二次曲線ばね非線形系における自由振動の厳密解*
(その1, 解の表示とフーリエ係数の試行解)田村英之^{*1}, 李 曉敏^{*2}Exact Solutions of the Free Vibration in the Nonlinear System
with a Quadratic Spring
(Part 1, Expressions of the Solution and Trial Methods
for the Fourier Coefficients)

Hideyuki TAMURA and Xiaomin LI

An exact solution of the free vibration is determined using an elliptic function, sn, in an oscillatory system with one-degree-of-freedom having a quadratic spring. The system is presumed to be a typical model of the nonlinear system having an asymmetrical spring, in which chaotic phenomena may occur. Few discussions on the problem have been attempted, especially in its precise numerical computations, after Duffing who studied the symmetrical case (cubic spring) fully but not the quadratic one. For the given frequency, a transcendental equation must be solved to obtain a modulus parameter of the elliptic function. The parameter governs all the coefficients of Fourier expansion of the solution. Three algorithms of the trial method are developed, which roughly correspond to the cases of the quasi-linear small vibration, strongly nonlinear slow vibration and the moderate one, respectively. Some numerical results of the solution are demonstrated.

Key Words: Vibration, Nonlinear Vibration, Asymmetrical Spring, Quadratic Spring, Free Vibration, Exact Solution, Trial Method for Fourier Coefficient

1. 緒 論

典型的な非線形ばね関数は(変位に関する)二次あるいは三次の多項式と考えられ, その非線形振動は古くから論ぜられている。うち対称性(奇関数)の三次曲線ばね系については, モデルとしての明快さ, (近似的) 解析の容易さなどから, Duffing⁽¹⁾以来, 多くの研究があり自由振動の厳密解も知られ⁽²⁾⁽³⁾その高精度(数値)計算法も議論^{(4)~(6)}されている。

これに反し, 二次曲線ばね系のほう是非対称(偶非線形)ばね特性のモデルとして注意されており, Duffing も何がしかの検討⁽⁷⁾を述べている。また分数調波振動に関する研究⁽⁸⁾も知られているが, 総じて数値解法や近似解法の例題⁽⁹⁾の域を遠く出ず, 対称ばね振動系との相違点(解波形や応答曲線の形の特徴)⁽⁷⁾⁽⁹⁾やカオス様挙動⁽¹⁰⁾が知られる程度である。強制振動は無論のこと, 自由振動についても十分な解明はなされていないようであり, 高精度の解や厳密解の検討も公知とは思われない⁽²⁾⁽³⁾⁽¹¹⁾。

この非線形ばね振動系の特徴は, 安定な平衡点と不

安定なそれとが隣接共存することであって, これがカオス様挙動の要因⁽¹⁰⁾と考えられている。最近, 機械力学的視点からも, これら不規則特異現象が注目されつつある折から, この系の特性を詳論することは, 極めて有意義なことと考えられる。

よって本報告では, 二次曲線ばね振動系の自由振動について, (Duffing 系と類似にヤコビのだ円関数による) 厳密解が得られることを示し, その高精度計算法に関する議論を述べる。

2. 基 礎 式

運動方程式は次のとおりとする。

$$\left. \begin{aligned} M(d^2x/dt^2) + Ax + Bx^2 &= 0, \\ \text{ただし, } M, A, B &: (\text{正})\text{定数}, \\ t &: \text{時間 (独立変数)}, \\ x &: \text{変位 (従属変数)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

これを無次元化すると次式を得る。

$$\nu^2(d^2\xi/d\theta^2) + \xi + \xi^2 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし, } \theta &\equiv \omega t, \quad \xi \equiv x/|A/B|, \\ \omega_0 &\equiv \sqrt{|A/M|}: \text{実次元基準振動数}, \\ \nu &\equiv \omega/\omega_0: \text{無次元振動数} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

* 昭和62年10月24日 九州支部・中国四国支部熊本地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年5月16日。

