圧入薄肉平歯車の歯元応力*

小 田 哲^{*1}, 宮 近 幸 逸^{*1}
小 出 隆 夫^{*1}, 内 野 高 志^{*2}Root Stresses of Thin-Rimmed Spur Gears
Due to Press-FittingSatoshi ODA, Kouitsu MIYACHIKA,
Takao KOIDE, and Takashi UCHINO

This paper presents a study on the root stresses of thin-rimmed spur gears due to press-fitting. The stress analysis of the thin-rimmed spur gear press-fitted upon the shaft or the bush by the 2-dimensional finite element method (FEM), in which the elastic contact between the thin-rimmed gear and the shaft or the bush, was taken into consideration, was carried out, and the root stresses were measured. The effects of rim and bush thicknesses, number of teeth, and interference on the root stress and the stresses at the contacting surface were examined. On the basis of these calculated results, a practical formula for the maximum true root stress of thin-rimmed spur gear press-fitted upon the shaft was derived.

Key Words: Gear, Thin Rim, Press-Fitting, Rim Thickness, Bush Thickness, Interference, Root Stress, Elastic Contact, FEM

1. 緒 言

薄肉歯車に軸を圧入した場合に生じる歯元応力については、研究結果^{(1)~(3)}が報告されているが、歯車穴と軸との間の弾性接触を考慮した、歯元応力、圧入面応力に関する研究結果はまだほとんど報告されていない。

本報では、圧入薄肉平歯車に対して歯車穴と軸またはブシュとの間の弾性接触を考慮して有限要素法(FEM)による応力解析を行うとともに歯元応力測定を行い、歯元応力、圧入面応力に及ぼすリム厚さ、ブシュ厚さ、歯数、しめしろなどの影響について明らかにしている。また、これらの計算結果に基づいて圧入薄肉平歯車に対する実用歯元実応力計算式を導いている。さらに歯車穴と軸との間の弾性接触を考慮しない場合との比較検討も行っている。

2. 有限要素法による応力解析

2.1 計算方法 圧入歯車の歯車穴と軸(中実軸)またはブシュとの間の弾性接触を考慮した応力解析に

* 昭和63年11月23日 中国四国支部・九州支部合同岡山地方講演会において講演、原稿受付 昭和63年4月18日。

^{*1} 正員、鳥取大学工学部 (〒680 鳥取市湖山町南4-101)。

^{*2} 学生員、鳥取大学大学院。

は、ユニット消去法による弾性接触応力解析法⁽³⁾⁽⁴⁾を用いた。また本FEM解析では、三角形一次要素を用い、二次元弾性問題として応力計算を行っている。本FEM解析法について検討を加えるために、圧入円筒の応力解析を行った。圧入円筒の応力解析では圧入面がユニット境界になるように要素分割を行い、しめしろをユニット境界(圧入面)の不整量として与えて応力計算を行う。図1は圧入円筒の円筒内の円周方向応力

図1 圧入円筒の応力分布

σ_θ , 半径方向応力 σ_r の本 FEM 解析と弾性理論⁽⁵⁾による計算結果を比較して示す。円筒および軸材料はいずれも鋼とし、縦弾性係数 $E=206$ GPa, ポアソン比 $\nu=0.3$ を用いている。図 1 より本 FEM 解析と弾性理論による計算値はよく一致することがわかる。したがって、本 FEM 解析のプログラムは種々の圧入機械要素の応力解析に有効であると考えられる。

2.2 歯車モデルの要素分割方法と周辺拘束条件

FEM による応力解析に用いた圧入薄肉平歯車の主諸元, リム厚さ l_w , プシュ厚さ l_b ($l_b=\infty$: 軸) およびしめしろ δ などを表 1 に示す。歯形は JIS B4358 で規定されている歯先丸み半径 $0.375m$ (m : モジュール) をもつラック形工具で歯切りされるインボリュート歯形である。また歯車, 軸およびプシュの材料はいずれも鋼とし, 本計算では $E=206$ GPa, $\nu=0.3$ を用いている。

