多目的ミニマックス計画法と最適設計への応用*

須 永 照 雄^{*1}, 近 藤 英 二^{*1}
高 橋 幸 一^{*2}, 于 曉 波^{*3}

A Multiobjective Minimax Programming Method
and its Application to Optimal Design

Teruo SUNAGA, Eiji KONDO,
Koichi TAKAHASHI, and Xiao Bo YU

A practical approach to nonlinear multiobjective programming problems using penalty functions and the complex search (a derivative free method) was recently proposed by some of the authors. Here, this approach is applied to solving multiobjective minimax programming problems which are modified to multiobjective programming ones by the finite points approximation procedure. Then, a cam design problem is formulated and solved.

Key Words: Systems Engineering, Decision Making, Multiobjective Programming, Minimax Programming, Complex Search, Cam Design

1. 緒 言

従来、「最適化」はいくつかの制約のもとに、ある一つの目的の最適化を意味していた。最近のように複雑なシステムを対象とすると、互いに競合する複数の目的があり、各目的の調整を図る多目的計画法が用いられるようになった⁽¹⁾。しかし、一目的を含めて非線形多目的計画問題の解法は確立されておらず、先に著者らは微分情報を用いない一つの実用的解法を提案した⁽²⁾。

一方、社会システムは協力を図る多目的システムであるとともに、自己の利得のみ図る競争システムでもある。競争者について全く情報がなく、相手が最悪の手を打つと想定したときの最善手、いわゆる「ミニマックス (minimax) 解」が合理的である。設計や計画でも同様な状況が起こり、最悪箇所の改善につながる設計法や計画法は重要である。しかし、ミニマックス計画法の解法はほとんど開発されていない⁽¹⁾。

ここでは多目的ミニマックス計画問題に対し、先に

開発した解法の適用とカムの最適設計への応用を述べる。

2. 多 目 的 問 題

まず、多目的計画問題の定式化と解法の概略を述べる⁽²⁾。

多目的計画問題は複数の目的関数に対し

$$\text{Min}_{x \in X} [f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_M(x)] \dots\dots\dots (1)$$

と表せる。ここで X は等式や不等式制約

$$\left. \begin{aligned} g_p(x) &\leq 0 \quad (p=1, \dots, P) \\ h_q(x) &= 0 \quad (q=1, \dots, Q) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

を満足する領域とする。

多目的問題に対し、対話的満足化法が有効である。これは各目的に対し希求水準 f_i^a を設け、新しい制約

$$f_i(x) \leq f_i^a \quad (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (3)$$

と制約式(2)に対し、満足解の存否を調べる。そのため、正規化係数 ρ_i を用い

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(x) &\equiv \rho_i [f_i(x) - f_i^a] \\ (i=1, \dots, M) &\dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

と定義し、最大成分最小化問題

$$\text{Min}_{x \in X} \text{Max}_{i \in M} \bar{f}_i(x) \dots\dots\dots (5)$$

を解く。ここで M は、 M までの整数集合の意味にも用いている。この問題の最小解を x^* 、最大成分最小化

* 昭和63年10月19日 第66期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和63年5月16日。

^{*1} 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 学生員、九州大学大学院。

^{*3} 九州大学大学院。

値を $\bar{f}^*$ とすると

$$f_i(x^*) \leq f_i^* + \bar{f}^* / \rho_i$$

$$(i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (6)$$

なる関係があり、 x^* はすべての目的より見て、これより優れた解がないことを意味するパレート (Pareto) 最適解となっている。 $\bar{f}^*$ が正であれば満足解がなかったことを意味し、不等式 (6) の右辺で示される新しい希求水準を提案したことになる。意思決定者がこの解に不満であれば、希求水準を対話的に更新することになる。

多目的問題では目的の数 M が多いと調整作業が困難となるので、重要なものを選び目的とし、他は制約に置き換える。このように目的の数が比較的少ない場合の解法はすでに述べた⁽²⁾。ミニマックス問題では多数の目的を持つ場合に相当するので、ここでは目的の数 M が多数のときの解法を述べる。

問題式 (5) は一目的問題に変換できる。すなわち新しい変数 z を導入し

$$\text{Min}_z \dots\dots\dots (7)$$

ただし、次の制約を付加する。

$$\bar{f}_i(x) - z \leq 0 \quad (i=1, \dots, M) \dots\dots\dots (8)$$

一目的のときのペナルティ関数は、添字 $+$ を a が非負なら $a_+ = a$ 、また a が負なら $a_+ = 0$ と定義して

$$\begin{aligned} F(x, z, \bar{f}^{(k)}) &\equiv (z - \bar{f}^{(k)})_+^2 \\ &+ w_0 \sum_{i=1}^M [\bar{f}_i(x) - z]_+^2 \\ &+ w_1 \sum_{p=1}^P g_p^2(x) + w_2 \sum_{q=1}^Q h_q^2(x) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