^{*1} 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

^{*2} 正員, 九州大学大学院。

解 $\xi(\theta)$ の周期は (一般性を失うことなく) θ に関して 2π であり, また $\xi(\theta)$ が一つの解であるとき, $\xi(\theta + \theta_0)$ もまた解 [θ_0 は任意の (実) 定数] となる。

式 (2) の解を, ヤコビのだ円関数 sn を使って次のように仮定する。

$$\xi = D - C \text{sn}^2(K\theta/\pi) \dots\dots\dots (4)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} K &= K(m) \equiv \int_0^{\pi/2} d\phi / \sqrt{1 - m \sin^2 \phi} \\ &\quad : \text{第 1 種完全だ円積分}^{(12)}, \\ m &: (\text{母数}) \text{ パラメータ}, \\ D, C &: (\text{未定}) \text{ 定数} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

式 (4) を式 (2) に代入し, だ円関数に関する公式⁽¹³⁾ を適用して整理すると, sn^2 に関する二次式が得られる。その 0, 1, 2 次の等べき項を, それぞれで等置すると, 順次以下の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} -2\nu^2 C(K/\pi)^2 + D + D^2 &= 0, \\ [4\nu^2 (K/\pi)^2 (1+m) - 1 - 2D] C &= 0, \\ [-6\nu^2 (K/\pi)^2 m + C] C &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

これを整理すると次の関係を得る。

$$[K(m)/(\pi/2)]^2 \sqrt{1-m(1-m)} = 1/\nu^2 \dots\dots\dots (7)$$

$$C = 6m[\nu K(m)/\pi]^2 = 3m/2\sqrt{1-m(1-m)} \quad (8)$$

$$D = 3m/2\sqrt{1-m(1-m)}(\sqrt{1-m(1-m)} + 1 + m) \dots\dots\dots (9)$$

だ円関数 $\text{sn}(K\theta/\pi)$ は (ここでは) 以下の表示⁽¹³⁾ による。

$$\begin{aligned} \text{sn}(K\theta/\pi) &= \frac{2\pi}{\sqrt{m} K(m)} \sum_{n=1}^{1,3,5,\dots} \frac{\sin n\theta/2}{H^{-n} - H^n} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{m} K(m)} \sum_{n=1}^{1,3,5,\dots} \frac{\sin n\theta/2}{\sinh nJ} \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} J &\equiv K(1-m)/[K(m)/(\pi/2)] \\ &= K(m_1)/[K(1-m_1)/(\pi/2)], \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし, $m_1 \equiv 1-m$

$$H \equiv e^{-J} \dots\dots\dots (12)$$

よって, 式 (4) 中の $C \text{sn}^2(K\theta/\pi)$ なる項は次のように整理される。

$$C \text{sn}^2(K\theta/\pi) = 6\nu^2 \left[\sum_{n=1}^{1,3,5,\dots} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sinh nJ} \right]^2 \dots\dots\dots (13)$$

あるいは,

$$C \text{sn}^2(K\theta/\pi) = 6\nu^2 \left[\sum_{n=1}^{1,3,5,\dots} \frac{2H^n}{1-H^{2n}} \sin \frac{n\theta}{2} \right]^2 \quad (14)$$

与えられた ν に対して解を決定するためには, まず, 式 (7) を満足する $m = m(\nu)$ を求めなければならない。 m と ν の対応は, 図 1 に示すとおりである。

別報⁽⁵⁾ の検討によると, $[m \rightarrow 0, J \rightarrow \ln(4/\sqrt{m}) \rightarrow \infty,$

$H \rightarrow \sqrt{m}/4 \rightarrow 0$; 準線形振動] の場合には式 (14) を, これと逆の極端の場合は式 (13) を適用することにより精度低下を防止できる。これら H, J は, いずれも m , したがって ν の関数である。

