f_1) \frac{\partial \Delta \theta_1^*(t^*, x^*)}{\partial x^*} \\ &= -k_1 \{ f_1 - F(f_1, f_2) \} \{ \bar{\theta}_2^*(x^*) - \bar{\theta}_1^*(x^*) \} \\ &+ k_1 \{ 1 + F(f_1, f_2) \} \{ \Delta \theta_2^*(t^*, x^*) - \Delta \theta_1^*(t^*, x^*) \} \quad (7) \\ & \frac{\partial \Delta \theta_2^*(t^*, x^*)}{\partial t^*} \pm 2r(1 + f_2) \frac{\partial \Delta \theta_2^*(t^*, x^*)}{\partial x^*} \\ &= rk_2 \{ F(f_1, f_2) - f_2 \} \{ \bar{\theta}_1^*(x^*) - \bar{\theta}_2^*(x^*) \} \end{aligned}$$

図 1 向流熱交換器のモデル

図 2 向流熱交換器の無次元化モデル

$$+rk_2\{1+F(f_1, f_2)\}\{\Delta\theta^*(t^*, x^*) \\ -\Delta\theta_2^*(t^*, x^*)\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに,

$$k_1 \equiv (\bar{K}UL)/(w_1\bar{v}_1)$$

$$k_2 \equiv (\bar{K}UL)/(w_2\bar{v}_2)$$

$$r \equiv \bar{v}_2/\bar{v}_1$$

$$F(f_1, f_2) \equiv (1+f_1)^{q_1} \cdot (1+f_2)^{q_2} - 1$$

上式から明らかなように、並流・向流熱交換器の動特性は四つの無次元数 k_1, k_2, r, τ および流量による熱通過率の変化を表す無次元量 $F(f_1, f_2)$ によって表すことができる。また、 k_1 および k_2 は定常状態における熱収支式より次のように変形することができる。

$$k_1 = (\bar{\theta}_{1i} - \bar{\theta}_{1o})/\Delta\bar{\theta}_L \\ k_2 = (\bar{\theta}_{2o} - \bar{\theta}_{2i})/\Delta\bar{\theta}_L \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\Delta\bar{\theta}_L$ は対数平均温度差。よって、 k_1 および k_2 は定常設計条件すなわち温度の設計値で定まるものであることがわかる。したがって、設計段階で動特性の面から考慮すべきものは両流体の滞留時間だけとなる。

次に、重み付き残差法を用いて近似集中定数モデルに導く。試行関数 $(1+x^*)u^T(x^*)$ を用い、次の多項式 $\Delta\bar{\theta}_1^*, \Delta\bar{\theta}_2^*$ で両流体の温度を近似する。

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{\theta}_1^* \\ \Delta\bar{\theta}_2^* \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \Delta\bar{\theta}_1^*(t^*, x^*) \\ \Delta\bar{\theta}_2^*(t^*, x^*) \end{bmatrix} \\ \equiv \begin{bmatrix} (1+x^*)u^T(x^*) & 0 \\ 0 & (1\pm x^*)u^T(x^*) \end{bmatrix} a(t^*) \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} b(t^*) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $u(x^*)$ ：正視化したジャンドルの多項式、 $a(t^*)$ ：解を試行関数で展開して近似したときの係数を成分とするベクトル。

$$b^T(t^*) \equiv [\Delta\bar{\theta}_1^*(t^*), \Delta\bar{\theta}_2^*(t^*)]$$

上式をもとの式(7)、(8)に代入することにより、残差 R_1, R_2 を求め、重み関数として $u(x^*)$ を選んで残差との内積を零とおくことにより、次の近似集中定数モデルを得る。

$$\begin{aligned} \dot{a}(t^*) = & \{A_1 + A_2F(f_1, f_2) + A_3f_1 \\ & + A_4f_2\}a(t^*) + B_1\dot{b}(t^*) \\ & + B_2\{1+F(f_1, f_2)\}b(t^*) \\ & + y_1F(f_1, f_2) + y_2f_1 + y_3f_2 \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここに,

