交番電磁力が作用する弾性体の非線形強制振動の有限要素解析*

(第2報, 長方形板の場合の理論解析と実験)

小島 宏行^{*1}, 森 平 明 宏^{*2}
根 津 紀久雄^{*1}, 坂 本 賢 治^{*1}

Finite Element Analysis of Nonlinear Forced Vibrations of an Elastic Body Subjected to Alternating Electromagnetic Force (2nd Report, Theoretical Analysis and Experiments for a Rectangular Plate)

Hiroyuki KOJIMA, Akihiro MORIDAIIRA,
Kikuo NEZU, and Kenji SAKAMOTO

In this report, the nonlinear forced vibration responses of a plate subjected to alternating electromagnetic attractive force are investigated theoretically and experimentally in consideration of the superharmonic and the subharmonic vibrations as well as the harmonic one. In the analysis, first, the electromagnetic attractive force is formulated by applying the least squares method to the experimental results. By the use of this formulation, the matrix equation of motion of the plate is obtained by applying the finite element method. Then, the nonlinear simultaneous equations, which decide the superharmonic and the subharmonic vibrations as well as the harmonic one, are derived by the harmonic balance method and the reduced impedance method. The numerical results carried out by the Newton-Raphson method agree well with the experimental results, and the validity of the present analysis is confirmed.

Key Words: Vibration of Continuous System, Electromagnetic Force, Rectangular Plate, Non-linear Vibration, Finite Element Method, Harmonic Balance Method

1. 緒 言

磁気軸受, 電磁バイブレータならびにリニアモーター等においては, 電磁力が効果的に用いられている。特に, 電磁バイブレータや交流共振形磁気軸受においては, 交番電磁力が利用されており, ばね質量系⁽¹⁾ならびにはり状構造物^{(2)~(6)}を対象とした場合の電磁力の非線形性に起因する非線形振動に関する研究も行われている。また著者らは, 交番電磁力が作用する板の強制振動を有限要素法を用いて調べているが⁽⁷⁾, この研究は, 電磁力を線形化して解析を行っており, 電磁力の非線形性に起因する非線形振動を取扱ったものではない。板構造物は多くの機器において見られ, 電磁力が作用する板の非線形振動応答を, 超調波ならびに分数調波振動を考慮して調べることは, 十分に意義が認められると言えるが, このような研究はまだ見当たらない。

一方, 弾性体構造物の振動解析法として, 実用上極めて有用な有限要素法が広く用いられている。非線形の電磁力が作用する弾性体の振動問題においても, 有

限要素法を適用することは, 境界条件や形状等の変更に対する取扱いが容易となり, 十分に意義あるものと言える。このような点に鑑み, 著者らは, 前報⁽⁸⁾において, 交番電磁力が作用する弾性体の非線形強制振動応答を導く手法として, 有限要素法, 調和バランス法ならびに縮小インピーダンス法を適用した解析法を提案し, 具体例としてはりへの適用例を示した。

本研究は, 交番電磁力が作用する長方形板の非線形強制振動応答を, 超調波振動ならびに分数調波振動を考慮して, 理論と実験の両面から調べたものである。解析においては, まず板に作用する電磁吸引力特性を, 実測結果に最小二乗法を適用して定式化している。次に, この結果を用いて, 系の非線形強制振動応答を与える3元の非線形連立方程式を, 前報の解析法⁽⁸⁾ならびに板の有限要素解析法⁽⁹⁾を適用して導いている。さらに, ニュートン・ラフソン法に基づく数値計算結果と実験結果を比較照合し, 本解析法ならびに数値計算プログラムの妥当性を検証している。

2. 板に作用する電磁吸引力特性

図1は, 交番電磁力が作用する長方形板の実験装置の概略図を示したものである。板の一端は固定されており, 発振器により生成された交番電圧が, 電力増幅

* 昭和63年10月29日 山梨地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年4月18日。

^{*1} 正員, 群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

^{*2} 学生員, 群馬大学工学部。

器を介して電磁石に印加されている。また励磁電流は、抵抗 R の両端の電圧を測定することにより検出されており、板のたわみ振動変位は、光学式変位センサを用いて測定されている。