式 (13), (14) に現れる正弦フーリエ級数の自乗は, (一般に) 次のような余弦フーリエ級数に展開される。

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\psi \right)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{1+k} \right) \cos \psi \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{2+k} - \frac{1}{2} b_1^2 \right) \cos 2\psi \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{3+k} - b_1 b_2 \right) \cos 3\psi \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{2n+k} - \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{2n-k} - \frac{1}{2} b_n^2 \right) \cos 2n\psi \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{2n+1+k} - \sum_{k=1}^n b_k b_{2n+1-k} \right) \cos(2n+1)\psi \right] \end{aligned}$$

これを, 式 (13), (14) に対応させると, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \theta/2, \quad b_2, b_4, b_6, \dots = 0 \\ \left(\sum_{n=1}^{1,3,5,\dots} b_n \sin \frac{n\theta}{2} \right)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2, \\ a_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{2+k} - \frac{1}{2} b_1^2, \\ a_n &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{2n+k} - \sum_{k=1}^{n-2} b_k b_{2n-k} - \frac{1}{2} b_n^2, \\ &\quad (n=3, 5, 7, \dots), \\ a_n &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{2n+k} - \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{2n-k}, \\ &\quad (n=2, 4, 6, \dots), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\sum_{k=1}^N b_k' \equiv \sum_{k=1}^{1,3,5,\dots,N} b_k, \quad (k: \text{odd})$$

上式中のフーリエ係数 a_n は k に関する無限和であるべきものを, 実際の数値として特定するには, 有限和で近似せざるを得ないから, その際の打ち切り誤差を見積もっておく必要がある。そこで,

$$a_n = a_n' + \varepsilon_n, \quad (n=0, 1, \dots),$$

ただし, a_n' は式 (16) の定義において, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k'$ を $\sum_{k=1}^N b_k'$ (N は適当な奇数) で置き換えたもの。 $\dots\dots\dots (17)$

図 1 m - ν の対応関係

とおくとき、

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \varepsilon_0(J, NJ) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=N+2}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=N+2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sinh kJ} \right)^2 \\ &\approx \frac{1}{4} \int_N^{\infty} \frac{dx}{\sinh^2 Jx} = 1/4 J e^{NJ} \sinh NJ \\ &\rightarrow O((J e^{2NJ})^{-1}), \quad (N, J \rightarrow \infty) \\ \varepsilon_n &= \varepsilon_n(J, NJ, nJ) = \sum_{k=N+2}^{\infty} b_k b_{2n+k} \\ &= \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{1}{\sinh kJ \cdot \sinh(2n+k)J} \\ &\approx \frac{1}{2} \int_N^{\infty} \frac{dx}{\sinh Jx \cdot \sinh J(2n+x)} \\ &= \frac{1}{2J \sinh 2nJ} \ln \left(1 + e^{-2NJ} \frac{1 - e^{-4nJ}}{1 - e^{-2NJ}} \right) \\ &\rightarrow O((J e^{2NJ} e^{2nJ})^{-1}), \quad (n, N, J \rightarrow \infty), (n > 0)\end{aligned}$$

.....(18)

となる。これにより a_n の要求精度に応ずる ε_n に必要な項数 N を決めればよい。

以上のフーリエ級数展開表示とは別に、 $\xi(\theta)$ の θ に関する最大値 $\xi_{\max}$ と最小値 $\xi_{\min}$ の間には、ポテンシャルエネルギーの等置から次の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned}\xi_{\max} &= \frac{-2\xi_{\min}}{1 + \sqrt{(1-2\xi_{\min})/[1+(2/3)\xi_{\min}]}} \\ \xi_{\max} &= \xi(0) = D = 0 \sim 1/2 \quad (>0), \\ \xi_{\min} &= \xi(\pi) = D - C = 0 \sim -1 \quad (<0)\end{aligned} \right\} \dots (19)$$