$$A_1 \equiv \begin{bmatrix} -(k_1I + 2S_1^{-1}T_1) & k_1S_1^{-1}S_2 \\ rk_2S_2^{-1}S_1 & -r(k_2I \pm 2S_2^{-1}T_2) \end{bmatrix} \\ A_2 \equiv \begin{bmatrix} -k_1I & k_1S_1^{-1}S_2 \\ rk_2S_2^{-1}S_1 & -rk_2I \end{bmatrix}$$

$$A_3 \equiv \begin{bmatrix} -2S_1^{-1}T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mp 2rS_2^{-1}T_2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 \equiv \begin{bmatrix} -\sqrt{2}S_1^{-1}e_1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}S_2^{-1}e_1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 \equiv \begin{bmatrix} -\sqrt{2}k_1S_1^{-1}e_1 & \sqrt{2}k_1S_1^{-1}e_1 \\ \sqrt{2}rk_2S_2^{-1}e_1 & -\sqrt{2}rk_2S_2^{-1}e_1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 \equiv \begin{bmatrix} -k_1S_1^{-1}c \\ rk_2S_2^{-1}c \end{bmatrix}, \quad y_2 \equiv \begin{bmatrix} k_1S_1^{-1}c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_3 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ -rk_2S_2^{-1}c \end{bmatrix}$$

$$S_1 \equiv \int_{-1}^1 (1+x^*)u(x^*)u^T(x^*)dx^*$$

$$S_2 \equiv \int_{-1}^1 (1\pm x^*)u(x^*)u^T(x^*)dx^*$$

$$T_1 \equiv \int_{-1}^1 u(x^*)\frac{d}{dx^*} [(1+x^*)u^T(x^*)]dx^*$$

$$T_2 \equiv \int_{-1}^1 u(x^*)\frac{d}{dx^*} [(1\pm x^*)u^T(x^*)]dx^*$$

$$c \equiv \int_{-1}^1 u(x^*)\{\bar{\theta}_1^*(x^*) - \bar{\theta}_2^*(x^*)\}dx^*$$

$$e_i^T = [1, 0, \dots, 0]$$

このとき両流体出口温度は次のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{\theta}_{1o}^* \\ \Delta\bar{\theta}_{2o}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u^T(1) & 0 \\ 0 & 2u^T(\pm 1) \end{bmatrix} a(t^*) \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} b(t^*) \dots\dots\dots (12)$$

以上の式(11)、(12)が、求める並流・向流熱交換器の動特性を解析するための近似集中定数モデルである。

5. 低次の近似集中定数モデルの導出

前章で分布定数系として記述される熱交換器の動特性を表す基礎式から、重み付き残差法により近似集中定数モデルを一般的な形で導いた。そこで次のステップとして、近似集中定数モデルの次数をどの程度にとるべきかについて検討する。本研究では時間領域におけるシミュレーションに使用しうる簡易集中定数モデルを導くことを目的としているので、時間領域における応答に注目して近似集中定数モデルの次数について検討した。図3は、向流熱交換器の流量変化に対する出口温度のステップ応答についての計算結果を比較したものの一例である。図中の実線は分布定数系の基礎式をもとに数値計算により求めた厳密解であり、破線および一点鎖線はそれぞれ2次(全体としては4次)

および4次(全体としては8次)の近似集中モデルによる結果である。図からも明らかなように、2次の近似集中モデルで十分良好な近似をえることができる。

以上の結果より、2次の近似集中定数モデルが実用に供しうることがわかったので、簡単にこのモデルを使用しうるように一般的な形すなわち熱交換器の構造定数と静的特性値とに基づく無次元数を用いた伝達関数の形で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \Theta_{20}^*(s) = & \{G_{F1}(s) \cdot f_1(s) + G_{F2}(s) \cdot f_2(s) \\ & + G_{T1}(s) \cdot \Theta_1^*(s) + G_{T2}(s) \cdot \Theta_2^*(s)\} / G(s) \\ & \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} G(s) = & (s\tau_1)^4 + b_3(s\tau_1)^3 \\ & + b_2(s\tau_1)^2 + b_1(s\tau_1) + b_0 \end{aligned}$$

