曲がった放射辺を有する片持扇形板の定常応答*

田 中 克 明^{*1}, 山 田 元^{*1}
小 林 幸 徳^{*1}, 北 島 有 二^{*2}Steady-State Response of a Damped Cantilever Annular Sector Plate
with Curved Radial EdgesKatsuaki TANAKA, Gen YAMADA,
Yukinori KOBAYASHI, and Yuji KITAJIMA

A steady-state response is presented for a damped cantilever annular sector plate with curved radial edges by the Ritz method. The plate is transformed into a regular sector plate with a unit outer radius by a transformation of variables. The transverse displacement of the transformed plate is approximately expressed in terms of the power functions, and the driving-point impedance is derived analytically. By the application of the present method, the response curves of the cantilever annular sector plate with curved radial edges, driven at an arbitrary point, are calculated numerically. The effects of the shifting angle, damping factor and the location of the driving point on the steady-state responses are clarified quantitatively for the cantilever annular sector plate with curved radial edges.

Key Words: Vibration, Cantilever Annular Sector Plate, Curved Radial Edge, Response, Driving-Point Impedance, Mode Shape

1. は し が き

本論文では、曲がった放射辺を有し、減衰を持った片持扇形板の任意の一点に調和起振力が作用するときの定常応答を、リッツ法を用いて解析する。曲線辺を有する扇形板は、通信衛星のパラボラアンテナ、送風機や扇風機の羽根、プロペラ等、産業界の各分野で広く用いられている。構造物の軽量化に伴って、これらの振動問題はますます重要となり、その振動特性を論じている研究も数多く報告されているが、ここで取扱うような、曲がった放射辺を有する片持扇形板の振動⁽¹⁾に関しては著者らの研究があるにすぎない。一方、長方形板の応答に関して、Warburton⁽²⁾⁻⁽⁴⁾はリッツ法を用いて、分布加振力を受ける正方形板の応答変位およびモーメントを求めており、また、一ノ宮ら⁽⁵⁾はこの方法を応用して、減衰を有する片持四辺形板の定常応答を求めている。しかし、任意の一点に作用する調和力によって起振される放射曲線辺を有する減衰片持扇形板の研究は見当たらない。

この研究のため曲がった放射辺を有する扇形板を変数変換によって単位外半径を有する扇形板に変換する。変換された板の変位をべき関数で近似することにより、運動エネルギーとひずみエネルギーを解析的に求める。これらをラグランジュの方程式に代入して未知の時間関数に関する方程式を導き、これを解くことにより任意の一点で調和起振される曲がった扇形板の定常応答を決定する。これをもとに数値計算を実施し、駆動点インピーダンスと変位振幅分布を求め、扇形板の曲がり角、減衰比あるいは起振点の位置などが定常応答に及ぼす影響について定量的に明らかにする。

2. 理 論 解 析

板の中央面内に直角座標 (x, y) をとることにより、ひずみエネルギーは次のマトリックス形で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2} D \iint_S \{W_{xy}\}^T [L] \{W_{xy}\} dx dy \\ \{W_{xy}\}^T &= \{W_{,xx} \quad W_{,yy} \quad W_{,xy}\} \\ [L] &= \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

* 昭和63年10月2日 北海道支部第29回講演会において講演。原稿受付 昭和62年11月24日。

^{*1} 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

^{*2} 准員、(株)リコー (〒107 東京都港区南青山1-15-5)。

ここで、 W は板の面外変位、 D は曲げこわさで、縦弾性係数 E 、ポアソン比 ν 、板厚 h を用いて、 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ で与えられる。