さらに、 $\nu \rightarrow 0$ とともに、 $\xi_{\max} \rightarrow 1/2$, $\xi_{\min} \rightarrow -1$ であるが、これら極限值と任意の $\xi_{\max}$, $\xi_{\min}$ との差を求めておくと次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}\frac{1}{2} - \xi_{\max} &= \frac{3m_1^2}{4R_1(R_1+1-m_1/2)} = O\left(\frac{3m_1^2}{8}\right), \\ \xi_{\min} + 1 &= \frac{3m_1(1-m_1)}{2R_1(R_1+1-2m_1)} = O\left(\frac{3m_1}{4}\right), \\ \text{ただし } R_1 &\equiv \sqrt{1-m_1(1-m_1)}\end{aligned} \right\} \dots (20)$$

3. パラメータ (母数) m の試行解とその誤差感度/倍率の検討

式(7)を $m = m(\nu)$ に関して解く一法は、いわゆる“試みの法”で、次の試行解問題が定式化される。

$$\left. \begin{aligned}f_0(m) - 1 &= 0, \text{ ただし,} \\ f_0(x) &\equiv \nu^2 [K(x)/(\pi/2)]^2 \sqrt{1-x(1-x)} \\ K(x)/(\pi/2) &\equiv 1 + x/4 + \dots : \text{式(29)}\end{aligned} \right\} \dots (21)$$

あるいは、

$$\left. \begin{aligned}f_1(m_1) - 1 &= 0, \text{ ただし,} \\ f_1(x) &\equiv \nu^2 [K(1-x)/(\pi/2)]^2 \sqrt{1-x(1-x)} \\ K(1-x) &\equiv \ln(4/\sqrt{x}) + \dots : \text{文献(12)}\end{aligned} \right\} \dots (22)$$

(一般に) 定語長計算機を用いて、 $f(x) - 1 = 0$ から試行的な x が容易に精度よく解ける条件⁽⁵⁾：

$$|[x/f(x)] df(x)/dx| \geq 1$$

の成否を吟味すると、以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned}\frac{m}{f_0} \frac{df_0}{dm} &= \frac{1}{1-m} \left[\frac{E(m)}{K(m)} - 1 + \frac{m}{2} \frac{1+m}{1-m(1-m)} \right] \\ \text{ただし, } E(m) &: \text{第2種完全だ円積分}^{(12)}\end{aligned} \right\} \dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned}\frac{m_1}{f_1} \frac{df_1}{dm_1} &= \frac{1}{m_1-1} \left[\frac{E(1-m_1)}{K(1-m_1)} - 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-m_1}{2} \frac{2-m_1}{1-m_1(1-m_1)} \right] \dots (24)\end{aligned}$$

図2 試行解の精度条件〔式(23), (24), (32)〕と(特性/母数)パラメータ間の相対誤差拡大率〔式(25)~(28)〕

これらの値が $O(1)$ に比べてあまり小であると、根の精度に不安が残る。上式の計算結果と傾向は図 2 に示すとおりであって、 $m \rightarrow 0$ ($m_1 \rightarrow 1$) においては、式 (21), (22) とともに問題があり、 $m \rightarrow 1$ ($m_1 \rightarrow 0$) においては、式 (21) のほうは全く問題ないが、式 (22) のほうはやや警戒を要する程度である。なお、式 (22) の計算に際しては、求めるべき m_1 のかわりに $\ln m_1$ を (見掛けの) 試行変数にとることにより、とくに $m_1 \rightarrow 0$ において $f_1(m_1)$ の直線性が著しく改善され、根の逐次推定精度と収束の速さが大幅に向上し⁽⁴⁾、上述の不安はほとんど気にならないようである。

