磁気浮上支持された多スパンはりの非線形過渡応答*

長 屋 幸 助^{*1}, 加 藤 宗 一^{*2}Nonlinear Transient Response of a Multispan Beam
on Magnetic Supports

Kosuke NAGAYA and Soichi KATO

This paper is concerned with a method for analyzing the dynamic response of a multispan beam on magnetic supports to an unsteady load decaying exponentially with time. The analysis assumes the nonlinear spring system as a group of segments of linear springs, and derives the expression for the nonlinear transient response by use of a method combining the Laplace transformation, Fourier series expansion and residue theorem. Numerical calculations have been carried out for some sample problems, and the effects of nonlinearity due to the magnetic supports have been clarified.

Key Words: Vibration, Continuous System, Transient Response, Magnetic Support, Nonlinear, Multispan Beam

1. 緒 言

近年、電磁気を用いた機器は機械の自動化・高速化に伴い、急速に発展してきている。このなかで電磁気を利用した浮上系は従来用いられている金属ばね等と比較して、非接触のため弾性変形に伴う疲労や変形がないことなど多くの利点を有しているため、現在ではリニアモーターカーをはじめ多くの分野で用いられ始めている。したがって、この系に着目した研究者も多く、多くの論文が発表されている^{(1)~(5)}。しかし、磁気浮上物体は磁石を支持点として、はりにより支えられる場合が多いと思われるが、このような磁気支持連続ばりの研究は行われていないように見受けられる。

一方、連続ばりの振動についても多くの論文が発表されている^{(6)~(9)}。しかし、磁気支持に見られる支持点に非線形性と非対称性を有する連続ばりの非定常振動を取扱った研究は、工業上極めて重要と思われるがいまだ見受けられない。

本報ではこれらにかんがみ、磁気浮上連続ばりの非定常問題の解析方法を提示し、数値計算によりその様

相を明らかにする。具体的に、磁気浮上物体として同種の磁極が対向するように複数個ならべられ、これらの反発力により浮上する連続ばりを取り上げ、磁気反発力をばね力とし、これが磁気ばね特有の非線形性と非対称性を有し、連続ばりの一点に時間とともに指数関数状に変化する集中動荷重が作用する場合を考える。

本問題の解を導く場合、いくつかの解析上の困難さがある。ひとつは非線形性の処理であり、他は多支点と非定常問題の取扱いである。このなかで定常問題であれば、周知のように調和バランス法の適用により非線形性を処理できるが⁽⁶⁾、非定常問題ではこの方法がただちに適用できない。本報ではまず、非線形ばねを断片線形ばねに置き換え、非線形系を断片線形系に近似し、ラプラス変換法による線形理論の適用をはかる。この方法では断片線形の折点で解の接続が必要となるが、本報ではこれを初期条件によって処理し、各瞬間におけるはり内の支点の未知変位・未知速度をフーリエ展開法により処理する。また、連続ばりの処理には、支持点反力を未知外力とし⁽¹⁰⁾、はりと支持ばねとの連続条件より未知力を決定し、留数定理を適用して非線形支持点を有する連続ばりの応答を決定する。

* 昭和63年8月23日 第951回講演会において講演、原稿受付 昭和63年2月2日。

^{*1} 正員、群馬大学工学部(〒376 桐生市天神町1-5-1)。

^{*2} 学生員、群馬大学大学院。

図 1 解析モデル

2. 解 析

本報では、 N 個の同種の磁極を上にした固定磁石に対して、同種の極が対向するように N 個の磁石がはりに取付けられ、磁極間に作用する反発力によりはりが浮上し、さらにはりの一端から任意の位置に時間とともに指数関数状に変化する集中動荷重が作用する場合を考える。この場合、磁気ばねの復元力特性は一般に圧縮側（図 1 の下向き方向）で硬化ばね特性を有し、浮上側（上向き方向）で軟化ばね特性を有する非線形非対称ばねであることが知られている（図 2 の破線参照）。このような系の非定常問題を扱う場合、この非線形性を直接導入して解析解を導くことは一般に困難であるので、本報では図 2 の破線で示される非線形ばねを DB, BA, AC よりなる断片線形領域の結合として考える。したがって各断片線形領域では線形解析が適用でき、点 B, A で時間に関する連続条件を適用すれば、全領域に適用できる解を得ることができる⁽⁵⁾。以上の仮定に基づき、磁気ばね力を断片線形のばね力で置き換え、長さ L のはりの内部の任意の N 個の点 $x = l_n (n=1, 2, 3, \dots, N)$ が磁気支持され、任意の点 $x = a$ に集中動荷重が作用すると考えると、本報で取り扱う解析モデルは図 1 に示すようなものとなる。座標軸 X をはりの中心軸上に、これと垂直にはりの一端から Y 軸をとり、ばねの反力を未知外力と考えこれと動荷重の和を $q(x, t)$ とおくと、この系の運動方程式は次式のように表される。

$$EI(\partial^4 w / \partial x^4) + \rho A (\partial^2 w / \partial t^2) = q(x, t) \quad \dots\dots (1)$$