図1は曲がった放射辺を有する非対称な片持扇形板を、無次元化された極座標 $x/a = r \cos \theta$ 、 $y/a = r \sin \theta$ を用いて示している。ここで、 a は扇形板の外半径、 b は内半径であり、変数 $\beta = b/a$ は扇形板の内外半径比、 α は開き角、 α_3 は曲がり角を意味する。このとき、ベクトル $\{W_{xy}\}$ は次のように表される。

$$\{W_{xy}\} = (1/a^2)[M]\{W_{\theta\theta}\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、ベクトル $\{W_{\theta\theta}\}$ とマトリックス $[M]$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{W_{\theta\theta}\}^T &= \{W_{,\theta\theta} \quad W_{,\theta\theta} \quad W_{,\theta\theta} \quad W_{,\theta\theta} \quad W_{,\theta\theta}\} \\ [M] &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta & -\frac{1}{r} \sin 2\theta & \frac{1}{r} \sin^2 \theta & \frac{1}{r^2} \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta & \frac{1}{r} \sin 2\theta & \frac{1}{r} \cos^2 \theta & -\frac{1}{r^2} \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & -\frac{1}{2r^2} \sin 2\theta & \frac{1}{r} \cos 2\theta & -\frac{1}{2r} \sin 2\theta & -\frac{1}{r^2} \cos 2\theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

曲がった放射辺を有する扇形板を、変数変換 $r = r(\zeta, \varphi)$ 、 $\theta = \theta(\zeta, \varphi)$ を施すことによって標準形の扇形板に変換する。この場合、ベクトル $\{W_{\theta\theta}\}$ は

$$\{W_{\theta\theta}\} = [N]\{W_{\zeta\zeta}\}, \quad \{W_{\zeta\zeta}\}^T = \{W_{,\zeta\zeta} \quad W_{,\varphi\varphi} \quad W_{,\zeta\varphi} \quad W_{,\zeta} \quad W_{,\varphi}\} \dots\dots\dots (4)$$

と表され、マトリックス $[N]$ は次式で与えられる。

$$[N] = \begin{bmatrix} r_{,\zeta}^2 & \theta_{,\zeta}^2 & 2r_{,\zeta}\theta_{,\zeta} & r_{,\zeta\zeta} & \theta_{,\zeta\zeta} \\ r_{,\varphi}^2 & \theta_{,\varphi}^2 & 2r_{,\varphi}\theta_{,\varphi} & r_{,\varphi\varphi} & \theta_{,\varphi\varphi} \\ r_{,\zeta}r_{,\varphi} & \theta_{,\zeta}\theta_{,\varphi} & r_{,\zeta}\theta_{,\varphi} + r_{,\varphi}\theta_{,\zeta} & r_{,\zeta\varphi} & \theta_{,\zeta\varphi} \\ 0 & 0 & 0 & r_{,\zeta} & \theta_{,\zeta} \\ 0 & 0 & 0 & r_{,\varphi} & \theta_{,\varphi} \end{bmatrix}^{-1} \dots\dots\dots (5)$$

図1に示される、内周が固定され、外周が自由な非対称な曲線辺を有する片持扇形板の場合、変数変換式 $r = \zeta$ 、 $\theta = \varphi + \alpha_3((\zeta - \beta)/(1 - \beta))^2$ を適用することによって、式(5)は

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & \left\{2\alpha_3 \frac{\zeta - \beta}{(1 - \beta)^2}\right\}^2 & -4\alpha_3 \frac{\zeta - \beta}{(1 - \beta)^2} & 0 & -2\alpha_3 \frac{1}{(1 - \beta)^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha_3 \frac{\zeta - \beta}{(1 - \beta)^2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\alpha_3 \frac{\zeta - \beta}{(1 - \beta)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

となる。したがって、ひずみエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \frac{D}{a^2} \int_0^a \int_{\beta}^1 \{W_{\zeta\zeta}\}^T [N]^T [M]^T [L] [M] [N] \{W_{\zeta\zeta}\} \zeta d\zeta d\varphi \dots\dots\dots (7)$$

と書ける。ここで、 J は変換のヤコビアンで、 $J = r_{,\zeta} \cdot \theta_{,\varphi} - r_{,\varphi} \cdot \theta_{,\zeta} = 1$ である。また、運動エネルギーは次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint_S W_{,\zeta}^2 dx dy = \frac{1}{2} \frac{D}{a^2} \Omega^2 \int_0^a \int_{\beta}^1 W_{,\zeta}^2 \zeta d\zeta d\varphi \dots\dots\dots (8)$$