FEM モデルとしては, 歯車形状の対称性および圧入条件を考慮して, 本報では 1/2 歯モデルを用いた。圧入歯車の応力解析では, 圧入面がユニット境界になるように要素分割を行い, しめしろをユニット境界

(圧入面)の不整量として与えて応力計算を行った。図 2 にモジュール $m=4$, 圧力角 $\alpha_0=20^\circ$, 歯数 $z=18$, リム厚さ $l_w=2m$ の薄肉平歯車に軸を圧入する場合の要素分割パターンを示す。周辺拘束条件は, 歯形中心線, 歯底中心線上の節点を円周方向に固定, 半径方向に自由とした。

3. 実験方法および実験装置

3.1 試験歯車 圧入時に実際に生じる歯元応力をひずみゲージを用いて測定し, FEM による計算結果と比較した。試験歯車の諸元は $m=4$, $\alpha_0=20^\circ$, $z=18$, $l_w=2m$, 歯幅 $b=8$ mm で, 材料は S 45 C で調質後ホブ切り加工したものである。軸材料は S 45 C 調質鋼である。

3.2 歯元応力測定 万能材料試験機により試験歯車に軸を圧入して歯元応力を測定した。歯元応力の測定はゲージ長さ 0.3 mm のひずみゲージを試験歯車の歯元すみ肉部の接線角度 $\theta=30^\circ$ (θ : 歯形中心線と歯元すみ肉曲線の接線のなす角) の断面およびこの歯元すみ肉部から 1 歯分離れた歯元すみ肉部の $\theta=75^\circ$ の断面(FEM 解析における最大歯元応力発生位置)の歯幅中央の位置に接着して行った。しめしろ $\delta=20$ μ m とした。

4. 計算・実験結果および考察

4.1 歯元応力計算値と測定値の比較 図 3 はモジュール $m=4$, 圧力角 $\alpha_0=20^\circ$, 歯数 $z=18$, リム厚さ $l_w=2m$ の薄肉平歯車にしめしろ $\delta=20$ μ m で軸(中実軸: プシュ厚さ $l_b=\infty$)を圧入した場合の歯元, 圧入面応力分布の計算結果を示す。これらの応力分布は歯形面, 圧入面に沿って生じる主応力値を歯面, 圧入面に垂直な方向に表したもので, 図 3 中の $\oplus$, $\ominus$ の符号はそれぞれ引張・圧縮応力を表す。図 3 より歯元応力は歯底付近で最大となること, 圧入面応力はほぼ

表 1 圧入薄肉平歯車の要目

Module	m	4
Pressure angle α_0		20°
Number of teeth z	18	30, 60
Rim thickness l_w		$1.5m^*$, 2m, 3m
Bush thickness l_b		m, $1.5m$, 2m, ∞^{**}
Interference δ μ m	20, 45, 90	45, 90, 120
Remarks	* m: module ** ∞ : refers to shaft

図 2 要素分割パターン

図 3 歯元, 圧入面応力分布

表 2 歯元応力計算値と測定値の比較 ($\delta=20$ μ m)

$\sigma_{\text{meas.max}}$	MPa	101.5
σ_{FEMmax}	MPa	103.3
$\sigma_{\text{meas.}\theta=30^\circ}$	MPa	31.73
$\sigma_{\text{FEM}\theta=30^\circ}$	MPa	32.24
$\sigma_{\text{meas.max}}/\sigma_{\text{FEMmax}}$		0.983
$\sigma_{\text{meas.}\theta=30^\circ}/\sigma_{\text{FEM}\theta=30^\circ}$		0.984