ここに、 w ははりの曲げ変位、 I は断面二次モーメント、 E は縦弾性係数、 ρ は密度、 A は断面積、 t は時間である。

はり上の任意の点 $x=a$ に任意動荷重 $Q(a, t)$ が作用し、かつはりがその内部の任意の N 個の点 $x = l_n (n=1, 2, 3, \dots, N)$ をばねで支持されているものとする、 $q(x, t)$ は、次式で与えられる。

図 2 磁気反発力特性

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^N R_n(t) \delta(x - l_n) + Q(a, t) \delta(x - a) \quad \dots\dots (2)$$

ここに、 $R_n(t)$ は n 番めのばね反力に等価な未知垂直外力、 $\delta(x - l_n)$, $\delta(x - a)$ はディラックのデルタ関数である。

任意動荷重 $Q(a, t)$ を、次式のような時間に関して指数関数状に変化するものとする。

$$Q(a, t) = P(a) e^{-\eta t} \quad \dots\dots (3)$$

ここで、 $P(a)$ は動荷重の初期値であり、 η は時間変動パラメータである。

式(2)、式(3)を運動方程式(1)に代入し、ラプラス変換 $\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ を施すと、次式となる。

$$EI(\partial^4 \bar{w} / \partial x^4) - EI \gamma^4 \bar{w} = \rho A \{ s w(x, 0) + \dot{w}(x, 0) \} + \sum_{n=1}^N \bar{R}_n(s) \delta(x - l_n) + P(a) \delta(x - a) / (s + \eta) \quad \dots\dots (4)$$

ここで、 $\gamma = a/L$, $\alpha = \sqrt{\lambda}$, $\lambda = i s \sqrt{\rho A L^4 / (EI)}$, $i = \sqrt{-1}$ $w(x, 0)$ は $t=0$ におけるはりの変位、 $\dot{w}(x, 0)$ ははりの速度を示す。

式(4)より同次解 $\bar{w}_1$ は次式のように求められる。

$$\bar{w}_1 = C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x + C_3 \cosh \gamma x + C_4 \sinh \gamma x \quad \dots\dots (5)$$

ここに、 $C_1 \sim C_4$ は積分定数である。

次に、特解 $\bar{w}_2$ を求めるために式(4)にラプラス変換 $\bar{g}(\xi) = \int_0^\infty g(x) e^{-i\xi x} dx$ を施し、部分分数に分解した後、相乗定理 $\mathcal{L}^{-1}[\bar{g}_1(\xi) \bar{g}_2(\xi)] = \int_0^x g_1(x-x') g_2(x') dx'$ を用いてラプラス逆変換を施すと次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{w}_2 = \frac{1}{2\gamma^3 EI} \left[\sum_{n=1}^N \bar{R}_n(s) \{ \sinh \gamma(x-l_n) - \sin \gamma(x-l_n) \} u(x-l_n) + \frac{P(a)}{s+\eta} \{ \sinh \gamma(x-a) \right. \\ \left. - \sin \gamma(x-a) \} u(x-a) + \rho A s \int_0^x w(x', 0) \{ \sinh \gamma(x-x') - \sin \gamma(x-x') \} dx' \right. \\ \left. + \rho A \int_0^x \dot{w}(x', 0) \{ \sinh \gamma(x-x') - \sin \gamma(x-x') \} dx' \right] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 $u(x'-l_n)$ は単位ステップ関数、 $w(x', 0)$ 、 $\dot{w}(x', 0)$ は未知関数であり、式(6)のままでは取扱いが不便であるので、フーリエ展開を施す。すなわち、

$$\begin{aligned} w(x', 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(E_m A_m \cos \frac{2m\pi x'}{L} + B_m \sin \frac{2m\pi x'}{L} \right) \\ \dot{w}(x', 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(E_m C_m \cos \frac{2m\pi x'}{L} + D_m \sin \frac{2m\pi x'}{L} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、

$$\begin{aligned} E_m = 1/2(m=0), = 1(m \neq 0) \\ A_m = \frac{2}{L} \int_0^L w(x', 0) \cos \frac{2m\pi x'}{L} dx', B_m = \frac{2}{L} \int_0^L w(x', 0) \sin \frac{2m\pi x'}{L} dx' \\ C_m = \frac{2}{L} \int_0^L \dot{w}(x', 0) \cos \frac{2m\pi x'}{L} dx', D_m = \frac{2}{L} \int_0^L \dot{w}(x', 0) \sin \frac{2m\pi x'}{L} dx' \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

