2 次形式評価に基づく VSS の設計*

—特にゲイン切り換え則に設計パラメータを有する場合—

吉田和信^{*1}, 川辺尚志^{*1}

A Design of VSS Based on a Quadratic Performance Index

- Especially of the Case Including a Design Parameter in Gain-Switching Law -

Kazunobu YOSHIDA and Hisashi KAWABE

The VSS design problem for a linear system has been investigated using a quadratic performance index, the value of which can be more lowered by logically switching admissible gains $\{K_0, K_1, \dots, K_p\}$ than by the single gain K_0 . The VSS control law is characterized by a gain-switching surface for a quadratic function of the state and by including a design parameter α . Furthermore, the concept of the resultant model is introduced with a view to inspecting the VSS performance as a parameter of α . Practical application to a servo-system composed of a DC servomotor(50W) and gears is made with the result that the proposed VSS is more effective in the improvement of the index than the single gain K_0 feedback system.

Key words: Variable structure system, quadratic performance index, admissible gain, design parameter, linear system

1. はじめに

状態点の位置に依存してゲインを切り換える制御系は、VSS(Variable Structure System)として知られており、単一のゲインを用いる通常の線形定ゲイン状態フィードバック則に比べ、制御の自由度が大きいので、より高度な制御の実現が可能となる。

ゲインを切り換えるという制御の結果、切り換え面上を状態が運動するスライディングモード(sモード)が発生する場合がある。sモード制御は、制御系の安定化および制御対象のパラメータ変化や外乱に対する低感度化に対して有効であるので、sモードを伴うVSSの設計理論が数多く研究されている⁽¹⁾⁻⁽³⁾。他方、sモード制御を目的としないVSSの設計理論もある^{(4),(5)}。

本論文では、線形制御対象に対して、許容なゲインの組が与えられた場合、状態の2次形式評価関数に基づいて、ゲイン切り換え則の設計を行なう手法について述べる。すなわち、許容なゲインを切り換えて、単

一のゲインを用いた場合よりも小さい評価値を達成するVSSを設計せよという問題を考察する。基準となる制御則よりも優れた評価を与える制御、すなわちGCC(Guaranteed Cost Control)に関する一つの理論的考察は、ChangとPeng⁽⁶⁾によってなされているが、本論文で提案する制御則の導出には、Changらの方法とは異なるアプローチが必要となる。

結果として得られる切り換え則は、状態のある2次関数の符号に従ってゲインを切り換えるという簡単なもので、与えた評価関数を最小とする最適切り換え則ではないが、基準となる許容ゲインのみで定ゲインフィードバック制御した場合よりも優れた評価を与えることが保証されている。また、本制御則を、実際のサーボ系に適用した実験結果も示す。

本論文の構成はつぎのとおりである。第2章では、問題を定式化する。第3章では、設計パラメータ α を有するゲイン切り換え則を導く。第4章では、パラメータ α の選定指標となる終結モデルについて述べる。第5章では、DCサーボモータ(50W)および歯車系で構

* 昭和63年11月23日 中国四国支部・九州支部合同岡山地方講演会において講演, 原稿受付 昭和63年4月21日。

^{*1} 正員, 広島工業大学工学部 (〒731-51 広島市佐伯区五日市町三宅 725)。

成される実システムに本制御則を適用したソフトウェア
アサボ制御の実験結果を示す。

2. 問題の記述

可制御な制御対象

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$x \in R^n, u \in R^m$$

に対して、許容なゲインの組

$$\{K_0, K_1, \dots, K_p\} \quad (2)$$

が与えられたとする。許容制御は

$$u = K_i x, i \in \{0, 1, \dots, p\} \quad (3)$$

である。 $A+BK_0$ は安定 (固有値の実部がすべて負) と
いう仮定をおく。そして、つぎの評価を導入する。

$$J = \int_{t_0}^{\infty} x(t)' Q x(t) dt, Q > 0 \quad (4)$$

ゲイン K_0 による線形制御

$$u_0 = K_0 x \quad (5)$$

で制御した場合、(4) 式の評価は

$$J_0(0, t_0) = x(t_0)' P(0) x(t_0) \quad (6)$$

と表わされる。ただし $P(0)$ は、リアプノフ方程式

$$(A+BK_0)' P(\alpha) + P(\alpha)(A+BK_0) + 2\alpha P(\alpha) + Q = 0 \quad (7)$$