表 3 FEM と会田らの実用式による計算値の比較 ($\delta=45\mu\text{m}$)

z		18			30			60		
l_w		1.5m	2m	3m	1.5m	2m	3m	1.5m	2m	3m
σ_{FEMmax}	MPa	253.0	232.4	192.4	166.1	159.0	145.4	87.18	85.34	82.07
σ_{BA}	MPa	196.9	181.2	149.7	140.7	135.0	123.5	77.17	75.75	72.92
$\sigma_{\text{FEM}\theta=30^\circ}$	MPa	78.32	72.54	60.10	44.86	43.44	39.85	23.08	22.99	22.22
σ_{R}	MPa	192.9	177.5	146.6	134.0	128.6	117.6	75.83	74.44	71.66
$\sigma_{\text{BA}}/\sigma_{\text{FEMmax}}$		0.778	0.780	0.778	0.847	0.849	0.849	0.885	0.888	0.889
$\sigma_{\text{R}}/\sigma_{\text{FEM}\theta=30^\circ}$		2.46	2.45	2.44	2.99	2.96	2.95	3.29	3.24	3.23

(a) $l_b = \infty$ (b) $l_b = m$

図 4 歯元応力と接線角度の関係(リム厚さ, 歯数の影響)

一定であること, 最大歯元応力は圧入面応力より大きいことがわかる。

表 2 は, 図 3 の結果から求めた Hofer の危険断面位置の応力値, 最大歯元応力値 [接線角度 $\theta=75^\circ$ の位置の応力, 図 4 (a)] と測定値の比較を示す。計算値と測定値はよく一致することがわかる。

4・2 歯元応力に及ぼすリム厚さの影響 図 4

図 5 最大歯元応力とリム厚さの関係

(a) は, $z=18, 30, 60, l_w=1.5m, 2m, 3m$ の薄肉平歯車に $\delta=45\mu\text{m}$ で軸を圧入した場合, 図 4 (b) は $l_b=m$ のプッシュを圧入した場合の歯元応力と接線角度 θ [図 4 (a)] の関係を示す。図 4 (a), (b) より最大歯元応力は $l_b=m, \infty$ のいずれの場合も, リム厚さ, 歯数にかかわらず $\theta=75^\circ$ の歯底付近に生じること, Hofer の危険断面位置の応力は, 最大歯元応力の 30% 程度であることがわかる。図 5 は, 図 4 の結果より求めた最大歯元応力とリム厚さの関係を示す。最大歯元応力は, リム厚さ, 歯数の減少とともに増大することがわかる。

表 3 は, 図 4 (a) の結果から求めた最大歯元応力 σ_{FEMmax} , Hofer の危険断面位置の応力 $\sigma_{\text{FEM}\theta=30^\circ}$ と対応する会田らの実用式⁽¹⁾による計算値 $\sigma_{\text{BA}}, \sigma_{\text{R}}$ との比較を示す。表 3 より σ_{BA} は σ_{FEMmax} より 10~20% 程度小さく, σ_{R} は $\sigma_{\text{FEM}\theta=30^\circ}$ の 2.4~3.2 倍で FEM による計算値に比べてかなり大きいことがわかる。

4・3 歯元応力に及ぼすプッシュ厚さの影響 図 6 は, $z=18, l_w=2m$ の薄肉平歯車に $\delta=45\mu\text{m}$ で軸または $l_b=m, 1.5m, 2m$ のプッシュを圧入した場合の歯

元応力と接線角度の関係を示す。最大歯元応力はプッシュ厚さにかかわらず $\theta = 75^\circ$ の歯底付近に生じ、Hofer の危険断面位置の応力は、最大歯元応力の 30% 程度である。図 7 は、 $z=18, 30, 60$, $l_w=2m$ の薄肉平歯車に $\delta=45 \mu\text{m}$ で軸または $l_b=m, 1.5m, 2m$ のプッシュを圧入した場合の最大歯元応力の計算結果を示す。最大歯元応力はいずれの歯数においてもプッシュ厚さの増加とともに増大する。