式(6)に式(7)を代入し、積分を実行し特解を求め、さらに式を無次元化するために次の記号を用いる。

$$\begin{aligned} \bar{w}^* = \bar{w}/L, \bar{R}_n^*(s) = \bar{R}_n(s)/P_0, P(a)^* = P(a)/P_0, w^*(\xi, 0) = w(x, 0)/L, \dot{w}^*(\xi, 0) = \dot{w}(x, 0)/L \\ \xi = x/L, \xi' = x'/L, l_n^* = l_n/L, a^* = a/L, A_m^* = A_m/L, B_m^* = B_m/L, C_m^* = C_m/L, D_m^* = D_m/L \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 L ははりの全長、 P_0 は式を無次元化するために導入した代表荷重である。

一般解は同次解と特解の和であるから、次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \bar{w}^* = \frac{L^2 P_0}{2\lambda \sqrt{\lambda} EI} \left[A_1 \cos \sqrt{\lambda} \xi + A_2 \sin \sqrt{\lambda} \xi + A_3 \cosh \sqrt{\lambda} \xi + A_4 \sinh \sqrt{\lambda} \xi \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^N \bar{R}_n^*(s) \{ \sinh \sqrt{\lambda} (\xi - l_n^*) - \sin \sqrt{\lambda} (\xi - l_n^*) \} u(\xi - l_n^*) + \frac{P(a)^*}{s+\eta} \{ \sinh \sqrt{\lambda} (\xi - a^*) \right. \\ \left. - \sin \sqrt{\lambda} (\xi - a^*) \} u(\xi - a^*) + \frac{\rho A L^2}{P_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_m} \{ E_m \sqrt{\lambda} (s A_m^* + C_m^*) U_m^* + (s B_m^* + D_m^*) V_m^* \} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} U_m^* = (2m\pi)^2 (\cosh \sqrt{\lambda} \xi - \cos \sqrt{\lambda} \xi) - \lambda (\cosh \sqrt{\lambda} \xi + \cos \sqrt{\lambda} \xi) + 2\lambda \cos 2m\pi \xi \\ V_m^* = (2m\pi)^3 (\sinh \sqrt{\lambda} \xi - \sin \sqrt{\lambda} \xi) - 2m\pi \lambda (\sinh \sqrt{\lambda} \xi + \sin \sqrt{\lambda} \xi) + 2\lambda \sqrt{\lambda} \sin 2m\pi \xi \\ \Delta_m = (2m\pi)^4 - \alpha^4 \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

であり、 $A_1 \sim A_4$ は積分定数、 $A_m^* \sim D_m^*$ は式(8)、(9)より求められる。

はりの両端をオーバハングとすると境界条件は、

$$(\partial^2 \bar{w}^* / \partial \xi^2)_{\xi=0} = 0, (\partial^3 \bar{w}^* / \partial \xi^3)_{\xi=0} = 0, (\partial^2 \bar{w}^* / \partial \xi^2)_{\xi=1} = 0, (\partial^3 \bar{w}^* / \partial \xi^3)_{\xi=1} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

一方、任意のばね j の反力とはりに作用する未知外力は等価でなければならない。したがって、はりとばねの連続条件は次のように与えられる。

$$\bar{R}_j^*(s) = -EI k_j^* (\bar{w}^*)_{\xi=l_j^*} / (P_0 L^2) \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$\bar{R}_j^*(s) = \bar{R}_j(s)/P_0, l_j^* = l_j/L, k_j^* = k_j L^3 / (EI)$$

式(12)、式(13)に一般解(10)を代入することにより、未知定数 $A_1 \sim A_4$ 、未知外力 $\bar{R}_n^*(s)$ を決定する連立方程式がマトリックス形式で得られる。すなわち、