ここで ρ は密度、 ω は円振動数、 $\tau = \omega t$ は無次元時間であり、 Ω は

$$\Omega^2 = \rho h a^4 \omega^2 / D \dots\dots\dots (9)$$

で定義される無次元振動数パラメータである。

変換された扇形板の変位は、許容関数 $Z_m(\zeta)$ 、 $\Phi_n(\varphi)$ 、および未知の時間関数 $q_{mn}(\tau)$ を用いて、近似的に次式で表せる。

$$W = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N Z_m(\zeta) \cdot \Phi_n(\varphi) \cdot q_{mn}(\tau) \dots\dots\dots (10)$$

許容関数として、次のようなべき関数を用いる。

$$Z_m(\zeta) = (\zeta - \beta)^{m+2}, \quad \Phi_n(\varphi) = \varphi^n \dots\dots\dots (11)$$

式(11)は、扇形板の固定部の境界条件 $W = W_{,\zeta} = 0$ を満足している。式(10)を式(7)および(8)へ代入することにより、ひずみエネルギーおよび運動エネルギーは、それぞれ

$$U = \frac{1}{2} \frac{D}{a^2} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N K_{mn}^{(kl)} \cdot q_{mn}(\tau) \cdot q_{kl}(\tau) \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{D}{a^2} \Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^N M_{mn}^{(kl)} \cdot \dot{q}_{mn}(\tau) \cdot \dot{q}_{kl}(\tau) \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。ここで $q(\tau)$ に付した記号 $\cdot$ は、 τ に関する微分を表し、係数 $K_{mn}^{(kl)}$ および $M_{mn}^{(kl)}$ は、次の二重積分で与えられる。

$$K_{mn}^{(kl)} = \int_0^a \int_\beta^1 \{\Psi_{mn}\}^T \cdot [N]^T \cdot [M]^T \cdot [L] \times [M][N] \{\Psi_{kl}\} \zeta J d\zeta d\varphi \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$M_{mn}^{(kl)} = \int_0^a \int_\beta^1 Z_m \cdot \Phi_n \cdot Z_k \cdot \Phi_l \cdot \zeta J d\zeta d\varphi \quad \dots\dots\dots (15)$$

式(14)中のベクトル $\{\Psi_{mn}\}$ は

$$\{\Psi_{mn}\}^T = \{Z_m'' \cdot \Phi_n, Z_m' \cdot \Phi_n', Z_m' \cdot \Phi_n, Z_m \cdot \Phi_n'\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

であり、関数 $Z_m(\zeta)$, $\Phi_n(\varphi)$ に付した記号' は φ に関する微分を表す。式(14)の二重積分は解析的には求められないのでガウス・ルジャンドルの積分公式を用いて数値積分により求める。

運動エネルギーとひずみエネルギーを次のラグランジュの方程式に代入する。

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{kl}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{kl}} + \frac{\partial U}{\partial q_{kl}} = Q_{kl}(\tau) \quad (k=1, 2, \dots, M; l=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここで、板に作用する単位面積当りの力を Q とすれば外力 $Q_{kl}(\tau)$ は仮想仕事の原理により

$$Q_{kl}(\tau) = \int_0^a \int_\beta^1 a^2 Q(\zeta, \varphi, \tau) \times Z_k \cdot \Phi_l \cdot \zeta \cdot J \cdot d\zeta d\varphi \quad \dots\dots\dots (18)$$

で与えられる。以下においては、減衰を考慮して板の運動方程式を次のマトリックス形で表す。

$$\Omega^2 [M_{mn}^{(kl)}] \{\dot{q}_{mn}(\tau)\} + 2\eta \Omega [K_{mn}^{(kl)}] \{\dot{q}_{mn}(\tau)\} + [K_{mn}^{(kl)}] \{q_{mn}(\tau)\} = \frac{a^2}{D} \{Q_{mn}(\tau)\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで $\eta = C/(2\sqrt{\rho h D})$ は減衰比で、 C は粘性減衰係数を表す。板に調和外力 $\{Q_{mn}(\tau)\} a/D = \{p_{mn}\} e^{j\tau}$ が作用するとき、式(19)の定常応答は次式のように表され