4.4 歯元応力に及ぼすしめしろの影響 図 8 は、 $z=18$, $l_w=1.5m, 2m, 3m$ の薄肉平歯車に軸または $l_b=m$ のプッシュを圧入した場合の最大歯元応力としめしろの関係を示す。最大歯元応力は、リム厚さ、プッシュ厚さにかかわらず弾性接触を考慮しない場合と同様にしめしろに比例して増大することがわかる。図 9 は、 $z=18, 30, 60$, $l_w=2m$ の薄肉平歯車に軸または $l_b=m$ のプッシュを圧入した場合の最大歯元応力としめしろの関係を示す。最大歯元応力は歯数にかかわらずしめしろに比例して増大することがわかる。図 8, 9 の最大歯元応力発生位置は、しめしろにかかわらず $\theta = 75^\circ$ の歯底付近であった。

4.5 圧入面に生じる応力 図 10 は、 $z=18, 30$,

$l_w=1.5m, 2m, 3m$ の薄肉平歯車に $\delta=45 \mu\text{m}$ で軸を圧入した場合の圧入面の接触圧力分布を示す。横軸にリム内周の位置を表す中心角(歯形中心線からの角度で右回りを正とする)を、縦軸に接触圧力をとっている。図 10 より、 $z=18, 30$ のいずれの場合も、接触圧力はリム厚さの増加とともに増大し、歯形中心線上で極大値を、歯底中心線上で極小値をもつことがわかる。

図 11 は、 $z=18, 30, 60$ の薄肉平歯車に $\delta=45 \mu\text{m}$ で軸またはプッシュを圧入した場合の各リム厚さに対する圧入面の最大円周、半径方向応力 $\sigma_{R\theta\max}$, $\sigma_{Rr\max}$ と最大歯元応力 $\sigma_{\max}$ の比を示す。これらの値は、リム厚さの増加、歯数の減少とともに増大すること、またこの程度のリム厚さ、歯数の圧入歯車ではこれらの応力の絶対値は、 $\sigma_{Rr\max}$, $\sigma_{R\theta\max}$, $\sigma_{\max}$ の順に大きくなることがわかる。なお、これらの値はプッシュ厚さにかかわ

図 6 歯元応力と接線角度の関係(プッシュ厚さの影響)

図 7 最大歯元応力とプッシュ厚さの関係

図 8 最大歯元応力としめしろの関係(リム厚さの影響)

図 9 最大歯元応力としめしろの関係(歯数の影響)

らずほぼ一定である。

4.6 圧入薄肉平歯車の実用歯元実応力計算式

図12は、種々の歯数、リム厚さの薄肉平歯車に軸を圧入した場合の $\sqrt{(\delta/\sigma_{\max})(r_i/m)}$ と z の関係を示す。ここで r_i はリム内周半径を表す。各歯数において $\sqrt{(\delta/\sigma_{\max})(r_i/m)}$ の値はリム厚さが変化してもほとんど変わらない。図12より、 $\sqrt{(\delta/\sigma_{\max})(r_i/m)}$ は z に比例して増大することがわかる。図12の関係は次式で近似できる。

$$\sqrt{\frac{\delta}{\sigma_{\max}} \frac{r_i}{m}} = (2.03z - 3.30) \times 10^{-3} \dots \dots \dots (1)$$

式(1)より一般の材料(縦弾性係数: E)に対する圧入薄肉平歯車の最大歯元応力 σ_{PF} を求めるための実用計算式として

図10 圧入面の接触圧力

図11 $\sigma_{Rmax}/\sigma_{max}$, $\sigma_{Rmax}/\sigma_{max}$ とリム厚さの関係

$$\sigma_{PF} = \frac{Er_i\delta}{m(0.92z - 1.5)^2} \dots \dots \dots (2)$$

を導くことができる。

表4に $m=4$, $\alpha_0=20^\circ$, $z=18$, $l_w=2m$ の薄肉平歯車に $\delta=20\mu\text{m}$ で軸を圧入した場合に対する式(2)の実用式とFEMによる計算値、測定値の比較を示す。実用式、FEMによる計算値、測定値はよく一致することがわかる。表5に種々の歯数、リム厚さの薄肉平歯車に $\delta=45\mu\text{m}$ で軸を圧入した場合に対する実用式とFEMによる計算値の比較を示す。またHoferの危険断面位置の応力計算値も合わせて示す。表5より σ_{PF} と σ_{FEMmax} はよく一致することがわかる。