の解を $P(\alpha)$ とするとき、 $\alpha=0$ として求められる。問
題はつぎのとおりである。

「(3) 式の制御を用いて、(6) 式の評価よりも小さ
な評価を達成するためのゲイン切り換え則を求めよ。」

3. ゲイン切り換え則

つぎの切り換え則を有する許容制御を考えよう。

$$u(t) = K_{j(t)} x(t) \quad (8)$$

$$j(t) = \{j: \min_i V = 2x(t)' P(\alpha) B(K_i - K_0)x(t)\} \quad (9)$$

$$V = 2x(t)' P(\alpha) B(K_1 - K_0)x(t) \quad (10)$$

ただし、 $V=0$ のとき $j(t)=0$ とする。

α は、 $A+BK_0+\alpha I$ が安定となるように与えるものとす
る。(8) 式の制御を用いた場合の制御系の安定性に関
してつぎの定理が成立する。

《定理 1》 $Q > 0$ およびつぎの条件を満足する α
を与えたとき、(1), (8) 式の制御系は漸近安定である。

(i) $A+BK_0+\alpha I$ は安定

(ii) $Q + 2\alpha P(\alpha) > 0$ (11)

(証明) $A+BK_0+\alpha I$ は安定であるので、 $P(\alpha)$ は
正定である。また、 $A+BK_0$ も安定であるので、(11) 式
を満足させる $Q > 0, \alpha$ は存在する。正值関数 $\xi = x(t)'$
 $P(\alpha)x(t)$ の時間微分は

$$\dot{\xi} = 2x(t)' P(\alpha)(A+BK_{j(t)})x(t)$$

$$\leq 2x(t)' P(\alpha)(A+BK_0)x(t)$$

$$= -x(t)' (Q+2\alpha P(\alpha))x(t) < 0 \quad (12)$$

となる。すなわち、 ξ は制御系 (1), (8) 式のリアプノ
フ関数となり、漸近安定性が示された。 □

定理 1 は、安定性の十分条件であるので、(11) 式が
満足されない場合であっても、制御系が不安定である
とはいえない。

制御則 (8) を $\forall t \geq t_0$ に対して適用したとき、つぎの
定理が成立する。ただし、 $x(u_0, t)$ および $x(u, t)$ はそ
れぞれ、 u_0 および (8) 式の u による状態軌道であり、
 $x(u_0, t_0) = x(u, t_0) = x(t_0)$ である。

《定理 2》

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(u, t)' P(\alpha)x(u, t) = 0 \quad (13)$$

および次式右辺の積分が存在するならば

$$f = \int_{t_0}^{\infty} x(u_0, t)' P(\alpha)x(u_0, t) dt \\ - \int_{t_0}^{\infty} x(u, t)' P(\alpha)x(u, t) dt \quad (14)$$

$$J = \int_{t_0}^{\infty} x(u, t)' Qx(u, t) dt \leq J_0(0, t_0) + 2\alpha f \quad (15)$$

が成立する。

(証明) (6) 式を一般化して

$$J_0(\alpha, t) = x(t)' P(\alpha)x(t) \quad (16)$$

と記す。(8) 式の制御を用いるとき

$$0 \geq 2x(t)' P(\alpha)B(K_{j(t)} - K_0)x(t) \\ = x(t)' (Q+2\alpha P(\alpha))x(t) \\ + 2x(t)' P(\alpha)(A+BK_{j(t)})x(t) \\ = x(t)' (Q+2\alpha P(\alpha))x(t) + [\dot{J}_0(\alpha, t)]_u \quad (17)$$

すなわち

$$x(t)' Qx(t) \leq -[\dot{J}_0(\alpha, t)]_u - 2\alpha x(t)' P(\alpha)x(t) \quad (18)$$

が成立する。一方

$$J_0(\alpha, t) = \int_t^{\infty} e^{2\alpha(r-t)} x(u_0, \tau)' Qx(u_0, \tau) d\tau \quad (19)$$