本報では、図1中の長方形板を図2のような長方形要素に分割して、動特性の解析を行っている。電磁吸引力が板に作用する場合、電磁石の設置場所ならびに板とのギャップに応じて磁束分布が異なってくるために、電磁吸引力 F は、励磁電流、電磁石と板とのギャップならびに電磁石の位置の関数となる。図3は、直流電流 0.5 A で励磁した電磁石を板の中央軸上(節点8)ならびに周辺(節点6)に設置した場合の実測値を示したものであり、電磁吸引力 F は、板の中央においてより大きくなっている。この実測結果に最小二乗法を適用し、交番電流 u で励磁した場合の電磁吸引力 f_m を、板と電磁石とのギャップ 4.3 mm からの変位 y_N の関数として定式化すると、次式が得られる。

$$f_m = \alpha_0(1 + \alpha_1 y_N + \alpha_2 y_N^2 + \alpha_3 y_N^3) u^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u = U \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 u , U は励磁電流ならびに振幅、 ω は角振動数である。また、 $\alpha_0 \sim \alpha_3$ は、電磁石の設置場所ならびに板とのギャップの関数であり、次のとおりとなる。

節点6

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.153 \times 10 \text{ N/A}^2, & \alpha_1 &= -0.324 \times 10^3 \text{ m} \\ \alpha_2 &= 0.923 \times 10^5 \text{ m}^2, & \alpha_3 &= -0.867 \times 10^7 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

節点8

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0.170 \times 10 \text{ N/A}^2, & \alpha_1 &= -0.383 \times 10^3 \text{ m} \\ \alpha_2 &= 0.116 \times 10^6 \text{ m}^2, & \alpha_3 &= -0.109 \times 10^8 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

3. 運動方程式と非線形振動応答解

本研究で用いた電磁石の先端の直径は 6 mm であり、板の寸法 $L_x = 276 \text{ mm}$, $L_y = 258 \text{ mm}$ に対し、かなり小さな値となっている。したがって、板に作用する電磁吸引力は、近似的に集中荷重として取扱っても、実用上の支障がない。また、はりは一端で固定されていることから、空気抵抗と材料の内部減衰力による制振力がはりに作用することになるが、この制振力は、モータのブラシ部や軸受等に生ずる固体摩擦力に比べ極めて小さな値となる。したがって、図2に示されている長方形板の運動方程式は、有限要素法を適用することにより、次式のように書くことができる。

$$\begin{Bmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}' \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ y_0 \end{Bmatrix} = f_m \begin{Bmatrix} b' \\ b_0 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに

$$\begin{aligned} & \{\partial y'^T, \partial y_0^T\} \left[\begin{Bmatrix} M'_{11} & M'_{12} \\ M'_{21} & M_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}' \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K'_{11} & K'_{12} \\ K'_{21} & K_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ y_0 \end{Bmatrix} \right] \\ &= \sum_{e=1}^n \partial \{\phi\}_e^T [M]_e \{\ddot{\phi}\}_e + [K]_e \{\phi\}_e \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

図1 実験装置概略図

図2 長方形板の有限要素分割図

図3 電磁吸引力特性

$$\{y_0\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{Bmatrix}, \quad \{y'\} = \begin{Bmatrix} \phi_{n+1} \\ \phi_{n+2} \\ \vdots \\ \phi_{n+m} \end{Bmatrix}, \quad \{\phi\}_e = \begin{Bmatrix} \bar{\phi}_i \\ \bar{\phi}_j \\ \vdots \\ \bar{\phi}_k \\ \bar{\phi}_l \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\{\bar{\phi}_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \end{Bmatrix}, \quad \{b_0\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}, \quad \{b\}_e = \begin{Bmatrix} \bar{b}_i \\ \bar{b}_j \\ \vdots \\ \bar{b}_k \\ \bar{b}_l \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{b}\}_i = \begin{Bmatrix} \delta_N^e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ただし、 $\bar{n}$ は長方形要素の総数、 $\{y'\}$ は固定端における節点変位ベクトル、 $\{y_0\}$ は固定端以外の節点における変位ベクトル、 n は固定端以外の節点の総数、 m は固定端における節点総数、 $\{\phi\}_e$ は要素 e の変位ベクトル、 $\{\bar{\phi}\}_i$ は節点 i の変位ベクトル、 w_i はたわみ変位、 θ_{ix} 、 θ_{iy} はたわみ角、 $\{b_0\}$ 、 $\{b\}$ は力ベクトル、 $\{b\}_e$ は要素 e の力ベクトル、 $\{\bar{b}\}_i$ は節点 i の力ベクトル、 δ_N^e はクロネッカのデルタ、 N は電磁力が作用している節点番号である。また、 M'_{11} 、 M'_{12} 、 M'_{21} 、 M_0 は質量マトリックスの部分マトリックス、 K'_{11} 、 K'_{12} 、 K'_{21} 、 K_0 は剛性マトリックスの部分マトリックスであり、要素質量マトリックスならびに要素剛性マトリックス $[K]_e$ は、次式で与えられる。