る。

$$\{q_{mn}(\tau)\} = [(1 + 2j\eta\Omega)[K_{mn}^{(kl)}] - \Omega^2 [M_{mn}^{(kl)}]^{-1} \times a \{p_{mn}\} e^{j\tau} \quad \dots\dots\dots (20)$$

いま変換された扇形板の任意の一点 (ζ_1, φ_1) に、大きさ F の外力 $F \cdot e^{j\tau}$ が作用する場合を考えると、式(18)の一般力は、ディラックのデルタ関数 $\delta(\zeta)$, $\delta(\varphi)$ を用いて

$$p_{mn} = \int_0^a \int_\beta^1 F \cdot \delta(\zeta - \zeta_1) \cdot \delta(\varphi - \varphi_1) \times Z_m \cdot \Phi_n \cdot \zeta \cdot J \cdot d\zeta d\varphi = F \cdot Z_m(\zeta_1) \cdot \Phi_n(\varphi_1) \cdot \zeta_1 \cdot J(\zeta_1, \varphi_1) \quad \dots\dots\dots (21)$$

と書ける。この点における駆動点インピーダンス Z_v は、次式で与えられる。

$$\left| \frac{Z_v}{j\omega m_s} \right| = \left| \frac{F \cdot e^{j\omega t}}{j\omega m_s W_{11}(a/D)} \right| = \left| \frac{1}{\epsilon \Omega^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N Z_m(\zeta_1) \cdot \Phi_n(\varphi_1) \cdot \{R_{mn}\}} \right| \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 m_s は扇形板の全質量、係数 ϵ は、 $\epsilon = \alpha(1 - \beta^2)/2$ であり、ベクトル $\{R_{mn}\}$ は

$$\{R_{mn}\} = [(1 + 2j\eta\Omega)[K] - \Omega^2 [M]]^{-1} \times Z_m(\zeta_1) \cdot \Phi_n(\varphi_1) \cdot \zeta_1 \cdot J(\zeta_1, \varphi_1) \quad \dots\dots\dots (23)$$

で与えられる。

3. 数値計算結果と考察

本方法は変数変換が可能な種々の曲線辺を有する扇形板に適用することができるが、ここでは図1に示す非対称な片持扇形板について検討する。

数値計算に当たっては、式(10)で与えられる二重級数を、適当な項数で打ち切らなければならないが、ここでは固有値の収束状況を一つの目安とした。表1は、非対称な放射曲線辺を有する扇形板の固有値の収束状況を示す。項数が増加するに従って固有値は、有効数字2~3けたの範囲で一定の値に収束している。本論文では実用上の精度を考慮して、6×6の項数を採用した。なお、計算結果は、ガウス・ルジャンドルの数値積分にも依存しているが、8×8の点分数を用いれば十分な収束値が得られることを確認している。

図2は、開き角 $\alpha = 45^\circ$ 、曲がり角 $\alpha_0 = 30^\circ$ とした曲がった扇形板の一点 $(\zeta_1 = 1.0, \varphi_1 = 45^\circ)$ ；挿入図の白丸印の点) を調和起振したときの無次元化された駆動点インピーダンスを示す。横軸は、無次元化された起振振動数で、三次の共振点を含む範囲までを示している。減衰比 η の値を0.001, 0.005, 0.02の3通りに変えて示しているが、減衰が大きくなるに従って、共振点、反共振点のピークが、鈍化しているのがわかる。また、高次になるほど応答ピークが鈍化しているが、こ

図1 非対称な放射辺を有する片持扇形板

これは、系に作用する減衰が速度比例形を仮定しているためである。

図3は、減衰比 $\eta=0.001$ で、起振点 (ζ_1, φ_1) を $(0.75, 45^\circ)$, $(0.75, 22.5^\circ)$, $(0.75, 0^\circ)$ の3通りに変化したときの駆動点インピーダンスを示す。一点鎖線で示される $(0.75, 0^\circ)$ の一次と、実線で示される $(0.75, 45^\circ)$ の三次の共振ピークが、はっきりと現れていない。これは共振点と反共振点の振動数が近いことから相殺されたものと考えられる。