である。(19) 式の両辺を t で微分し、 -1 を掛けること
によって次式を得る。

$$-\dot{J}_0(\alpha, t) = x(u_0, t)' Qx(u_0, t) \\ + 2\alpha \int_t^{\infty} e^{2\alpha(r-t)} x(u_0, \tau)' Qx(u_0, \tau) d\tau \\ = x(u_0, t)' Qx(u_0, t) + 2\alpha x(u_0, t)' P(\alpha)x(u_0, t) \quad (20)$$

(20) 式を区間 $[t_0, \infty)$ で積分し、(13) 式を用いると

$$J_0(\alpha, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} x(u_0, t)' Q x(u_0, t) dt + 2\alpha \int_{t_0}^{\infty} x(u_0, t)' P(\alpha) x(u_0, t) dt \quad (21)$$

を得る。また、(18)式を区間 $[t_0, \infty)$ 、積分経路 $x(u, t)$ で積分すると

$$\int_{t_0}^{\infty} x(u, t)' Q x(u, t) dt \leq J_0(\alpha, t_0) - 2\alpha \int_{t_0}^{\infty} x(u, t)' P(\alpha) x(u, t) dt \quad (22)$$

となる。(22)式の $J_0(\alpha, t_0)$ に(21)式を用いると(15)式が得られる。□

制御系が指数漸近安定のとき、定理2の仮定は成立する。よって、定理1の条件が成立するとき、これらの仮定は満たされる。

(15)式から、設計パラメータ α を0としたとき、(9)式の切り換え則は問題の要求を満足していることがわかる。また、(15)式は、 α を $-\text{sgn}(f + \alpha \partial f / \partial \alpha)$ の方向に微小量変動させれば、評価の上限を小さくできることを示している。

4. 設計パラメータ α と終結モデル

2章の問題設定で、制御対象の A を

$$\tilde{A} = A + BK_0 \quad (23)$$

に、また許容ゲインを

$$\tilde{K}_i = K_i - K_0, \quad i = 0 \sim p \quad (24)$$

に、等価的に置き換えることができる。 K_i は適当な正数 μ に対して

$$\tilde{K}_i \in \Gamma(\mu), \quad i = 0 \sim p \quad (25)$$

$$\Gamma(\mu) = \{\tilde{K} \mid \|\tilde{K}\| \leq \mu, \tilde{K} \in R^{m \times n}\} \quad (26)$$

となる。いま、理想的に、すべての $\Gamma(\mu)$ の元が許容ゲインである場合を考えよう。このときの制御則は、(8)~(10)式から

$$u(t) = \tilde{K}^* x(t) \quad (27)$$

$$\tilde{K}^* = \{G \mid G \in \Gamma(\mu),$$

$$\min_{\tilde{K} \in \Gamma(\mu)} V = 2x(t)' P(\alpha) B G x(t)\} \quad (28)$$

$$V = 2x(t)' P(\alpha) B \tilde{K} x(t) \quad (29)$$

と書ける。(28)式から

$$\tilde{K}^* = - \frac{\mu}{\|B' P(\alpha)\|} B' P(\alpha) \quad (30)$$

であることがわかる。したがって、制御系は、つぎの定ゲインフィードバック制御系

$$\dot{x} = [\tilde{A} - \frac{\mu}{\|B' P(\alpha)\|} B B' P(\alpha)] x \quad (31)$$

となる。

$\{\tilde{K}_i\}_{i=0}^p$ が $\Gamma(\mu)$ の中に一様に分布するような許容ゲインの系列を考えた場合、 p を大きくしてゆくとともに、本VSSは(31)式の線形制御系の挙動に近づいてゆくことが予想される。その意味で(31)式は本VSSの終結モデルである。

(18)式からわかるように関数 V を最小にすることはその時点で評価を減少させる最大の努力をすることである。しかしながら、より広い許容ゲインの集合に対しての V の最小化が、区間 $[t_0, \infty)$ での最終的な評価関数の減少により効果的であるとは一般にいえない。すなわち、 $\tilde{K} \in \Gamma(\mu)$ として、終結モデルを採用するよりも、 $\tilde{K}_i \in \Gamma(\mu)$, $i=0 \sim p$ として、集合 $\Gamma(\mu)$ に対して許容ゲインを疎にした方が、より小さい評価を達成するVSSが得られる場合もありうる。以下の数値例でわかるように、終結モデルより優れた評価を与えるVSSの例を実際に示すことができる。