$$[M]_e = \rho tab [\bar{M}]_e \quad (7)$$

$$[K]_e = \frac{Et^3}{720ab(1-\nu^2)} [L] \left\{ [K_1] + [K_2] + \nu [K_3] + \frac{(1-\nu)}{2} [K_4] \right\} [L] \quad (8)$$

$$[L] = \begin{Bmatrix} l_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_s \end{Bmatrix}, \quad [L_s] = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ただし、 ρ は板材の密度、 a 、 b は板材の寸法、 ν はポアソン比、 t は厚さ、 E は縦弾性係数である。なお、マトリックス $[\bar{M}]_e$ 、 $[K_1] \sim [K_4]$ については、Zienkiewicz らが導いた結果⁽⁸⁾を用いているが、ここでは省略する。

長方形板の境界条件

$$\{y'\} = 0 \quad (10)$$

を式(3)に代入すると

$$[M_0]\{y_0\} + [K_0]\{y_0\} = f_m\{b_0\} \quad (11)$$

ここで、便宜上、式(11)の変位ベクトル $\{y_0\}$ の代わりに、 $\{y_0\}$ 中の要素 w_N と θ_{Ny} を交換した変位ベクトル

$$\{y\} = \{y_1, y_2, \dots, y_{\bar{N}}\} = \{w_1, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \dots, \theta_{\bar{n}y}, \theta_{Nx}, \theta_{Ny}, \dots, w_{\bar{n}}, \theta_{\bar{n}}, w_N\} \quad (12)$$

を用いることにする。ただし、 $\bar{N}$ ($=3n$) はベクトル $\{y\}$ の要素の総数である。したがって、 $\{y\}$ に対応する $[M_0]$ 、 $[K_0]$ 、 $\{b_0\}$ を $[M]$ 、 $[K]$ 、 $\{b\}$ のように置くと、式(11)の運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = f_m\{b\} \quad (13)$$

のように書き直すことができる。

はりに作用する制振力が極めて小さく、交番電磁力の振動数が 2ω となることに着目すると、2次超調波振動と基本調波振動を考慮した場合の式(13)の定常解は、次式のように書くことができる。

$$\{y\} = \{Y\} + \{Y^2\} \cos 2\omega t + \{Y^4\} \cos 4\omega t \quad (14)$$

式(14)を式(13)に代入し、調和バランス法を適用するとともに、電磁力が作用する節点 N のたわみ変位成分 (X , X_2 , X_4) とそれ以外の変位成分 ($\bar{Y}$, $\bar{Y}^2$, $\bar{Y}^4$) に変位ベクトルを分離すると、前報⁽⁶⁾と同様な手順により次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y} \\ X \end{Bmatrix} = s \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - 4\omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \bar{Y}^2 \\ X_2 \end{Bmatrix} = s_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - 16\omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \bar{Y}^4 \\ X_4 \end{Bmatrix} = s_4 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここに

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = [K], \quad \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = [M] \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{Y} \\ X \end{Bmatrix} = \{Y\}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{Y}^2 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{Y^2\}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{Y}^4 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \{Y^4\} \quad (19)$$

$$f_m = s + s_2 \cos 2\omega t + s_4 \cos 4\omega t \quad (20)$$

ただし、 s , s_2 , s_4 は X , X_2 , X_4 による多項式を表している。また、式(15)~(17)は縮少インピーダンス法により、電磁力が作用している節点のたわみ変位だけに關する3元の非線形連立方程式に変換することができる。すなわち

$$f_1 = 1 + \left(\alpha_1 - \frac{2Q}{\alpha_0 U^2} \right) X + \frac{\alpha_1 X_2}{2} + \alpha_2 \left\{ X^2 + XX_2 + \frac{1}{2} (X_2^2 + X_4^2 + X_2 X_4) \right\}$$

$$+ \alpha_3 \left\{ X^3 + \frac{3}{2} (X^2 X_2 + X X_2^2 + X X_4^2 + X X_2 X_4) + \frac{3}{4} (X_2^2 X_4 + X_2 X_4^2) + \frac{3}{8} X_2^3 \right\} = 0 \quad (21)$$

$$f_2 = 1 + \alpha_1 \left(X + \frac{X_4}{4} \right) + \left(\alpha_1 - \frac{2Q_2}{\alpha_0 U^2} \right) X_2 + \alpha_2 \left(X^2 + \frac{3}{4} X_2^2 + \frac{X_4^2}{2} + 2X X_2 + X_2 X_4 + X_4 X \right) \\ + \alpha_3 \left\{ X^3 + 3X^2 X_2 + 3X X_2 X_4 + \frac{3}{2} (X_2 X_4^2 + X_2^2 X_4 + X X_4^2) + \frac{2X^2 X_4}{3} + \frac{3X_2^3}{4} + \frac{3X_4^3}{8} + \frac{9X X_2^2}{4} \right\} = 0 \quad (22)$$