$$[D(\lambda)][A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{R}_1^*(s), \dots, \bar{R}_N^*(s)]^T = -[F_1, F_2, F_3, F_4, F_1', \dots, F_N']^T / (s+\eta) \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$|D(\lambda)| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_{11} & \cdots & b_{1n} & \cdots & b_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_{21} & \cdots & b_{2n} & \cdots & b_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_{31} & \cdots & b_{3n} & \cdots & b_{3N} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_{41} & \cdots & b_{4n} & \cdots & b_{4N} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & b'_{11} & \cdots & b'_{1n} & \cdots & b'_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{j1} & a'_{j2} & a'_{j3} & a'_{j4} & b'_{j1} & \cdots & b'_{jn} & \cdots & b'_{jN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{N1} & a'_{N2} & a'_{N3} & a'_{N4} & b'_{N1} & \cdots & b'_{Nn} & \cdots & b'_{NN} \end{vmatrix} \cdots (15)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1, a_{12}=0, a_{13}=1, a_{14}=0, a_{21}=0, a_{22}=-1, a_{23}=0, a_{24}=1, a_{31}=-\cos \sqrt{\lambda}, a_{32}=-\sin \sqrt{\lambda} \\ a_{33} &= \cosh \sqrt{\lambda}, a_{34}=\sinh \sqrt{\lambda}, a_{41}=\sin \sqrt{\lambda}, a_{42}=-\cos \sqrt{\lambda}, a_{43}=\sinh \sqrt{\lambda}, a_{44}=\cosh \sqrt{\lambda} \\ b_{1n} &=0, b_{2n}=0, b_{3n}=\sinh \sqrt{\lambda} (1-l_n^*) + \sin \sqrt{\lambda} (1-l_n^*), b_{4n}=\cosh \sqrt{\lambda} (1-l_n^*) + \cos \sqrt{\lambda} (1-l_n^*) \\ a'_{j1} &= k_j^* \cos \sqrt{\lambda} l_j^*, a'_{j2}=k_j^* \sin \sqrt{\lambda} l_j^*, a'_{j3}=k_j^* \cosh \sqrt{\lambda} l_j^*, a'_{j4}=k_j^* \sinh \sqrt{\lambda} l_j^* \\ b'_{jn} &= k_j^* \{ \sinh \sqrt{\lambda} (l_j^* - l_n^*) - \sin \sqrt{\lambda} (l_j^* - l_n^*) \} u(l_j^* - l_n^*) + 2\lambda \sqrt{\lambda} \delta_{jn} \\ F_1 &=0, F_2=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3 &= P(a)^* \{ \sinh \sqrt{\lambda} (1-a^*) + \sin \sqrt{\lambda} (1-a^*) \} + \{ \rho AL^2 (\eta^* - i\lambda) / (\beta P_0) \} \sum_{m=0}^{\infty} \{ E_m \sqrt{\lambda} (-i\lambda A_m^* / \beta \\ &\quad + C_m^*) U_{ma}^* + (-i\lambda B_m^* / \beta + D_m^*) V_{ma}^* \} / \Delta_m \\ F_4 &= P(a)^* \{ \cosh \sqrt{\lambda} (1-a^*) + \cos \sqrt{\lambda} (1-a^*) \} + \{ \rho AL^2 (\eta^* - i\lambda) / (\beta P_0) \} \sum_{m=0}^{\infty} \{ E_m \sqrt{\lambda} (-i\lambda A_m^* / \beta + C_m^*) U_{mb}^* \\ &\quad + (-i\lambda B_m^* / \beta + D_m^*) V_{mb}^* \} / \Delta_m \\ F_j &= k_j^* [P(a)^* \{ \sinh \sqrt{\lambda} (l_j^* - a^*) - \sin \sqrt{\lambda} (l_j^* - a^*) \} u(l_j^* - a^*) + \{ \rho AL^2 (\eta^* - i\lambda) / (\beta P_0) \} \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \{ E_m \sqrt{\lambda} (-i\lambda A_m^* / \beta + C_m^*) U_{mj}^* + (-i\lambda B_m^* / \beta + D_m^*) V_{mj}^* \} / \Delta_m] \\ U_{ma}^* &= (2m\pi)^2 (\cosh \sqrt{\lambda} + \cos \sqrt{\lambda}) - \lambda (\cosh \sqrt{\lambda} - \cos \sqrt{\lambda}) - 2(2m\pi)^2 \\ U_{mb}^* &= (2m\pi)^2 (\sinh \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}) - \lambda (\sinh \sqrt{\lambda} + \sin \sqrt{\lambda}) \\ U_{mj}^* &= (2m\pi)^2 (\cosh \sqrt{\lambda} l_j^* - \cos \sqrt{\lambda} l_j^*) - \lambda (\cosh \sqrt{\lambda} l_j^* + \cos \sqrt{\lambda} l_j^*) + 2\lambda \cos 2m\pi l_j^* \\ V_{ma}^* &= (2m\pi)^3 (\sinh \sqrt{\lambda} + \sin \sqrt{\lambda}) - 2m\pi \lambda (\sinh \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}) \\ V_{mb}^* &= (2m\pi)^3 (\cosh \sqrt{\lambda} + \cos \sqrt{\lambda}) - 2m\pi \lambda (\cosh \sqrt{\lambda} - \cos \sqrt{\lambda}) - 2(2m\pi)^3 \\ V_{mj}^* &= (2m\pi)^3 (\sinh \sqrt{\lambda} l_j^* - \sin \sqrt{\lambda} l_j^*) - 2m\pi \lambda (\sinh \sqrt{\lambda} l_j^* + \sin \sqrt{\lambda} l_j^*) + 2\lambda \sqrt{\lambda} \sin 2m\pi l_j^* \end{aligned} \cdots (16)$$