パラメータ α を与えれば終結モデルが確定し、VSSの挙動はこのモデルの挙動に類似するという傾向をもつので、パラメータ α の選定には、終結モデルの動的特性が参考となるであろう。

〔数値例〕 つぎの場合を考えよう。

図1 VSS シミュレーション応答

図2 VSS 終結モデルのシミュレーション応答

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$p = 3, \quad \mu = \sqrt{200} \quad (33)$$

$$\{\tilde{K}_i\}_{i=0}^2 = \{(0,0), (0,10), (-10,0), (0,-10)\} \quad (34)$$

図 1 に、 $\alpha = 0, -5, -10$ の場合の VSS の応答を示す ($x_0 = (10,0)'$)。また、図 2 に対応する終結モデルの応答を示す。この場合の終結モデルは、 α を小さくすると振動的になり、速応性が大きくなるという傾向がみられ、VSS も同様の傾向がみられる。評価関数値は、 $\alpha = -5, -10$ のとき、終結モデルより VSS の方が小さくなっており、よりよい応答が得られている。

5. 実験的検討

5.1 実験装置および方法 つぎに、この理論の実用化可能性（例えばメカニカルシステム制御への応用性）を知るために、実機システムの一例として、図 3 に示す装置を作成して検討してみることにした。同図は、DC サーボモータ（50W）と歯車系で構成される制御対象および制御システムの全ブロック線図を示すもので、DC サーボモータおよびパワーアンプとしてのサーボパックは安川製を、A/D, D/A 変換器はコンテック製を用いた。駆動側と従動側の歯数比は 30:124 である。また、サーボ系には時定数を可変にできる調節器が付加してある。

実験は従動側の歯車を静止した状態からある角度回転させ、再び静止させるという位置決め制御実験である。コントローラのサンプリング時間は、BASIC（P 形式コンパイル）とマシン語の併用で 45ms である。なお、図 4 に装置全体写真を示す。

サーボ系の時定数は 1s に設定した。このときの制御対象の線形化状態方程式は

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (35)$$

$$x = (\theta, \omega)'$$

である。 θ および ω は、それぞれ従動歯車の回転角度および角速度を示す。ただし、 θ, ω, u の単位は電圧 V として方程式を記述している。 θ および ω の電圧との対応関係は、それぞれ 1V が 100° および $100^\circ/s$ である。実際には、歯車系の摩擦に起因する不感帯が操作部に存在する。この不感帯幅は約 $\pm 0.3V$ である。設計条件として与えた評価の重み行列および許容ゲインはつぎのとおりである。

$$Q = \text{diag}(1, .0001) \quad (36)$$

$$\{\tilde{K}_i\}_{i=0}^2 = \{(0,0), (-5,5), (5,-5)\} \quad (37)$$

$$K_0 = (-1, -.734935) \quad (38)$$

図 3 実験装置全ブロック線図

図 4 実験装置全体写真

図 5 サーボ系での VSS 制御実験結果 ($\alpha=0$)

図6 サーボ系でのVSS 制御実験結果($\alpha=-5$)

図7 サーボ系での線形制御実験結果

K_0 は、評価関数

$$\int_0^{\infty} (x(t)' Q x(t) + u(t)^2) dt \quad (39)$$

に対する最適レギュレータゲインである。

5・2 結果および考察 図5～7は、 θ の初期値を 0° 、目標値を 90° とした場合の実験結果であり、不感帯に起因する定常偏差がみられる。図5、6は、それぞれ $\alpha = 0, -5$ の場合のVSS 制御応答結果を示す。速応性、定常偏差（それぞれ約 2.5° 、約 0° ）ともに $\alpha = -5$ の方が優れている。また、図7には、線形制御 $u = K_0 x$ による制御応答結果を示す。比較的小さいゲインを用いているので、定常偏差が約 28° と大きくなっている。 K_0 による線形制御に対するVSSの優位性は明らかである。