さて、フーリエ係数を支配する特性パラメータ J あるいは H などは m (あるいは m_1) の関数であるが、両者間の (微小な) 相対誤差の関係 (相対誤差の拡大率) は次のとおりである。(絶対) 誤差の絶対値を $\delta(\cdot)$ など [相対誤差のそれは $\delta(\cdot)/(\cdot)$] と記すとき、

$$\begin{aligned} \langle J/m \rangle &\equiv (\delta J / J) / (\delta m / m) \\ &= \left| \frac{m}{J} \frac{dJ}{dm} \right| = \frac{\pi}{4(m-1)K(m)K(1-m)} \cdots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle J/m_1 \rangle &\equiv (\delta J / J) / (\delta m_1 / m_1) \\ &= \left| \frac{m_1}{J} \frac{dJ}{dm_1} \right| = \frac{\pi}{4(1-m_1)K(m_1)K(1-m_1)} \\ &\quad \cdots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle H/m \rangle &\equiv (\delta H / H) / (\delta m / m) \\ &= \left| \frac{m}{H} \frac{dH}{dm} \right| = \frac{1}{2(1-m)} \left(\frac{\pi}{2K(m)} \right)^2 \cdots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle H/m_1 \rangle &\equiv (\delta H / H) / (\delta m_1 / m_1) \\ &= \left| \frac{m_1}{H} \frac{dH}{dm_1} \right| = \frac{1}{2(m_1-1)} \left(\frac{\pi}{2K(1-m_1)} \right)^2 (28) \end{aligned}$$

これらの値も図 2 に示している。

一般に、 y の相対誤差が $\langle x/y \rangle$ 倍に拡大されて x のそれになることを表すから、この値は小さいほうが好ましく、あまりに大であると、せっかく高精度で解かれた m や m_1 (実際問題として語長で決まる丸め以上の誤差を有する) の真価が損われる。

以上の検討から $m_1 \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow 0$) では、式 (21) の精度は期待できても $\langle J/m \rangle, \langle H/m \rangle$ の値が不都合であるから、多少の不安はあるものの、式 (22) により m_1 を求め、それから J, H を求めることにすれば、いちおう問題はないと思われる。 $m \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow 1$; 準線形振動) では、式 (21), (22) とともに絶望的であるから、 $\langle J/m \rangle, \langle H/m \rangle$ の値が小である (好ましい) 利点は生かされない。よって、 $m \rightarrow 0$ の範囲に対しては何らかの別法を工夫する必要がある、 $m \rightarrow 1$ ($m_1 \rightarrow 0$) に対しても補強策を探しておくほうがよいと思われる。

($m \rightarrow 0, 1$ を除く) 中程度の m を式 (21) により、あるいは中程度および $m_1 \rightarrow 0$ なる m_1 を式 (22) により、

(いずれも試行解で) 求められたものを式 (11), (13), (15), (16) に適用すると、

$$J = J\{m(\nu)\}, \quad b_n = 1/\sinh nJ$$

により $a_n = a_n(\nu)$ が定まり、 $C \operatorname{sn}^2(K\theta/\pi)$ が得られる。さらに、式 (9) から $D = D\{m(\nu)\}$ を得れば、結局、解 $\xi(\theta)$ [式 (4)] が決定される。

4. 準線形微小振動 ($m \rightarrow 0+$, $\nu \rightarrow 1-$)

$m \rightarrow 0$ に対しては、 $K(m)$ に対する、べき級数展開表示⁽⁶⁾⁽¹²⁾を利用して式 (21) を変形整理することにより、精度低下の障害を解消することができる。

$$\left. \begin{aligned} K(m) &= (\pi/2) \sum_{n=0}^{\infty} k_n^0 m^n, \\ \text{ただし, } k_0^0 &= 1, \\ k_n^0 &= (1-1/2n)^2 k_{n-1}^0, \quad (n > 0) \end{aligned} \right\} \cdots (29)$$

これを用いて式 (7) を変形すると、

$$\begin{aligned} [K(m)/(\pi/2)]^2 \sqrt{1-m(1-m)} \\ = 1 + (15/32)m^2 + O(m^3) + \cdots = 1/\nu^2 \cdots (30) \end{aligned}$$

これから次式を得る、

$$\left. \begin{aligned} m(1+c_1m+c_2m^2+c_3m^3+\cdots) \\ = \sqrt{\frac{32}{15} \frac{(1-\nu^2)}{\nu^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-(15/32)y^2}}, \\ \text{ただし, } y &\equiv \sqrt{32/15} \sqrt{1-\nu^2}, \\ c_n &: \text{表 1} \end{aligned} \right\} \cdots (31)$$