となり、次のアルゴリズムで計算できる⁽²⁾⁽³⁾。

[アルゴリズム]

初期推定値 $\bar{f}^{(1)}$ を

$$\bar{f}^{(1)} \leq \bar{f}^* \dots\dots\dots (10)$$

ととり、次の計算

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x,z} F(x, z, \bar{f}^{(k)}) &\equiv F(x^{(k)}, z^{(k)}, \bar{f}^{(k)}) \\ &\equiv F^{(k)} \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\bar{f}^{(k+1)} = \bar{f}^{(k)} + \sqrt{F^{(k)}} \dots\dots\dots (12)$$

を繰返せば、 $x^{(k)} \rightarrow x^*$ 、 $\bar{f}^{(k)} \rightarrow \bar{f}^*$ となる。

ここで最小値 $\bar{f}^*$ は未知であるが、 $\bar{f}^{(1)}$ は $\bar{f}^*$ 以下であればよいので容易に設定できる。問題式 (11) の最小化計算では多数の関数を扱うので、微分情報を用いないコンプレックス (complex) 法が有効に利用できる。

3. ミニマックス問題

まず、一目的ミニマックス計画問題

$$\text{MinMax}_{x \in X, y \in Y} f(x, y) \dots\dots\dots (13)$$

の解法を述べる。

関数 $f(x, y)$ は一般的に y について多峰性となり、最大化は大局的でないとはいえない。そこで領域 Y の代わりに Y 内の L 個の有限点

$$y_l \in Y \quad (l=1, \dots, L) \dots\dots\dots (14)$$

を用い問題式 (13) の有限点近似問題

$$\text{MinMax}_{x \in X, l \in L} f(x, y_l) \dots\dots\dots (15)$$

を解く。この場合 y_l の採り方が問題となるが、いずれにしても L は大きな数となる。

次にここでは多目的ミニマックス計画問題として

$$\text{Min}_{x \in X, y \in Y} [\text{Max}_{y \in Y} f_1(x, y), \dots, \text{Max}_{y \in Y} f_M(x, y)] \dots\dots (16)$$

を扱うことにする。有限点近似問題は

$$\text{Min}_{x \in X, l \in L} [\text{Max}_{l \in L} f_1(x, y_l), \dots, \text{Max}_{l \in L} f_M(x, y_l)] \dots\dots (17)$$

となる。各目的の希求水準を f_i^* とすると、式 (4) に相

図 1 カム装置

図 2 カム曲線

当するものは

$$\begin{aligned} & \rho_i [\text{Max}_{i \in L} f_i(x, y_i) - f_i^a] \\ & = \text{Max}_{i \in L} \hat{f}_i(x, y_i) \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ここで

$$\hat{f}_i(x, y_i) = \rho_i [f_i(x, y_i) - f_i^a] \quad (19)$$

である。問題式(5)に相当するものは

$$\text{Min}_{x \in X} \text{Max}_{i \in M, i \in L} \hat{f}_i(x, y_i) \quad (20)$$

となり、最大成分最小化問題に帰着できた。

問題式(20)の解を x^* 、最大成分最小化値を $\hat{f}^*$ とすると

$$\text{Max}_{i \in L} f_i(x^*, y_i) \leq f_i^a + \hat{f}^* / \rho_i \quad (21)$$

となる。 x^* は有限点近似問題(17)の一つのパレート最適解となっている。

4. カムの最適設計

図1に入力変位を回転角、出力変位を直進ストロークとするカム装置の一例を示す。図2は入力変位と出

----- min max $|V|$
 ----- min max $|A|$
 ----- min max $|V \cdot A|$
 ————— pareto optimize

図3 最適カム曲線

力変位の関係を示すカム曲線である。すなわちカムは一定角速度で回転するとして、棒の上昇開始時刻 t_0 、そのときの棒の位置 s_0 とし、上昇完了時 t_1 で棒の位置 s_1 となるカム曲線が示されている。 t と s を線形変換

$$\begin{aligned} T &= (t - t_0) / (t_1 - t_0) \\ S &= (s - s_0) / (s_1 - s_0) \end{aligned} \quad (22)$$

すると、無次元変位 S は無次元時間 T の関数としてカム曲線は

$$S = S(T) \quad (23)$$

と表現できる。このように正規化すると大小種々のカムについてカム曲線の優劣を一般的に評価できることになり都合がよい。

T に関する微分から

$$\begin{aligned} V(T) &= dS/dT && \text{無次元速度} \\ A(T) &= dV/dT && \text{無次元加速度} \\ V(T) \cdot A(T) &&& \text{無次元トルク} \end{aligned} \quad (24)$$