ここに, $\eta^* = \beta \eta$, $s = -i\lambda/\beta$, $\beta = \sqrt{\rho AL^4/(EI)}$ で, 式中 δ_{jn} はクロネッカのデルタを, N は支持点の数を表す. 式(15)は式(14)の係数行列式であり, これを零としたものが本問の固有値を与える式となる. すなわち,

$$|D(\lambda)| = 0 \cdots (17)$$

が本問の振動数方程式である.

未知定数 $A_1, A_2, A_3, A_4, \bar{R}_1^*(s), \cdots, \bar{R}_N^*(s)$ は式(15)で表される行列式 $|D(\lambda)|$ の n 列の要素を $(F_1, F_2, F_3, F_4, F'_1, \cdots, F'_N)$ で置き換えたもので, これらを $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, \bar{R}_1^*(s), \cdots, \bar{R}_N^*(s)$ とすると, 変位 $\bar{w}^*$ は次式のように表される.

$$\bar{w}^* = -\frac{L^2 P_0 \{ H_1(\xi, \lambda) + H_2(\xi, \lambda) |D(\lambda)| \}}{2\lambda \sqrt{\lambda} EI(s + \eta) |D(\lambda)|} - \frac{L^2 P_0}{2\lambda \sqrt{\lambda} EI} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_3(\xi, \lambda)}{\Delta_m} \cdots (18)$$

ここに,

$$\begin{aligned} H_1(\xi, \lambda) &= A'_1 \cos \sqrt{\lambda} \xi + A'_2 \sin \sqrt{\lambda} \xi + A'_3 \cosh \sqrt{\lambda} \xi + A'_4 \sinh \sqrt{\lambda} \xi + \sum_{n=1}^N \bar{R}_n^*(s) \{ \sinh \sqrt{\lambda} (\xi - l_n^*) \\ &\quad - \sin \sqrt{\lambda} (\xi - l_n^*) \} u(\xi - l_n^*) \\ H_2(\xi, \lambda) &= -P(a)^* \{ \sinh \sqrt{\lambda} (\xi - a^*) - \sin \sqrt{\lambda} (\xi - a^*) \} u(\xi - a^*) \\ H_3(\xi, \lambda) &= -\rho AL^2 \{ E_m \sqrt{\lambda} (s A_m^* + C_m^*) U_m^* + (s B_m^* + D_m^*) V_m^* \} / P_0 \end{aligned} \cdots (19)$$

任意時間 t におけるはりの変位は式(18)をラプラス逆変換すれば求められる。しかし、このラプラス逆変換をそのままに求めることは一般に困難であるので、本報では留数定理を用いて解を求める。

本問の場合は式(18)から明らかなように式(17)の振動数方程式より得られる根、すなわちこの系の振動数および $s = -\eta$, $\Delta_m = 0$ の三つが特異点となる。 $|D(\lambda)| = 0$ のときの留数を R_1 とすれば、 R_1 は $s = \pm i\omega_p$ の極に対する留数の和で求まり、このときの λ を λ_1, λ_2 とすれば、 R_1 は次式となる。

$$R_1 = -\frac{L^2 P_0}{2EI} \sum_{k=1}^2 \frac{H_1(\xi, \lambda_k) e^{-i\lambda_k \tau}}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k} (\lambda_k + i\eta^*) \sum_{r=1}^{4+N} |D_r(\lambda_k)|} \quad (20)$$

$s = -\eta$ の極に対する留数を R_2 とし、このときの λ を λ_3 とすると留数 R_2 は次のように求まる。

$$R_2 = -\frac{L^2 P_0}{2EI \lambda_3 \sqrt{\lambda_3}} \left\{ \frac{H_1(\xi, \lambda_3)}{|D(\lambda_3)|} + H_2(\xi, \lambda_3) \right\} e^{-\eta^* \tau} \quad (21)$$