式 (21), (23) は次の試行解問題で置き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_0(m) - 1 &= 0, \\ F_0(m) &\equiv \frac{m(1+c_1m+c_2m^2+c_3m^3+\cdots)}{y/\sqrt{1-(15/32)y^2}}, \\ \frac{m}{F_0} \frac{dF_0}{dm} &= \frac{1+2c_1m+3c_2m^2+4c_3m^3+\cdots}{1+c_1m+c_2m^2+c_3m^3+\cdots} > 1 \end{aligned} \right\} \cdots (32)$$

この F_0 は、 f_0 とは逆に、 $m \rightarrow 0+$ では $(m/F_0)(dF_0/dm) \rightarrow 1+$ であるから、試行解による求根は全く問題ない。その反面、べき級数の打ち切り誤差に注意する必要がある、表 1 の係数 (1~64 次) を用いるときは、 $m \leq u^{1/64}$ が実用上の収束域である。ただし、 u は許容誤差を表し、今の問題では、単精度、倍精度、四倍精度の各計算において、それぞれおよそ 10^{-6} , 10^{-15} , 10^{-33} 程度以下とするのが妥当である。

ここで、前出の J, H も、 m のべき級数に展開しておく次のようになる。

$$J = \ln(4/\sqrt{m}) + \sum g_n^m m^n \cdots (33)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= (\sqrt{m}/4)(1 + \sum h_n^m m^n), \\ \text{係数 } h_n^m &: \text{表 2} \end{aligned} \right\} \cdots (34)$$

$m \rightarrow 0$ ($J \rightarrow \infty$) の場合には、 m から H を求めるのに、いったん J [式 (11) または式 (33)] を計算してから式

表 1 係数 c_n [式(31)][illegible]表 2 係数 h_n^m [式(34)]

n	h_n^m	n	h_n^m	n	h_n^m
1	0.2500000000000000000000000000000000				
2	0.1328125000000000000000000000000000	23	0.00884727896782258559783147527787	44	0.0041684826163805537405393184455
3	0.0878906250000000000000000000000000	24	0.0008457740732359022655549172667888	45	0.004060697008645704812621370018781
4	0.0564820206835973500000000000000000	25	0.008054024126014768888895248942918	46	0.0039579771499966843107401910414
5	0.0405685882568359735000000000000000	26	0.00769469081817821711757137448905	47	0.003859983859464117953941196209
6	0.0414003133737300000000000000000000	27	0.0073639789562429299111109700458133	48	0.00376640582182129343980674732066
7	0.0348264673008015136718750000000000	28	0.00705868298104231716394088812308	49	0.003675957323156449386643351013
8	0.02994785713943210582733156296875	29	0.00677604918762507010188586831409	50	0.0035913787559500478370102337831
9	0.026195319192354381084421386791	30	0.00651370650812284730543435491913	51	0.0035094305581572561464768652838
10	0.0232267713638315255898237282834	31	0.00626595686228439923663313835635	52	0.0034308917743799833521584009076
11	0.020802448422835092737339437007494	32	0.0060419292643813693488627530891	53	0.003355592960786657954845550916
12	0.018843834270029476997796185314066	33	0.005829136483605679941490670998	54	0.0032832452569887481640058682471
13	0.0171850892701772928117435977	34	0.005629842467990714186627979901	55	0.003213770330088785178848289791
14	0.01575772781467251533618874186074	35	0.00542832893528451519008731	56	0.003146992526699500478370102337831
15	0.01456873156982834768290081624332	36	0.0052670334912966911099429793013366	57	0.003082745334403529166448881158
16	0.013520805425114160406757065099242	37	0.00510149006378389991105364807192	58	0.0030208950717185319419236632624
17	0.012603089064920341784186750099230	38	0.004953523436795114355650260856	59	0.00296131400738989820252999026251
18	0.01179641464031674069699107594413	39	0.00479786037320036161201850477700	60	0.0029038823786392335248003377993
19	0.0110793892701940810970978444744	40	0.00465832833792557730137009150014	61	0.002848489806747938598823224254
20	0.01043901354743920331474642647380	41	0.00452657371108486218721803816238	62	0.002795030435549262035932314709
21	0.009863951628310792521659560050299	42	0.004400781759185510788475743734014	63	0.0027434086895253884272412568284
22	0.0093491203636898660733418480651	43	0.00428170749366313771306099371600	64	0.002693533332139564794259379212