4.7 弾性接触を考慮しない場合との比較

圧入薄肉平歯車の圧入面での弾性接触の歯元応力に及ぼす影響について検討を加えるために、 $m=4$, $\alpha_0=20^\circ$, $z=18$, $l_w=2m$ の薄肉平歯車のリム内周に一様な内圧 p_0 が作用する場合の計算結果と $\delta=20\mu\text{m}$ で軸を圧入した場合の結果(図3、弾性接触を考慮)との比較を図13に示す。内圧 p_0 は式(3)⁽⁵⁾の r_o , r_i にそれぞれ歯底円半径、リム内周半径を、 $\delta=20\mu\text{m}$ を代入して求めたものである。

$$p_0 = \frac{E\delta(r_o^2 - r_i^2)}{4r_o^2r_i} \dots \dots \dots (3)$$

図13より歯元応力、圧入面応力は、弾性接触を考慮した場合のほうが考慮しない場合より少し大きい、両

表4 実用式とFEMによる計算値、測定値の比較 ($\delta=20\mu\text{m}$)

σ_{PF}	MPa	104.5
$\sigma_{meas,max}$	MPa	101.5
σ_{FEMmax}	MPa	103.3
$\sigma_{PF}/\sigma_{meas,max}$		1.029
$\sigma_{PF}/\sigma_{FEMmax}$		1.012

図12 $\sqrt{(\delta/\sigma_{\max})(r_i/m)}$ と z の関係

表 5 実用式と FEM による計算値の比較 ($\delta=45\ \mu\text{m}$)

z	18			30			60		
l_w	1.5m	2m	3m	1.5m	2m	3m	1.5m	2m	3m
σ_{PF} MPa	255.5	235.0	194.1	166.7	159.9	146.3	87.60	85.99	82.78
σ_{FEMmax} MPa	253.0	232.4	192.4	166.1	159.0	145.4	87.18	85.34	82.07
$\sigma_{FEM\theta=30^\circ}$ MPa	78.32	72.54	60.10	44.86	43.44	39.85	23.08	22.99	22.22
$\sigma_{PF}/\sigma_{FEMmax}$	1.010	1.011	1.009	1.004	1.006	1.006	1.005	1.008	1.009
$\sigma_{FEM\theta=30^\circ}/\sigma_{PF}$	0.307	0.309	0.310	0.269	0.272	0.272	0.263	0.267	0.268

者の差は小さく、最大歯元応力で 4.5% 程度であることがわかる。したがって、圧入薄肉平歯車の歯元応力解析では、圧入面での弾性接触を考慮しなくても実用上十分であると考えられる。

5. 結 言

圧入薄肉平歯車に対して歯車穴と軸またはプシュとの間の弾性接触を考慮して FEM による応力解析および歯元応力測定を行って得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 圧入薄肉平歯車の最大歯元応力は、リム厚さ、歯数の減少、プシュ厚さ(軸: プシュ厚さ $l_0=\infty$)の増加とともに増大する。また圧入面での弾性接触を考慮しない場合と同様に、しめしろに比例して増大する。

(2) 圧入薄肉平歯車の最大歯元応力発生位置は、リム厚さ、プシュ厚さ、歯数、しめしろにかかわらず接線角度 $\theta=75^\circ$ (θ : 歯形中心線と歯元すみ肉曲線の接線のなす角)の歯底付近である。