一方、 $\Delta_m = 0$ のときの留数を R_3 とすると、 R_3 は次のように求まる。

$$R_3 = 0$$

これは、外力に関してはりの初期条件が関係しないことを示している。

はりの変位すなわち本問の解はこれら三つの留数の和で求まり、次式となる。

$$w^* = -\frac{L^2 P_0}{2EI} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{H_1(\xi, \lambda_k) e^{-i\lambda_k \tau}}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k} (\lambda_k + i\eta^*) \sum_{r=1}^{4+N} |D_r(\lambda_k)|} + \frac{1}{\lambda_3 \sqrt{\lambda_3}} \left\{ \frac{H_1(\xi, \lambda_3)}{|D(\lambda_3)|} + H_2(\xi, \lambda_3) \right\} e^{-\eta^* \tau} \right] \quad (22)$$

ここで、 $\tau = t/\beta$, $\sum_{r=1}^{4+N} |D_r(\lambda)| = d|D(\lambda)|/d\lambda$ であり、行列式 $|D(\lambda)|$ を一列ずつ微分した行列式の値の和である。

一方、はりの速度は、

$$\dot{w}^* = (\partial w^* / \partial \tau) / \beta \quad (23)$$

(a) 過渡応答

(b) たわみ曲線

$l_1^* = 0.1$, $l_2^* = 0.9$, $\eta^* = 1.0$, $P(a)^* = 1.0$, $a^* = 0.5$
 $k_{n1}^* = 10$, $k_{n2}^* = 20$, $k_{n3}^* = 5$, $W_1^* = 0.02$, $W_2^* = -0.02$
 —Linear; ---Nonlinear

図3 単スパンはり

(a) 過渡応答

(b) たわみ曲線

$l_1^* = 0.1$, $l_2^* = 0.5$, $l_3^* = 0.9$, $\eta^* = 1.0$, $P(a)^* = 1.0$, $a^* = 0.5$
 $k_{n1}^* = 10$, $k_{n2}^* = 20$, $k_{n3}^* = 5$, $W_1^* = 0.02$, $W_2^* = -0.02$
 —Linear; ---Nonlinear

図4 2スパン連続はり

で求められ、次式を得る。

$$w^* = \frac{L^2 P_0}{2EI\beta} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{i\lambda_k H_1(\xi, \lambda_k) e^{-i\lambda_k \tau}}{\lambda_k \sqrt{\lambda_k} (\lambda_k + i\eta^*) \sum_{r=1}^{4+N} |D_r(\lambda_k)|} + \frac{\eta^*}{\lambda_3 \sqrt{\lambda_3}} \left\{ \frac{H_1(\xi, \lambda_3)}{|D(\lambda_3)|} + H_2(\xi, \lambda_3) \right\} e^{-\eta^* \tau} \right] \dots \dots \dots (24)$$

非線形ばねを用いた場合、式(22)で示される解は部分線形領域では成立するが、それ以外の部分では解は変化する。しかし、図2のように非線形復元力特性すなわち非線形ばねのばね定数を $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ の三つの部分に分けて考えると、部分的には線形近似が成立し、点A、点Bで解を接続することにより解の一般形が得られる。この場合、解は点A、点Bすなわち変位が w_1, w_2 になった時に次の系に切り替わるわけであるが、本報では非定常であるのでこのときの時間をあらかじめ求めておくことは非常に手間のかかることである。そこで、本報では時間軸を小さくきざみ各時刻における変位を計算し、それによりはりのばね接続点がどの領域にあるかを判定しながら、順次次の応答を計算し全体の時刻歴応答を決定する。この場合、点A、点Bでの解を解析接続する方法が一般的であるが、本報の場合は計算時間短縮のため、式(22)で求まる変位が現在の線形領域を越えたならば、時刻を刻み幅だけ

もどし、ばね定数を変化させ再び計算し、時刻歴応答を求めてゆく。

3. 数 値 計 算 例

本報では、はり材に鋼を仮定しその物理的諸定数には、 $E=20.6 \text{ GPa}$, $\rho=7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $I=0.004 \text{ cm}^4$, $A=1.2 \text{ cm}^2$, $L=100 \text{ cm}$ を用い、はりとは同じばね定数を持つばねで支持されていると仮定し、本解析結果に基づき数値計算を行う。

なお、図中 $k_{nj} (n=1, 2, \dots, N; j=1, 2, 3)$ は $k_{nj} = k_{nj} \cdot L^3 / (EI)$ で示される無次元ばね定数であり、また n は支持点を表し、 j は磁気ばねの断片線形区間を表す(図2参照)。 W_1^*, W_2^* は $W_1^* = w_1/L$, $W_2^* = w_2/L$ で示される無次元変位であり、 w_1, w_2 は非線形ばねの折点変位である(図2参照)。