と定義する。

カム曲線 $S(T)$ の条件は

$$0 \leq T \leq 1, \quad S(0) = 0, \quad S(1) = 1 \quad (25)$$

であるが、他の望ましい性質として

図5 加速度曲線

図4 速度曲線

図6 トルク曲線

表 1 カム曲線の目的値

	V_{max}	A_{max}	$(V \cdot A)_{max}$
optimum of V_{max}	V_{max}^* 1.393	8.504	8.575
optimum of A_{max}	1.785	A_{max}^* 5.845	5.990
optimum of $(V \cdot A)_{max}$	1.583	6.894	$(V \cdot A)_{max}^*$ 5.112
pareto optimum	1.570	6.371	5.688

- (1) 速度の連続性(開始時, 完了時を含めて)があること
 (2) 加速度の連続性(開始時, 完了時を含めて)があること
 (3) それらの最大値 V_{max} , A_{max} が小さいこと
 (4) 入力軸駆動トルクを表現する $(V \cdot A)_{max}$ が小さいこと
 などがある⁽⁴⁾.

カム曲線の表現法は種々あるが, ここでは T の八次多項式

$$S(T) = \sum_{j=0}^8 a_j T^j \quad (26)$$

とし, その係数 $a_j (j=0, \dots, 8)$ を最適に決める問題とする。しかし, 条件(1), (2)を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} S(0) &= 0 \\ V(0) &= 0 \\ A(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

となり, 結局カム曲線は6個の係数 $a = (a_j) (j=3, \dots, 8)$ を持つ多項式としてよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} S(T) &= \sum_{j=3}^8 a_j T^j \\ V(T) &= \sum_{j=3}^8 j a_j T^{j-1} \\ A(T) &= \sum_{j=3}^8 j(j-1) a_j T^{j-2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

と表現できる。

著者らの多目的ミニマックス計画問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \min_{a \in X} [\max_{0 \leq T \leq 1} |V(T)|, \max_{0 \leq T \leq 1} |A(T)|, \\ & \max_{0 \leq T \leq 1} |V(T) \cdot A(T)|] \quad (29) \end{aligned}$$

X は次の制約を満足する a の領域である。

$$\left. \begin{aligned} S(1) &= \sum_{j=3}^8 a_j = 1 \\ V(1) &= \sum_{j=3}^8 j a_j = 0 \\ A(1) &= \sum_{j=3}^8 j(j-1) a_j = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

表 2 パレート最適カム曲線の多項式係数

a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
15.7410	-31.9449	0.1905	61.6879	-66.8727	22.1982

問題式(29)の有限点近似問題は

$$\begin{aligned} & \min_{a \in X} [\max_{l \in L} |V(T_l)|, \max_{l \in L} |A(T_l)|, \\ & \max_{l \in L} |V(T_l) \cdot A(T_l)|] \quad (31) \end{aligned}$$

である。ここでは T の区間 $[0, 1]$ を 200 等分して $L=200$ とおき

$$T_l = l/L \quad (l=0, 1, \dots, L) \quad (32)$$

を用いた。

最初に一目的問題を解く。すなわち V_{max} のみを最小化するカム曲線とその速度, 加速度およびトルク曲線が図3~6の一点鎖線である。 A_{max} のみを最小化するカム曲線とその速度, 加速度およびトルク曲線が同じ図の破線である。トルク $(V \cdot A)_{max}$ のみを最小化するカム曲線とその速度, 加速度およびトルク曲線が同じ図の二点鎖線である。

次に最大速度 V_{max} , 最大加速度 A_{max} および最大トルク $(V \cdot A)_{max}$ に対する希求水準を単一目的最適値 V_{max}^* , A_{max}^* , $(V \cdot A)_{max}^*$ とし, 正規化係数 ρ をそれぞれの希求水準の逆数としてパレート最適解を求める。これらすべての希求水準を満足する解はない。この場合のパレート最適カム曲線に対する速度, 加速度およびトルク曲線は図3~6の実線で示されている。

以上の結果を数値的に表1にまとめた。またパレート最適化されたカム曲線の多項式係数を表2に示した。

5. 結 言

多目的ミニマックス計画法は設計や計画に広く利用可能な数理的モデルであるが, その計算法はほとんど開発されていない。この計算法について, 先に開発した多目的計画問題の計算法を適用した解法を提案し, 最も基本的な機械要素の一つであるカムの最適設計へ応用してその実用性を示した。

文 献

- (1) 清水, 多目的と競争の理論, (昭57), 30, 229, 共立出版。
- (2) 須永・ほか3名, 多目的計画問題の実用的解法, 機論, 53-494, C (昭62), 2172。
- (3) Mazeed, M. A., SUNAGA, T. and KONDO, E., *J. Oper. Res. Soc. Jpn.*, 30 (1987), 434。
- (4) 西岡, カム設計の最近の動向, 機械設計, 30-15 (昭61), 31。