図4は、減衰比 $\eta=0.001$ として、起振点 (ζ_1, φ_1) を、 $(1.0, 45^\circ)$, $(1.0, 22.5^\circ)$, $(1.0, 0^\circ)$ の3通りに変化した場合の駆動点インピーダンスを示す。実線と一点鎖線で示されるように、起振点が $(1.0, 45^\circ)$, $(1.0, 0^\circ)$ の場合は、一次、二次、三次の共振点が認められるが、破線で示される起振点が $(1.0, 22.5^\circ)$ の場合は、二次の共振点が現れていない。これは二次の固有モードの節線近傍に起振点を設けたことによる。

図5は、減衰比 $\eta=0.001$ で、起振点 (ζ_1, φ_1) を $(1.0, 45^\circ)$ と一定にして、曲がり角 α_3 を $30^\circ, 15^\circ, 0^\circ$ と変化した場合の駆動点インピーダンスを示す。曲がり角が大きくなると、板の固有振動数が小さくなるため、共振点が振動数の小さいほうへ移動し、ピーク値も低い値をとるがその形状は非常に類似なものとなっている。

表1 非対称な曲がった放射辺を有する片持扇形板の固有振動数 Ω の収束状況
($\alpha_1=45^\circ$, $\alpha_3=30^\circ$, $\nu=0.3$, $\beta=0.5$)

Mode Number	M × N			
	4 × 4	5 × 5	6 × 6	7 × 7
1	9.519	9.487	9.468	9.461
2	18.22	17.96	17.94	17.92
3	47.28	44.76	44.21	44.07

[$\alpha=45^\circ$, $\alpha_3=30^\circ$, $\nu=0.3$, $\beta=0.5$, $(\zeta_1, \varphi_1)=(1.0, 45^\circ)$, η : —0.001, ----0.005, - - -0.02]

図2 駆動点インピーダンス

図6は、図5に示した曲がり角 α_3 を変化した扇形板の起振点での一次から三次までの反共振時の変位振幅分布を示す。図中の黒丸印は最大振幅を示し、実線は $|W_{\max}/aF|$ を100としたときの振幅の分布を示す。

[$\alpha=45^\circ$, $\alpha_3=30^\circ$, $\nu=0.3$, $\beta=0.5$, $\eta=0.001$, (ζ_1, φ_1) : —(0.75, 45°), ----(0.75, 22.5°), - - - (0.75, 0°)]

図3 駆動点インピーダンス

[$\alpha=45^\circ$, $\alpha_3=30^\circ$, $\nu=0.3$, $\beta=0.5$, $\eta=0.001$, (ζ_1, φ_1) : —(1.0, 45°), ----(1.0, 22.5°), - - - (1.0, 0°)]

図4 駆動点インピーダンス

[$\alpha=45^\circ$, $\nu=0.3$, $\beta=0.5$, $\eta=0.001$, $(\zeta_1, \varphi_1)=(1.0, 45^\circ)$, α_3 : —30°, ----15°, - - -0°]

図5 駆動点インピーダンス

図 6 一点で調和的に起振された片持曲扇形板の変位振幅分布

図 7 一点で調和的に起振された片持曲扇形板の変位振幅分布

す。図中の白丸印が起振点であるが、形状の相違による変位振幅分布の変化が認められる。また、応答変位分布の極大点が、一次は1箇所、二次は2箇所、三次は3箇所に生じているのがわかる。これは固有振動モードの節線によって分割される領域の数に対応している。

図7は、図3に示した起振点 (ζ_1, φ_1) を変化させたときの起振点での一次から三次までの反共振時の変位振幅分布を示す。図中の白丸が起振点を示すが、起振位置の相違によって、応答変位振幅分布に変化が生じていることがわかる。また、反共振時の変位を示しているため、起振点での変位振幅が小さいのがわかる。

本研究の数値計算に当たっては、北海道大学大型計算機センター HITAC M 280 H を用いた。

4. 結 論

曲がった放射辺を有する片持扇形板を、変数変換によって単位の外半径を持つ扇形板に変換し、リッツ法を適用することにより、任意の一点で調和起振される片持扇形板の定常応答を解析し、次の結論を得た。