図8に、実験に対応するVSS 制御応答のシミュレーションを示す。実験結果では、歯車系のバックラッシュ、不感帯、サンプル周期の影響でシミュレーション結果ほど応答が滑らかでないが、両者の応答は類似している。また、図9には、 $\mu = \sqrt{50}$ とした場合のVSS 終結モデルのシミュレーション結果を示す。 α を小さくしてゆけば θ の立ち上がりが速くなるという傾向がVSSの傾向と一致している。

実験結果からもわかるように、本VSSは、平衡点近くでゲインが頻繁に切り換わる。しかしながら、フィードバックされる状態の大きさが小さいので、ゲイン切

図8 サーボ系でのVSS シミュレーション応答

図9 サーボ系でのVSS 終結モデルのシミュレーション応答

り換えによる操作量の変動も小さく、制御系にさほど悪影響を与えていない。もし、平衡点近くでの切り換えが振動やノイズの原因になるような制御対象に対しては、ある程度平衡点に近づいたときに線形制御に切り換えるというデュアルモード制御方式の採用が有効であろう。

操作量 $u(t)$ は、関数 V の最小化を行なって (8) 式で決定されるため、いくらかの計算時間が必要となる。実験では、制御対象の時定数に比べて $u(t)$ の計算時間が十分短いので、この遅れに対する補償は行っていない。 $u(t)$ の計算時間が問題となるような速い制御対象を扱う場合、つぎの方策が考えられる。

- (i) ゲイン数を減少させる。
 - (ii) 計算機のハードとソフト面で計算速度を向上させる。
 - (iii) 状態を予測して、遅れ時間を補償する。
- (ii)、(iii) は、他の制御則についても、一般に採用されている方法である。

6. おわりに

状態の 2 次形式積分を評価としたとき、許容ゲイン $\{K_0, K_1, \dots, K_p\}$ を切り換えて、 K_0 による定ゲイン状態フィードバックよりも小さい評価値を与える VSS の設計法について考察した。得られた主要な結果はつぎのとおりである。

1. 可変ゲイン状態フィードバック制御則

$$u(t) = K_{j(t)} x(t)$$

$$j(t) = \{j : \min_i V = 2x(t)' P(\alpha) B(K_j - K_0)x(t)\}$$

$$V = 2x(t)' P(\alpha) B(K_1 - K_0)x(t)$$

は、 α を適切に与えたとき GCC (Guaranteed Cost Control) を実現する。ただし、 $P(\alpha)$ は

$$(A+BK_0)' P + P(A+BK_0) + 2\alpha P + Q = 0$$

の解であり、 A, B はそれぞれ制御対象のシステム行列および入力行列である。

2. α を $A+BK_0 + \alpha I$ が漸近安定となり、 $Q+2\alpha P$ が正定となるように与えたとき、設計された VSS は漸近安定である。

3. 終結モデルの概念を導入し、このモデルの動的挙動がパラメータ α の選定に利用できることを示した。

4. DC サーボモータおよび歯車系から構成されるサーボ系を制御対象として制御実験を行ない、所期の結果を得た。

評価関数の重み係数 Q は、与えられるものとして定式化した。実際の設計においては、制御系の安定性や速応性に関する設計パラメータとなる。場合によっては、許容ゲインの組も設計パラメータとなりうる。しかしながら、これらの設計パラメータと構成された制御系の特性との具体的関係は、現在のところあまり明確ではない。良好な応答を与えるパラメータを見出すためには、シミュレーションによる試行錯誤が必要となる。

文 献

- (1) Utkin, V.I., IEEE Trans., AC-22-2(1977), 212.
- (2) Young, K.D. and Kwatny, H.G., Automatica, 18-4 (1982), 385.
- (3) Utkin, V.I. and Yang, K.D., Automatic and Remote Control, 39-10(1978), 1466.
- (4) Gutman, P.O. and Gutman, S., IEEE Trans., AC-30-5(1985), 484.
- (5) 吉田、西村、米澤, 計自論, 21-7(1985), 677.
- (6) Chang, S.S.L. and Peng, T.K.C., IEEE Trans., AC-17-4(1972), 474.