(3) 圧入薄肉平歯車の Hofer の危険断面位置の応力は、リム厚さ、プシュ厚さ、歯数、しめしろにかかわらず、最大歯元応力の 30% 程度である。

(4) 本報で求めた圧入薄肉平歯車の最大歯元応力は、会田らの実用式による計算値より大きく、Hofer の危険断面位置の応力は、会田らの実用式による計算値よりかなり小さい。

(5) 圧入薄肉平歯車の圧入面に生じる接触圧力は、歯形中心線上で極大値をとり、歯底中心線上で極小値をとる。また圧入面の最大円周、半径方向応力

図 13 歯元、圧入面応力に及ぼす弾性接触の影響

σ_{Rmax} , σ_{Rrmax} と最大歯元応力 σ_{max} の比は、リム厚さ、歯数の減少とともに増大し、プシュ厚さにかかわらず一定である。本報で用いた程度のリム厚さ、歯数では、 σ_{Rrmax} , σ_{Rmax} , σ_{max} の順(絶対値)に大きくなる。

(6) 圧入薄肉平歯車に対する実用歯元実応力計算式を導いた。

(7) 圧入薄肉平歯車の歯元応力に及ぼす圧入面での弾性接触の影響は小さいので、歯元応力解析においては弾性接触を考慮しなくても実用上十分である。

おわりに、応力解析を行うにあたって種々ご教示いただいた信州大学助教授 田中道彦博士ならびに本研究に熱心にご協力いただいた本学文部技官 難波千秋氏に厚くお礼申し上げる。また数値計算は京都大学大型計算機センターの FACOM VP-200 によって行ったことを付記し謝意を表す。

文 献

- (1) 会田・佐藤・新井, 機論, 38-312(昭 47), 2149.
- (2) 新井・青山・原田・岡本・鳥谷尾, 機論, 52-480, C(昭 61), 2187.
- (3) 田中・堀江・林, 設計製図, 22-12(昭 62), 421.
- (4) 小田・宮近・岡, 機論, 52-479, C(昭 61), 1972.
- (5) 中原, 材料力学(下巻), (昭 47), 82, 養賢堂.

討 論

〔質問〕 加藤正名・井上克巳

〔東北大学工学部〕

圧入薄肉歯車の設計に関して重要な問題を扱っておられると思う。次の点をおうかがいたい。

(1) 結果を拝見すると、圧入による歯元応力の $\sigma_{FEM\theta=30^\circ}$ は歯車が軸に対してすべらずに伝達し得る荷重による歯元応力に比較して無視できない値になるようだが、これをふまえたリム厚さやしめしろなどの決定法をどのように考えればよいか。

(2) 一般に、モジュールは曲げ強度より決定される。貴論文ではリム厚さ、ブシュ厚さなどをモジュールを用いて表しておられるので、それらは曲げ強度と関連づけられるようにも思える。それらの設計方針についてご意見をおきかせ願いたい。

〔回答〕 (1) 薄肉平歯車に軸を圧入する場合のリム厚さ l_w としめしろ δ は与えられた条件に対して、

まず軸径を決定し、次に歯車諸元(リム厚さを含む)を仮定し、これらの値から圧入面にすべりが生じないためのしめしろを求める。さらに、このしめしろの軸の圧入によって生じる応力と負荷によって生じる歯元応力の和が材料の許容応力をこえないように繰返し計算を行うことによって決定される。

(2) 圧入薄肉平歯車の場合、負荷かみあい時の歯元応力は、圧入によって生じる応力と負荷によって生じる応力の和になる。負荷によって生じる最大応力の発生位置は、リム厚さ、ブシュ厚さによって変わるので、圧入薄肉平歯車の危険断面位置を一点に定めることができない。このため、モジュールで整理した圧入薄肉平歯車の実用曲げ強度設計式を導くことはかなり難しいと思われる。ご指摘の点は、曲げ強度設計上重要な問題と考えられるので今後さらに検討を加えたいものと考えている。