(1) 減衰比 η が小さいとき鋭い応答ピークが現

れるが、 η が大きくなると応答ピークは鈍化する。

(2) 曲がり角 α_3 が大きくなると共振振動数は減少する。

(3) 起振点 (ζ_1, φ_1) を変えても共振振動数は変わらないが、反共振点の振動数と変位振幅分布はかなり変化する。

(4) 応答変位分布の極大値は固有振動モードの節線によって分割される領域の数に対応して現れる。

文 献

- (1) 田中・入江・山田, 曲がった放射辺を有する片持扇形板の自由振動, 機論, 53-485, C (昭62), 5.
- (2) Warburton, G. B., Comment on "A note on forced vibration of a clamped rectangular plate", *J. Sound Vib.*, 45-3 (1976), 461.
- (3) Warburton, G. B., Comment on "A direct method for analyzing the forced vibrations of continuous systems having damping", *J. Sound Vib.*, 60-4 (1978), 591.
- (4) Warburton, G. B., Response using the Rayleigh-Ritz method, *Earthquake. Eng. Struct. Dyn.*, 7-4 (1979), 327.
- (5) 一ノ宮・入江・山田, 減衰を有する片持四辺形板の定常応答, 機論, 52-484, C (昭61), 2995.

討 論

〔質問〕 一ノ宮 修〔北海道工業大学〕

(1) 板の減衰として速度比例形を仮定された理由についてご教示願いたい。

(2) 式(14)の二重積分をガウス・ルジャンドルの数値積分を用いて計算されているが、この数値積分の分点数が計算結果に及ぼす影響はどの程度なのか。

(3) 図3の一次共振点において、各駆動点の応答ピーク値に差が生じているが、これは固有モードに依存すると思われる。そこで、この共振点に対応する板の固有モード（等振幅分布）をご教示願いたい。

〔回答〕 (1) 構造物の減衰を考慮する場合、速度比例形の減衰や構造減衰など、いろいろな形の減衰がある。ここでは、速度比例形の粘性減衰を採用しているが、これを用いた特別の理由はない。しかし、この減衰の板の振動に与える影響を明らかにすることにより、他の形の減衰の効果を推測することが可能である。

(2) ガウス・ルジャンドルの二重積分の分点数が数値計算結果に及ぼす影響について、ここでは振動の固有値を例にとってお答えする。付表1は、式(10)で与えられる二重級数の項数を $M \times N = 6 \times 6$ とし、分点数を $4 \times 4, 8 \times 8, 12 \times 12$ としたときの固有値を与えるが、分点数を 8×8 とすることにより十分な精度の結果が得られている。

(3) 付図1に、図3の Ω_1 における等振幅分布を示す。起振点が $\zeta_1 = 0.75, \varphi_1 = 45^\circ$ 、と $\zeta_1 = 0.75, \varphi_1 =$

付表1 分点数の固有値への影響
($\alpha = 45^\circ, \alpha_0 = 30^\circ, \beta = 0.5, \nu = 0.3$)

Mode Number	分 点 数		
	4×4	8×8	12×12
1	9.1812	9.4675	9.4676
2	16.1432	17.9353	17.9353
3	25.2381	44.2106	44.2111
4	30.7441	74.5791	74.5797

(a) $\zeta_1 = 0.75, \varphi_1 = 45^\circ$,
および $\zeta_1 = 0.75, \varphi_1 = 22.5^\circ$ (b) $\zeta_1 = 0.75, \varphi_1 = 0^\circ$

付図1 図3の一次共振点の等振幅分布

($\alpha = 45^\circ, \alpha_0 = 30^\circ, \beta = 0.5, \nu = 0.3$)

22.5° の場合は、付図1(a)に示す固有振動モードの等振幅分布とほぼ同じで、起振点が $\zeta_1 = 0.75, \varphi_1 = 0^\circ$ の場合は、付図1(b) (起振点は白丸印) に示すように曲線が全体的に固定端側に移動している。