$$f_3 = \frac{\alpha_1 X_2}{2} + \left(\alpha_1 - \frac{2Q_4}{\alpha_0 U^2} \right) X_4 + \alpha_2 \left(\frac{X_2^2}{2} + 2X X_2 + X X_2 + X_2 X_4 \right) + \alpha_3 \left\{ 3X^2 X_4 + 3X X_2 X_4 + \frac{X_2^3}{2} \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (X X_2^2 + X_2^2 X_4 + X^2 X_2) + \frac{3X_4^3}{4} + \frac{9X_2 X_4^2}{8} \right\} = 0 \quad (23)$$

ここに

$$Q = K_{22} - \{K_{21}\}[K_{11}]^{-1}\{K_{12}\} \quad (24)$$

$$Q_2 = K_{22} - 4\omega^2 M_{22} - [K_{21} - 4\omega^2 M_{21}][K_{11} - 4\omega^2 M_{11}]^{-1}[K_{12} - 4\omega^2 M_{12}] \quad (25)$$

$$Q_4 = K_{22} - 16\omega^2 M_{22} - [K_{21} - 16\omega^2 M_{21}][K_{11} - 16\omega^2 M_{11}]^{-1}[K_{12} - 16\omega^2 M_{12}] \quad (26)$$

さらに、1/2 次分数調波振動と基本調波振動を考慮した定常振動解も、これまでの方法と同様に導くことができる。この場合の式(10)の解を

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \bar{Y} \\ X \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Y}^1 \\ X_1 \end{Bmatrix} \cos \omega t + \begin{Bmatrix} \bar{Y}^2 \\ X_2 \end{Bmatrix} \cos 2\omega t \quad (27)$$

と置けば、系の振動振幅を定める3元非線形連立方程式が、次式のように導かれる。

$$f'_1 = 1 + \left(\alpha_1 - \frac{2Q}{\alpha_0 U^2} \right) X + \frac{\alpha_1 X_2}{2} + \alpha_2 \left(X^2 + \frac{3X_1^2}{4} + \frac{X_2^2}{2} + X X_2 \right) \\ + \alpha_3 \left\{ \frac{3}{2} (X_1^2 X_2 + X X_2^2 + X^2 X_2) + X^3 + \frac{9X X_1^2}{4} + \frac{3X_2^3}{8} \right\} = 0 \quad (28)$$

$$f'_2 = \left(\frac{3\alpha_1}{2} - \frac{2Q_1}{\alpha_0 U^2} \right) X_1 + \alpha_2 (3X_1 X + 2X_1 X_2) \\ + \alpha_3 \left(\frac{5X_1^3}{4} + \frac{9X^2 X_1}{2} + \frac{21X_1 X_2^2}{8} + 6X X_1 X_2 \right) = 0 \quad (29)$$

$$f'_3 = 1 + \alpha_1 X + \left(\alpha_1 - \frac{2Q_2}{\alpha_0 U^2} \right) X_2 + \alpha_2 \left(X_1^2 + 2X X_2 + X^2 + \frac{3X_2^2}{4} \right) + \alpha_3 \left(\frac{3X_2^3}{4} + 3X^2 X_2 + 3X X_1^2 + \frac{21X_1^2 X}{8} \right. \\ \left. + X^3 + \frac{9X X_2^2}{4} \right) = 0 \quad (30)$$

ここに

$$Q_1 = K_{22} - \omega^2 M_{22} - [K_{21} - \omega^2 M_{21}][K_{11} - \omega^2 M_{11}]^{-1}[K_{12} - \omega^2 M_{12}] \quad (31)$$

図4 板の中央軸上に電磁力が作用する場合の非線形強制振動応答 (節点8)

図5 板の端に電磁力が作用する場合の非線形強制振動応答 (節点6)

図 6 振動波形の実測値 (a)～(c) 節点 8

4. 実験結果と数値計算結果

本実験で用いた実験装置は、図 1 に示されているとおりで、その諸元は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} E &= 183 \text{ GPa}, \quad \rho = 7.71 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \nu = 0.3 \\ t &= 1.6 \text{ mm}, \quad L_x = 276 \text{ mm}, \quad L_y = 258 \text{ mm} \\ a &= 34.5 \text{ mm}, \quad b = 32.25 \text{ mm}, \quad G = 4.3 \text{ mm} \\ U &= 0.5 \text{ A}, \quad R = 0.937 \Omega \end{aligned}$$