(12)によって H を求めると精度的にやや無駄があり⁽⁵⁾、直接、式(34)によるほうがよい。係数 g_m^n, h_m^n などは別報⁽⁶⁾のアルゴリズムにより数値計算される。

与えられた振動数 ν に対して、式(32)から（試行解で）得た $m = m\{y(\nu)\}$ を、式(34), (14)～(16)に適用すると、

$$H\{m[y(\nu)]\}, \quad b_n = 2H^n / (1 - H^{2n})$$

により $a_n = a_n(\nu)$ が定まり, $C \operatorname{sn}^2(K\theta/\pi)$ が得られ, また式(9)により $D = D\{m[y(\nu)]\}$ が求められるから, 結局, 解 $\xi(\theta)$ [式(4)] が決定される.

5. 解の波形と振幅特性

式(4)による解波形 $\xi(\theta)$ の数値例を図3に示した。また、定数項、基本波を含む調波振幅や最大値、最小値などの周波数特性を図4に示した。ここに、

$$\xi(\theta) = D - 6\nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta \quad \dots\dots\dots (35)$$

と表す。この形から明らかなように、定数項(平均値)、調波振幅は奇数次、偶数次とも、すべて非零($A_0 < 0$, $A_n > 0$, $n > 0$)であるから、解波形はいわゆる(上下)非対称であり $[\xi(\theta) + \xi(\theta + \pi) \neq 0]$ 、偏位が存在する

図 3 解の波形

$[\xi_{\max} + \xi_{\min} \neq 0]$. 余弦フーリエ級数であるから、波形の山や谷の(左右)対称性は保たれており、 $\theta = n\pi$ (n : 整数) に立つ ξ 軸に関して軸対称の波形である。

図3によると、 $\nu \rightarrow 1-$ においては、振幅が減少するとともに、正弦波に漸近し、線形微小振動となる。

逆に $\nu \rightarrow 0+$ に対しては, $\xi_{\max} \rightarrow 1/2$, $\xi_{\min} \rightarrow -1$ となり, 山はとがり, 谷底は平たんになる. $\nu \rightarrow 0+$ の極限では, 波形は, $\theta = 2n\pi$ において -1 のレベルに立つ高さ 1.5 のインパルス列となる.

図4のほうからも、 $\nu \rightarrow 1$ 近傍では、高次の調波振幅 $A_n (n>1)$ は基本波 A_1 よりもはるかに速やかに零に収束し、線形性が強くなること、また $\nu \rightarrow 0$ 近傍

図4 振幅の周波数特性

では、 A_0 を除く（基本波を含む）各調波振幅 A_n の大きさがそりい、しかも ν に比例して、零に収束することがわかる。また、 $\nu \leq 0.4$ では最大値最小値ともにほとんど一定で（それぞれ 0.5, -1）、ただ、 $\nu \rightarrow 0$ とともに、パルス幅が相似的に小さくなること、さらに、-1 のレベルから計った平均値はほぼ ν に比例して、零に収束していることがわかる。

6. $q=q(m)$ の陽表示公式

ここで、上述の式(34)の表示と表2による係数 h_n^m には以下のような意義があることを指摘しておく。

だ円関数論における q 展開⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾は、本報の議論と次のように関連する。

$$\begin{aligned} q &\equiv \exp\{-2K(1-m)/[K(m)/(\pi/2)]\} = H^2, \\ m &= 16q \left[\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\dots+q^{n(n+1)}+\dots}{1+2q+2q^4+2q^9+\dots+2q^{n^2}+\dots} \right]^4 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