その他 $G_{F1}(s)$, $G_{F2}(s)$, $G_{T1}(s)$, $G_{T2}(s)$ は表1を参照のこと。なお、ここでは流体2の出口温度に注目しているが、流体1の出口温度に注目するときは両流体を入れ換えればよい。この結果より、並流・向流熱交換器の動特性を、定常設計条件により定まる無次元数 k_1 , k_2 および両流体の滞留時間を用いた近似集中定数モデルで表すことができる。したがって、設計の段階で

図3 厳密解との比較 (N: 近似次数)

Counter flow heat exchanger
Shell SGP3B, $L=3330$, Tube $19.05\phi \times 4$, $L=2958$

図4 実験装置概略図

はこの四つの特性値によって〔流量による熱通過率の変化を考慮に入れる場合には、式(6)の q_1 , q_2 が必要になる〕, その動特性の検討ができるわけである。

6. 実験による検討

前章で導いた近似集中定数モデルの妥当性を確認するために、図4に示すような熱システムのモデルを製作した。すなわち、熱交換器Iはシェルアンドチュー

表1 並流・向流熱交換器の伝達関数

b_3	$2\{(k_2+3)r+k_1+3\}$	
b_2	$(k_2^2+6k_2+12)r^2+2\{k_1k_2+6(k_1+k_2)+18\}r+k_1^2+6k_1+12$	
b_1	$6\{[k_2^2+(k_1+6)k_2+4(k_1+3)]r^2+[k_1^2+(k_2+6)k_1+4(k_2+3)]r\}$	
b_0	$12\{k_1^2+k_2^2\pm 2k_1k_2+6(k_1+k_2)+12\}r^2$	
$G_{F1}(s)$ $G_{F2}(s)$	$6rk_2\{a_{F3}(s\tau_1)^3+a_{F2}(s\tau_1)^2+a_{F1}(s\tau_1)+a_{F0}\}$	
a_{F3}	$c_1(\alpha_2-\alpha_3)$	
a_{F2}	$c_2k_1(\alpha_1-\alpha_4)+c_1\{(k_2r+2(k_1+3))(\alpha_2-\alpha_3)+2r(3\alpha_2-\alpha_3)\}$	
a_{F1}	$c_2k_1\{(k_2r+k_1)(\alpha_1-\alpha_4)+2(1\pm r)(3\alpha_1-\alpha_4)\}+c_1\{rk_2(k_1+6)+k_1^2+6k_1+12\}(\alpha_2-\alpha_3)+4r(k_1+3)(3\alpha_2-\alpha_3)\}$	
a_{F0}	$2r\{c_2k_1\{(k_2\pm k_1)(3\alpha_1-\alpha_4)\pm 12\alpha_1\}+c_1\{[k_1^2\pm k_1k_2+6k_1+12](3\alpha_2-\alpha_3)+6k_2(\alpha_2-\alpha_3)]\}\}$	
c_1	$q_1-(G_{F1}(s)), q_2-(G_{F2}(s))$	
c_2	$1-q_1-(G_{F1}(s)), -q_2-(G_{F2}(s))$	
並流	a_1, a_2	$(1+\beta)/(k_1+k_2)$
	a_3, a_4	$\{\exp(-k_1-k_2)+2+3\beta\}/(k_1+k_2)$
	β	$\{\exp(-k_1-k_2)-1\}/(k_1+k_2)$
向流 $k_1\neq k_2$	α_1	$(e^{k_1}-\beta_1)/\beta_2$
	α_2	$(e^{k_2}-\beta_1)/\beta_2$
	α_3	$(e^{k_1}+2e^{k_2}-3\beta_1)/\beta_2$
	α_4	$(e^{k_2}+2e^{k_1}-3\beta_1)/\beta_2$
	β_1	$(e^{k_2}-e^{k_1})/(k_2-k_1)$
	β_2	$k_2e^{k_2}-k_1e^{k_1}$
向流 $k_1=k_2$	α_1, α_4	$-1/[2(k_1+1)]$
	α_2, α_3	$1/[2(k_1+1)]$
$G_{T1}(s)$	$12rk_2\{\mp(s\tau_1)^2\mp(k_2r+k_1)(s\tau_1)+12r\}$	
$G_{T2}(s)$	$(s\tau_1)^4+a_{T23}(s\tau_1)^3+a_{T22}(s\tau_1)^2+a_{T21}(s\tau_1)+a_{T20}$	
a_{T23}	$2\{(k_2-3)r+k_1+3\}$	
a_{T22}	$(k_2^2-6k_2+12)r^2+2\{k_1k_2+6(k_2-k_1)-18\}r+k_1^2+6k_1+12$	
a_{T21}	$6\{[k_2^2-(k_1+6)k_2+4(k_1+3)]r^2-[k_1^2-(k_2-6)k_1-4(k_2-3)]r\}$	
a_{T20}	$12\{k_1^2+k_2^2\pm 2k_1k_2+6(k_1-k_2)+12\}r^2$