ここに、 L_x, L_y は長方形の寸法、 G はギャップ、 U 、 R は励磁電流の振幅ならびに測定用抵抗である。また電磁石は、直径 10 mm の軟鋼に直径 0.6 mm の銅線を 1020 回巻いたものであり、先端近傍はテーパ状に加工されており、先端の直径は 6 mm である。一方、有限要素法と縮小インピーダンス法を適用して導いた 3 元の非線形連立方程式 (21)～(23) ならびに式 (28)

図 7 振動波形の実測値 (d)～(g) 節点 6

～(30) の解を求める数値計算プログラムを、前報⁽⁶⁾と同様、ニュートンラプソン法を用いて作成した。

図 4, 5 は、板のたわみの非線形強制振動応答の実験結果と数値計算結果とを比較照合したものであり、図 6, 7 は、光学式無接触変位計で測定した振動波形を、

シンクロスコープとポラロイドカメラにより記録したものである。まず図4は、節点8、すなわち板の中央軸上に電磁力を作用させた場合の非線形強制振動応答を示したもので、横軸には、交番電磁力の振動数 f ($=2\omega/2\pi$)、縦軸には、次式で定義されている振動振幅 $\bar{W}_N$ が取られている。

$$\bar{W}_N = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad \text{または} \quad \bar{W}_N = \sqrt{X_2^2 + X_3^2} \quad \dots\dots\dots (32)$$

図4において、2次超調波振動は $f=8.6$ Hz 近傍、調和振動は $f=17.2$ Hz 近傍、1/2次分数調波振動は $f=35.0$ Hz 近傍において、それぞれ生起している。また図6は、図4中黒丸印(a), (b), (c)における励磁電流 u (A)と節点8のたわみ振動 w_8 (mm)を表したものであり、これらの波形より、図4中の各調波共振の種別が明確に確認できる。他方、図5は、節点6すなわち板の側面の端に電磁力を作用させた場合であり、図4の場合と同様、2次超調波振動、調和振動ならびに1/2次分数調波振動がそれぞれ生起している。また、図4において生起しなかった調和振動が、 $f=44.4$ Hz 近傍で生起しているが、このことは、 $f=44.4$ Hz 近傍における共振振動モードが、板の中央軸に関して非対称であることに起因している。図7は、図5中の黒丸印(d), (e), (f)における実測波形を示したものである。

なお、図4, 5の強制振動応答曲線において、より小さい電磁力が作用している節点6の振動変位のほうが、0~17.2 Hzの振動数範囲でより大きく、27.1 Hz 近傍で反共振が生じている。このことは、板の任意の点の強制振動変位が、振動数と加振力だけの関数ではなく、電磁力の作用点の座標の関数にもなっていることに対応しており、荷重点の変位は、周辺のほうがより大きくなる傾向にあることを示している。

5. 結 言

本研究は、交番電磁力が作用する板の非線形強制振動を、理論的に調べるとともに、実験を行い解析の妥当性を検証したものである。得られた結果を要約すると、次のようになる。

(1) 板に作用する電磁吸引力の実測結果に最小二乗法を適用し、電磁力の定式化を行った。この結果を用いて、交番電磁力が作用する板の非線形強制振動応答を定める3元の非線形連立方程式を、超調波ならびに分数調波振動を考慮するとともに、有限要素法、調和バランス法ならびに縮少インピーダンス法を適用して導いた。また、ニュートン・ラブソン法を用いた数値計算プログラムを作成した。

(2) 交番電磁力の非線形に起因する2次超調波振動ならびに1/2次分数調波振動の生起することが、理論と実験の両面から明らかにされた。

(3) 電磁力が板の中央軸以外の点に作用する場合には、中央軸に関し非対称の曲げ振動が生起することが、確認された。

(4) 数値計算結果は、実験結果と良く一致し、本解析の妥当性が立証された。

文 献

- (1) Kana, D. D., *Trans. ASME, Ser. B*, 89-4 (1967), 839.
- (2) Dao, N. V., *Proc. Vib. Prob.*, 14-1 (1973), 85.
- (3) Moon, F. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47-3 (1988), 638.
- (4) 小島・ほか3名, 機論, 50-455, C (昭59), 1168.
- (5) 小島・ほか2名, 機論, 52-476, C (昭61), 1198.
- (6) 小島, 機論, 54-502, C (昭63), 1252.
- (7) 小島・ほか3名, 機論, 53-485, C (昭62), 102.
- (8) Zeinkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K., *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 28 (1964), 471.