図3は、単スパンはりの、図4は2スパンはりの応答曲線(a)、およびたわみ曲線(b)を示したものであ

(a) 過渡応答

(b) たわみ曲線

$l_1^*=0.1, l_2^*=0.3, l_3^*=0.5, l_4^*=0.7, l_5^*=0.9, \eta^*=1.0$,
 $P(a)^*=1.0, a^*=0.5, k_{n1}^*=5, k_{n2}^*=10, k_{n3}^*=2$,
 $W_1^*=0.01, W_2^*=-0.01$
 —Linear; ---Nonlinear

図5 4スパン連続はり

(a) 過渡応答

(b) たわみ曲線

$l_1^*=0.1, l_2^*=0.9, \eta^*=1.0, P(a)^*=1.0, a^*=0.51$,
 $k_{n1}^*=10, k_{n2}^*=12, k_{n3}^*=9, W_1^*=0.02, W_2^*=-0.02$
 —Linear; ---Nonlinear

図6 単スパンはり (非線形性小)

る。応答曲線の縦軸は無次元変位 w^* を、横軸に無次元時間 τ を示し、図中時間に無関係な一点鎖線で示される値は連続ばりに静荷重を受ける場合の変位である。本報の取扱いによれば静的解をあらかじめ求めておく必要はないが、動的荷重を受ける場合の結果と静的結果との比較ができるよう静荷重を受けるはりの結果も別に計算して図示した。たわみ曲線の縦軸は無次元変位 w^* 、横軸ははりの一端からの無次元長さ ξ である。図より応答曲線の立ち上がり近くでは線形・非線形の応答は一致しているが、その後非線形応答は振幅・周期が変化し、2スパンの場合は1スパンの場合と比べ振幅・周期ともに小さな運動となっている。これは、支持点を増やすことによりはり剛性が増したためである。また、線形第一波の最大振幅は静的解の約2倍になっている。さらに、はりは左右対称に変形が進んでいくことがわかる。

図5は4スパン連続ばりの応答曲線(a)、およびたわみ曲線(b)である。非線形応答においては高次振動の影響が顕著に現れ、応答曲線が複雑になっている。

図6は単スパンはりの2支点を非線形性の小さなばねで支持された場合、図7は2支点を非線形性の大きな

(a) 過渡応答

(b) たわみ曲線

$l_1^*=0.1, l_2^*=0.9, \eta^*=1.0, P(a)^*=1.0, a^*=0.51, k_{n1}^*=10, k_{n2}^*=30, k_{n3}^*=3, W_1^*=0.02, W_2^*=-0.02$
—Linear; ---Nonlinear

図7 単スパンはり (非線形性大)

(a) 過渡応答

(b) たわみ曲線

$l_1^*=0.1, l_2^*=0.3, l_3^*=0.5, l_4^*=0.7, l_5^*=0.9, \eta^*=1.0, P(a)^*=1.0, a^*=0.51, k_{n1}^*=5, k_{n2}^*=7, k_{n3}^*=4, W_1^*=0.01, W_2^*=-0.01$
—Linear; ---Nonlinear

図8 4スパン連続ばり (非線形性小)

(a) 過渡応答

(b) たわみ曲線

$l_1^*=0.1, l_2^*=0.3, l_3^*=0.5, l_4^*=0.7, l_5^*=0.9, \eta^*=1.0, P(a)^*=1.0, a^*=0.51, k_{n1}^*=5, k_{n2}^*=10, k_{n3}^*=2, W_1^*=0.01, W_2^*=-0.01$
—Linear; ---Nonlinear

図9 4スパン連続ばり (非線形性大)

なばねで支持された場合、図8は4スパンはりの5支点を非線形性の小さなばねで支持された場合、図9は5支点を非線形性の大きなばねで支持された場合の応答曲線(a)およびたわみ曲線(b)である。

これらより非線形性の大きいはりのほうが荷重の減衰に伴う減衰効果が顕著に現れており、また変形が非対称となっていることが認められる。本問の場合、荷重ははり中心からわずかに偏心して作用しており($a^*=0.51$)、本来非対称性の影響はわずかと思われがちであり、また線形解はその様相を呈しているが、非線形ではこの常識に反して大きな非対称性(回転運動)が現れている。このことは図2に見られるように支持点の非線形性に起因するもので、例えばある支点的変位がBA領域(図2参照)のA点近くにあり、他の支点的変位がAC領域のA点近くに來たとすると、その瞬間の各支点でのばね定数が異なるため、系はこの時点で荷重による非対称性のみならず支持点のばね定数の非対称をも有することになる。ついで変形がさらに進めば、はりはこの初期条件として次の運動を誘起するので、この非対称性は次第に増幅され、はりの運動はわずかな荷重の非対称性により大きな非対称運動へと発展していく。本解では非線形ばねを折れ線で近似しているため、この現象はかなり顕著に現れているが、実際の系のばね定数は図2の破線のようにであり、図7~9よりは非対称性の小さいものとなろうが、いずれにしても非線形支持ばりではこのような現象が避けられないことがわかる。このことは磁気浮上ばり上の荷重または質量のわずかな非対称性の系の運動に与える感度が極めて大きいことを意味している。この点が線形解では得られない非線形解析特有の現象といえよう。