図 5 管外流量変化に対する応答

図 6 管内流量変化に対する応答

ブ式の水蒸気による水加熱器であり、熱交換器IIは本報で対象としている向流熱交換器である。この装置では、熱交換器IIに注目する場合には、管内流量を変化させるとその入口温度も変化するため、流量と入口温度が同時に変化する場合の応答について検討することもできる。図5は熱交換器IIにおいてシェル側流体の流量をステップ状に変化させた場合の管内出口温度の応答を求めた結果の一例である。図には、式(11)による計算結果を併記してある。図から、先に導いた2次の近似集中定数モデルによって十分良好な近似が得られることがわかる。図6は熱交換器IIの管内側流量をステップ状に変化させたときの管内出口温度の応答例である。この場合、熱交換器IIの管内流量変化は熱交換器Iの流量変化でもあるので、熱交換器Iの管内出口温度すなわち熱交換器IIの管内入口温度も流量変化に伴い変化する。このため図のような形の応答をとる。先に導いた2次の近似集中定数モデルと熱交換器Iのモデルをもとに管内出口温度の応答を求めた結果を図に併記する。図から明らかなように、この場合も2次の近似集中定数モデルで十分良好な近似が得られる。

以上の結果より、本報で導いた重み付き残差法による低次の集中定数モデルで、並流・向流熱交換器の動特性を十分良好に表しうることを確認することができる。

7. あとがき

以上に、並流・向流熱交換器の動特性を表す低次の集中定数モデルを、一般的な形で重み付き残差法により導いた結果について抄述した。得られた結果を要約

すると次のようになる。

(1) 並流・向流熱交換器の動特性を重み付き残差法による近似集中定数モデルで表す場合、その次数としては2次で十分良好な近似が得られる。

(2) 並流・向流熱交換器の動特性をこの低次の近似集中定数モデルを用いて表すとき、熱交換器の構造定数と静的特性値とをもとに一般的な形で表すことができる。すなわち動特性は、熱交換器の定常設計条件より定まる無次元数 k_1, k_2 、両流体の滞留時間 τ_1, τ_2 および流量変化による熱通過率の変化を表すべき数 q_1, q_2 によって表すことができる。

(3) 向流熱交換器を対象としたステップ応答実験により、この近似集中定数モデルの妥当性を確認することができた。

従来の熱交換器の集中定数モデルは、熱通過率の定義式も分布定数系としての対数平均温度差をもとにしたものとは異なり、かつ近似もよくないという欠点をもつ。本研究で導いた近似集中定数モデルは分布定数系をもとにしたものであるため、熱交換器の静的な設計条件をもとにその動特性を容易に推定でき、かつ満足すべき近似が得られるという特長をもつ。したがって、今後熱交換器を含むシステムのシミュレーションには十分利用しうるものであると考える。

文 献

- (1) 日本機械学会編、伝熱工学資料第3版、(昭50)、213。
- (2) 高橋、自動制御、6-1 (昭34)、2。
- (3) 例えば、嘉納、計自論、12-6 (昭51)、632。
- (4) 河合、機論、52-483, C (昭61)、2881。