何らかの意味の m は、この関係により、 q に変換して扱うほうが都合⁽²⁾⁽¹³⁾のことが多く、たとえば、文献(2)には次式が示されている。

$$\begin{aligned} q^{1/4} &= p(1+2p^4+15p^8+150p^{12}+1707p^{16}+\dots), \\ \text{ただし、} p &\equiv m^{1/4}/2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (37)$$

これは、式(36)の $m=m(q)$ の逆関数であるが、これだけの次数では $m \rightarrow 0$ の場合にしか使えない。 H の定義から明らかに、式(34)は式(37)の高精度表示（相当）を与えることがわかる。なお、最近、式(37)の形の公

式は 257 次まで、 $q=q(m)$ の直接的表現では 128 次まで、それぞれの多項式表示⁽¹⁵⁾が得られていることを特記する。

7. 結 論

二次曲線ばねを有する一自由度系〔式(2)〕の自由振動の厳密解とその計算法を論じた。

(1) 解は、ヤコビのだ円関数 sn を用いて表現される〔2章、式(4)〕。

(2) 与えられる振動数 ν に応ずる、だ円関数の（母数）パラメータ m を定めるには、超越方程式(7)を解く。

(3) m により定められる特性パラメータ J あるいは H により、 sn がフーリエ展開される〔式(10)～(14)〕。それを自乗した形のフーリエ展開の係数（調波振幅）は無級数の形で表示され、その有限項打ち切り誤差も推定評価される〔式(15)～(18)〕。

(4) $m=m(\nu)$ を得る試行解法の際、精度向上（丸め誤差の伝ば/拡大問題、図2）に対する配慮から、 m つまり ν の範囲を3つの領域に分けて扱う（3章）。

(5) 準線形微小振動解（ $m \rightarrow 0$, $\nu \rightarrow 1$ ）の精度低下の障害は、（別報で提案した）べき級数の演算処理の応用により解決される（4章）。

(6) 解の波形と振幅の周波数特性の数値例を示した。低周波強非線形振動はパルス列である。（5章、図3, 4）。

(7) 4章の議論の一部は、だ円関数論に現れる q 展開における $q=q(m)$ の高精度陽表示式を与える（6章）。

おわりに、本研究は文部省科学研究費のご援助を受けたこと、また数値計算には九州大学大型計算機センターを利用させていただいたことを銘記して、関係各位に対するご挨拶としたい。

文 献

- (1) Duffing, G., *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, (1918), 25, Braunschweig.
- (2) McLachlan, N. W., *Ordinary Nonlinear Differential Equations*, (1956), 39, Oxford at the Clarendon Press.
- (3) 前沢（分筆）,（谷口・ほか37名編）, 振動工学ハンドブック,（昭51）, 390, 養賢堂.
- (4) 田村・松田, 機論, 52-478, C（昭61）, 1750.
- (5) 田村・松田, 機論, 53-486, C（昭62）, 261.
- (6) 田村・ほか3名, 機論, 53-495, C（昭62）, 2199.
- (7) 文献(1)の47ページ.
- (8) Reuter, G. E. H., *Quart. J. Mech. & Math.*, II-2（1949）, 198.
- (9) 田村（章）, 機械力学,（昭47）, 172, 森北出版.
- (10) 砂原・ほか2名, 機論, 50-450, C（昭59）, 323.

(11) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., <i>Nonlinear Oscillations</i>, (1979), 59, John Wiley & Sons. (12) Hart, J. F., <i>Computer Approximations</i>, (1968), 150, John Wiley & Sons.	(13) 機械工学便覧, (昭 40), 2-15, 日本機械学会. (14) 友近, だ円関数論 (復刻版), (昭 48), 135/239, 現代工学社. (15) 田村・深田, 九大工学集報, 61-2 (昭 63), 149.
-