なお、これらの数値計算では $|D(\lambda)|=0$ とする振動数方程式の根が必要となるが、本報ではこれらの解を

ニュートン・ラプソン法を適用して数値的に求めた。また、本報における数値計算はすべて群馬大学情報処理センター HITAC M-240 H により行った。

4. 結 言

本報は、時間とともに指数関数状に変化する非定常荷重を受ける多スパン磁気浮上ばりの動応答問題を、磁気浮上支持点の非線形性ならびに非対称性を考慮して解析したものである。その内容を要約すると、

(1) 内部の任意の位置を任意個数の磁気ばねで支持された連続ばりの非定常応答解を、断片線形近似、ラプラス変換法、フーリエ展開法ならびに留数定理を用いて誘導し、この種問題の一般解法を提案した。

(2) 具体的数値例として、1スパン、2スパン、4スパン連続ばりを取り上げ数値結果を示し、動的挙動の様相を解明した。その結果、支持点の数および位置がはりの動的挙動応答に大きな影響を持つことが明らかにされた。

とくにこの種非線形性の大きな複数支点を有するはりでは、振動中に生ずる変位のわずかな非対称性が、支持点の非線形性と連成し、次第に増大する回転運動を誘起することが明らかにされた。

文 献

- (1) 永井・井口, 機論, 45-400, C (昭54), 1332.
- (2) 藤田・増川・作井・高安, 電気学会論文誌, B, 102-9 (昭57), 620.
- (3) 近田・吉田, 計測自動制御学会論文集, 17-7 (昭56), 713.
- (4) 山村・伊藤, 電気学会論文誌, B, 95-4 (昭50), 209.
- (5) 長屋・大月, 機論, 53-492, C (昭62), 1720.
- (6) 佐藤・鹿内・南野, 機論, 51-471, C (昭60), 2807.
- (7) 辻岡, 機論, 45-392, C (昭54), 401.
- (8) 飯田, 機論, 37-302 (昭46), 1845.
- (9) Hirano, Y. and Nagaya, K., *J. Sound Vib.*, 77-4 (1981), 513.
- (10) 長屋・平野, 機論, 42-363 (昭51), 3378.

討 論

〔質問〕 長 南 征 二〔東北大学工学部〕

磁石は一般に有限な面積を持っているから、ばねで近似する場合は(1)集中並進ばね+集中回転ばねかあるいは(2)部分的に置かれた弾性床で近似すべきではないか。

〔回答〕 磁石は有限な面積を有するので、ご指摘のように磁石の大きさを考慮したほうが厳密となる。磁石の場合、復元力は距離の関数で与えられ、回転の場合は互いの極が近付いた側ではばね定数が大とな

り、離れた側ではばね定数が小となる。このことを解析で厳密に考慮するのはかなり困難となるが、一般には磁石寸法は比較的小さく、回転による復元モーメントの影響は復元力のそれに比べ小さいと考えられるし、また回転量も本例の場合はそれほど大きくなりないので、この影響を無視しても実用上は差し支えないと考えられる。したがって本報では並進ばねのみを考えて解析を行った。

〔質問〕 辻 岡 康〔慶應義塾大学理工学部〕

(1) はりに取付けられる磁石の質量の影響を無視した理由はなにか。

これを無視すると、磁気支持ではなく単なる非線形ばね支持となるのではないか。

(2) 運動方程式をラプラス変換した後で無次元化を行っているが、その意図はなにか。

運動方程式をまず無次元化し、その後にラプラス変換すると、無次元時間、無次元ばね常数などが容易に導かれるかどうか。

〔回答〕 (1) ご指摘のようにはりに取付けられた磁石の質量を考慮したほうが厳密であったと考えて

いる。しかし近時強力な希土類磁石の実用化により、かなり小さな磁石で強い磁気力を得ることができるようになったので、本報でははりの質量に比べ磁石の質量が小さいとして解析を行った。もちろん質量の影響を解析にとり入れることは容易なことで、ばねとはりの連続条件式に慣性項を加えると、本報と同様にして解が得られる。この影響については別の機会に検討していきたいと考えている。

(2) 式の無次元化の順序についてはとくに意図はない。ご指摘のように運動方程式を無次元化してからラプラス変換を施しても、本報とまったく同じ結果が得られる。